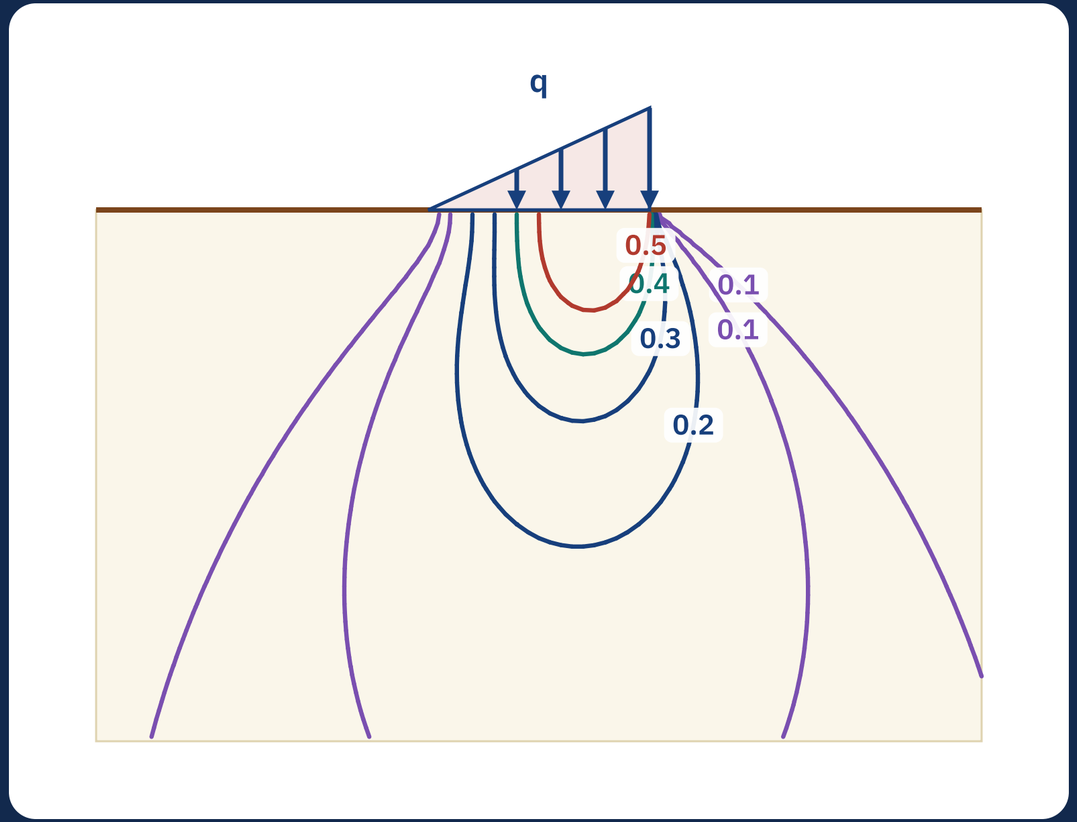
GeoTerva

地盤工学の講義スライド・地盤内の応力

三角形分布帯状荷重下の応力

講義：一端でゼロからqまで増加する三角形帯状荷重；1点を手計算で、分布、対称三角形および盛土。

- 線荷重の積分
- 角度による表現
- 天端のすべり
- 盛土＝等分布＋三角形
- 手計算で解ける



はじめに

この講義で学ぶこと

一方の端で0から他方の端でqへ**線形に増加**する帯状荷重（盛土法面、擁壁に接する堆積土、盛土の法尻）の下の鉛直応力増分：(q/B) r dr の大きさの線荷重の積分

角度表示：$\Delta\sigma_z = (q/2\pi)[(2x/B)\alpha - \sin 2\delta]$；$\alpha$ と δ の定義および δ の**符号**

表面では応力が荷重に追随し、深部では広がりながら**つま先**側へ帯状領域内へ移動すること。ゼロの縁が右側にある**鏡像**の場合

集中荷重を**端から端まで手計算**で；2本の帯状荷重で**対称三角形**を；等分布帯状荷重＋2つの三角形で**盛土**荷重を

講義の流れ

各項目は**3つの手順**で扱う：

1 · **理論**：式とその根拠

2 · **問題**：与条件と求めるもの

3 · **解答**：数値を用いて手順ごとに

例題：$q = 100\ \mathrm{kN/m^2}$、$B = 2\ \mathrm{m}$、荷重は $x = 0$ でゼロ、$x = B$ で q；点Aは $x = -1\ \mathrm{m}$、$z = 1.5\ \mathrm{m}$ にある。

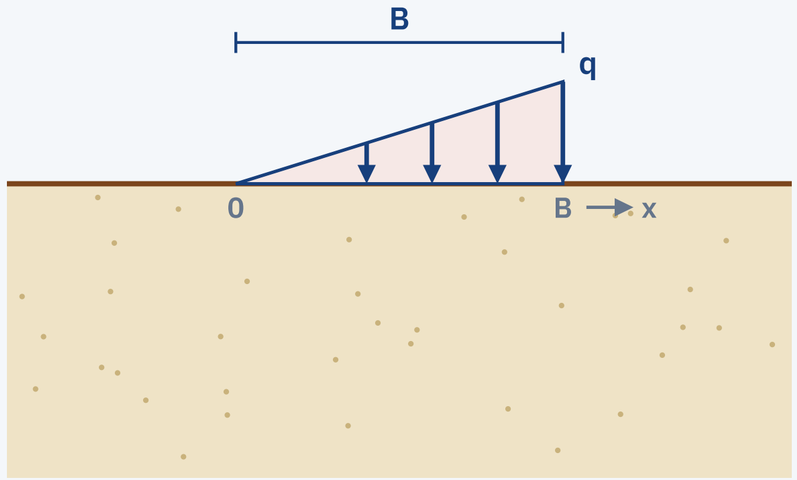
三角形分布帯状荷重：片側で0からqまで

理論

盛土の斜面、擁壁に接して積まれた土塊、盛土の法尻：一端で0から他端で**q**の値まで強度が増加する帯状荷重。等分布帯状荷重とともに**盛土荷重**を構成する

幅B、無限長の柔軟な帯状荷重；荷重は$0 \le x \le B$の範囲で**q·x/B**、それ以外では零である（平面ひずみ）。

地盤は均質・等方・線形弾性の半無限体である；$\Delta \sigma_z$は荷重による増分のみである



断面：載荷はx = 0でゼロ、x = Bでq；各断面で同一応力

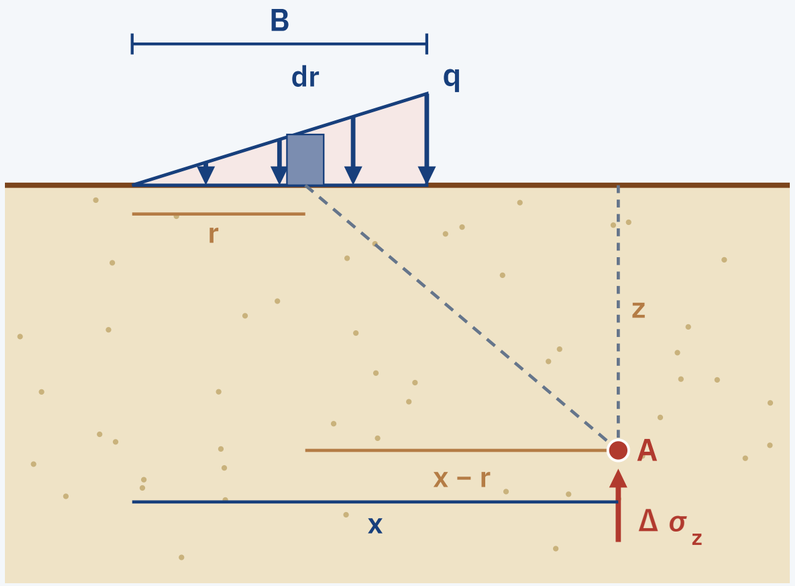
強度 (q/B) r dr の線荷重

理論

位置rの微小帯要素は単位長さあたり**(q/B) r dr**の荷重を負担する。点Aから水平距離x − rにある**線荷重**として扱い、幅方向にわたって積算する

$$\Delta\sigma_z = \int_0^B \frac{2\,(q/B)\,r\,dr\,z^3}{\pi\,[(x-r)^2+z^2]^2} = \frac{1}{B}\,\frac{2q}{\pi}\int_0^B \frac{z^3\,r\,dr}{[(x-r)^2+z^2]^2}$$

積分は**初等的**であり、図中の角度で表すと結果は次のスライドのとおりである。数値検証（q = 100、B = 2、x = −1、z = 1.5）：積分のSimpson値は**4.4699 kPa**、閉形式解は**4.4699 kPa**



$\Delta\sigma_z = (q/2\pi)[(2x/B)\ \alpha - \sin 2\delta]$

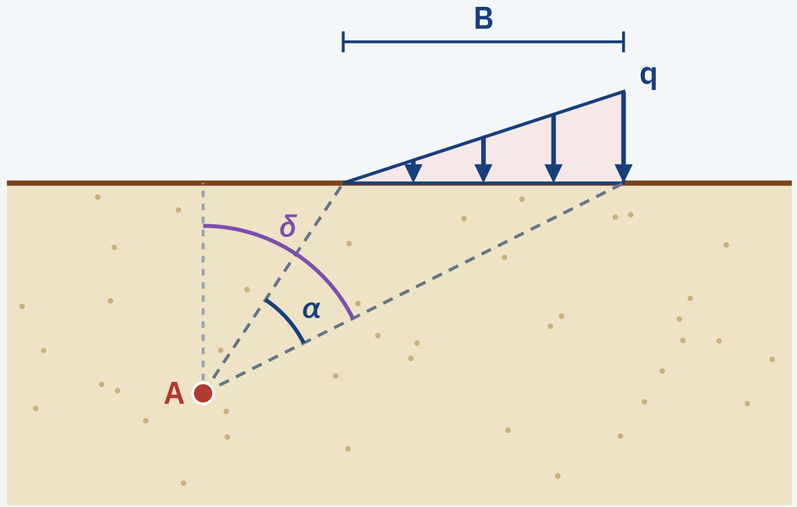
理論

$$\Delta\sigma_z = \frac{q}{2\pi}\left(\frac{2x}{B}\,\alpha - \sin 2\delta\right)$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x}{z} - \tan^{-1}\frac{x-B}{z} \qquad \delta = \tan^{-1}\frac{x-B}{z}$$

α はラジアンである。**δ** はAを通る鉛直線から**高い側の端**へ引いた直線までの角度である。符号が重要である：高い側の端がAの+x側にあれば δ は負である

逆正接関数を用いれば符号は自ずと定まり、結果は**すべてのx**に対して有効である：帯状荷重の側方、直下、あるいはその先でも成り立つ。xは**零縁**から載荷縁に向かって測る。



A (x = −1、z = 1.5)：α と δ（δ は負）

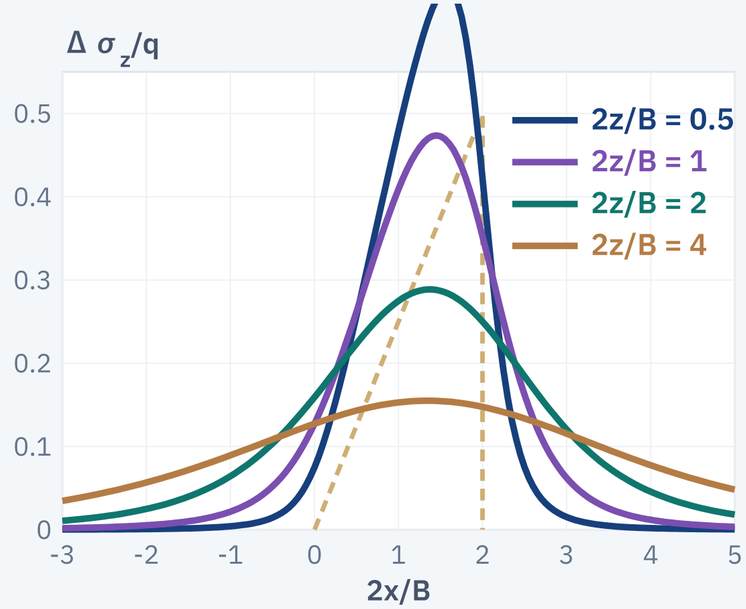
地表では荷重に追従し、深さとともに広がる

理論

地表付近では応力は**荷重そのもの**に追従する；深くなるにつれて応力は**広がり**、その最大値は**帯状荷重の内部へと移動する**

ピークは2z/B = 0.5では2x/B = 1.58（0.65 q）；2z/B = 4では2x/B = 1.34（0.15 q）：深くなるほど荷重の**図心**（x = 2B/3、すなわち2x/B = 1.33）の下にとどまる

ゼロ辺の外側（x < 0）では応力は小さいがゼロではない。荷重はないが、地盤は応力を伝える



Δ σz/q ― 2x/B（荷重は黄色の破線三角形）

Δ σz/q の値

理論

2z/B \ 2x/B	-2.0	-1.0	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
0.25	0.0001	0.0006	0.0392	0.2516	0.4969	0.7272	0.4604	0.0024	0.0003
0.50	0.0008	0.0041	0.0749	0.2574	0.4797	0.6448	0.4220	0.0152	0.0019
1.00	0.0053	0.0217	0.1273	0.2620	0.4092	0.4726	0.3524	0.0622	0.0119
1.50	0.0140	0.0447	0.1528	0.2473	0.3341	0.3598	0.2952	0.1010	0.0285
2.00	0.0249	0.0643	0.1592	0.2235	0.2749	0.2870	0.2500	0.1206	0.0457
3.00	0.0448	0.0854	0.1469	0.1774	0.1979	0.2017	0.1872	0.1259	0.0691
4.00	0.0567	0.0894	0.1273	0.1431	0.1529	0.1545	0.1476	0.1154	0.0775
6.00	0.0622	0.0798	0.0955	0.1010	0.1042	0.1047	0.1024	0.0909	0.0740

Δ σ_z = q ·（表の値）。2x/B = −1、2z/B = 1.5のセルは0.0447：モジュールの初期例である。荷重は0 ≤ 2x/B ≤ 2の範囲にあり、載荷縁は2x/B = 2である。

ゼロ辺が右側にある場合；複数帯

理論

帯状荷重は**右端**でもゼロとなりうる：これは例題の帯状荷重の**鏡像**であり、同じ式を用い、xは**ゼロの端**から高い側の端に向かって測る（右端がゼロの場合、$x = x_L + B - x_A$）

地盤は弾性であるため、各帯状荷重の応力を別々に求め、合計する。帯状荷重は重なってはならない（縁で接することはできる）；モジュールには最大8個の帯状荷重を入力でき、それぞれにq、B、左端および方向がある

2つの三角形を鏡像の向きで並べると**対称三角形**荷重が得られる。等分布帯状荷重と2つの三角形は**盛土**荷重を構成する

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)}$$

問題

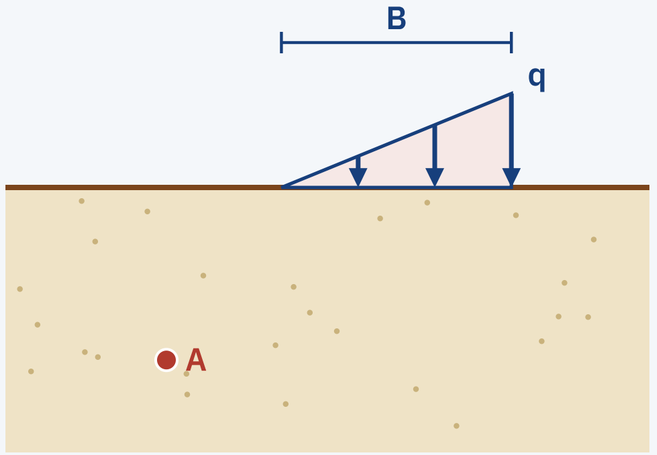
例題

与条件

帯状荷重	**柔軟、鉛直；$x = 0$でゼロ、$x = B$でqまで線形に増加：$q = 100$ kN/m²、$B = 2$ m**
点A	$x = -1$ m（ゼロ辺の1 m外側）、$z = 1.5$ m

求めるもの

α および **δ** の角度、**Δ σ$_z$/q** および **Δ σ$_z$**、零縁が右側にある鏡像の帯状荷重との比較



解答 (1/2)

解答

1 地表面から測った角度（Aから高い側の辺およびゼロの辺まで）

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{1.5}{3} = 26.57^\circ \qquad \alpha_2 = \tan^{-1}\frac{1.5}{1} = 56.31^\circ$$

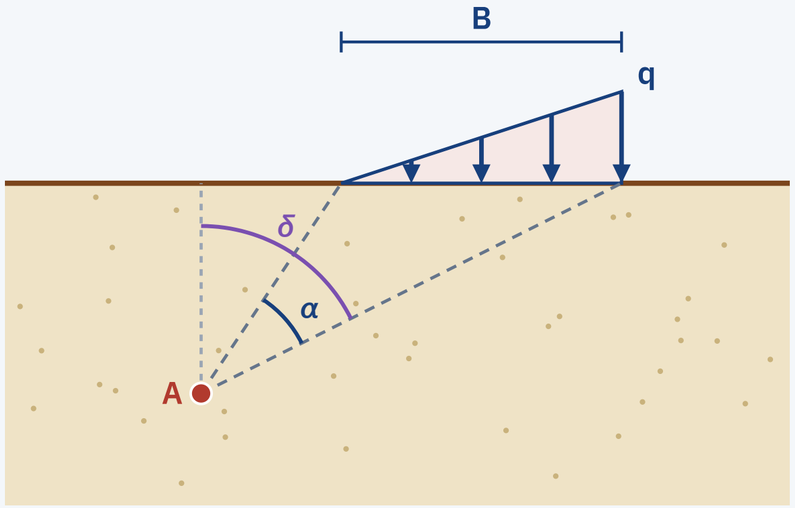
$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 29.74^\circ \qquad \delta = -(90^\circ - \alpha_2 + \alpha) = -\mathbf{63.43}^\circ$$

2 同じ角度を式から求める（x = −1 m、B = 2 m、z = 1.5 m）

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x}{z} - \tan^{-1}\frac{x-B}{z}$$

$$= \tan^{-1}(-0.6667) - \tan^{-1}(-2) = 29.74^\circ = \mathbf{0.5191}\ \text{rad}$$

$$\delta = \tan^{-1}\frac{x-B}{z} = \tan^{-1}\frac{-3}{1.5} = -\mathbf{63.43}^\circ$$



2つの方法は**同じ**角度を与える：α = 29.74°（0.5191 rad）、δ = -63.43°。δ が**負**であるのは、高い側の縁（x = B = 2 m）がAの+x側にあるためである。

解答 (2/2)

解答

3 影響値と応力

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2x}{B}\,\alpha - \sin 2\delta\right] = \frac{1}{2\pi}\left[(-1)(0.5191) - \sin(-126.87^\circ)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-0.5191 + 0.8000\right] = \mathbf{0.0447} \qquad \Delta\sigma_z = 0.0447\,(100) = \mathbf{4.47}\ \text{kPa}$$

4 鏡像帯状載荷：ゼロ端が右側（左端0、B = 2 m）、点Aはx = 3 m

$$x = x_L + B - x_A = 0 + 2 - 3 = -1\ \text{m} \;\Rightarrow\; \text{同一値：}\ \Delta\sigma_z = \mathbf{4.47}\ \text{kPa}$$

ゼロ縁の**1 m 外側**には荷重がないが、それでも応力は**4.47 kPa**（qの4.5%）である。鏡像の帯ではAの対応点はx = 3 mであり、モジュールは両ケースで同じ結果を与える。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

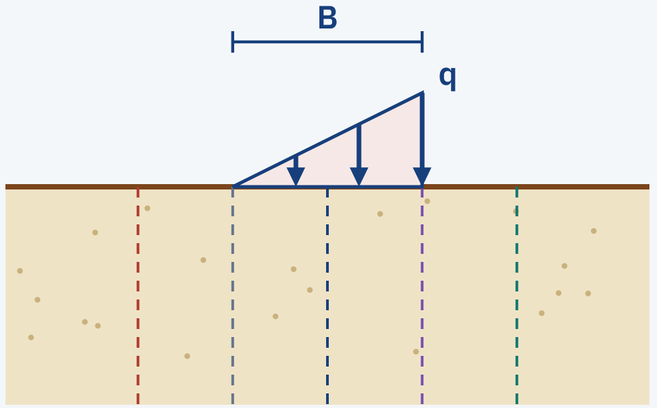
例題

与条件

帯状荷重	**例題1の帯状荷重：$q = 100$ kN/m²、$B = 2$ m（$x = 0$ はゼロ、$x = 2$ は高い側の端）**
手計算	**$z = 1.5$ mでは高い側の端の下（$x = B$）とゼロ側の端の下（$x = 0$）**
プロファイル	**$x = -1, 0, 1, 2, 3$ mの直線；$z = 0.5 \ldots 8$ m**

求めるもの

2つの辺の点における$\Delta \sigma_z$を手計算で求める。5本の線に沿った応力の深さ方向の変化。



解答 (1/2)

解答

1 高い側の縁の直下（x = B = 2 m、z = 1.5 m）：δ = 0

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{2}{1.5} - \tan^{-1}(0) = \mathbf{0.9273} \qquad \delta = 0 \;\Rightarrow\; \sin 2\delta = 0$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[(2)(0.9273) - 0\right] = 0.2952 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \mathbf{29.52}\ \text{kPa}$$

2 ゼロ縁の下方（x = 0、z = 1.5 m）：2x/B = 0

$$\alpha = \tan^{-1}(0) - \tan^{-1}\frac{-2}{1.5} = 0.9273 \qquad \delta = -0.9273 \;\Rightarrow\; \sin 2\delta = -0.9600$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[(0)(0.9273) - (-0.9600)\right] = 0.1528 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_z = \mathbf{15.28}\ \text{kPa}$$

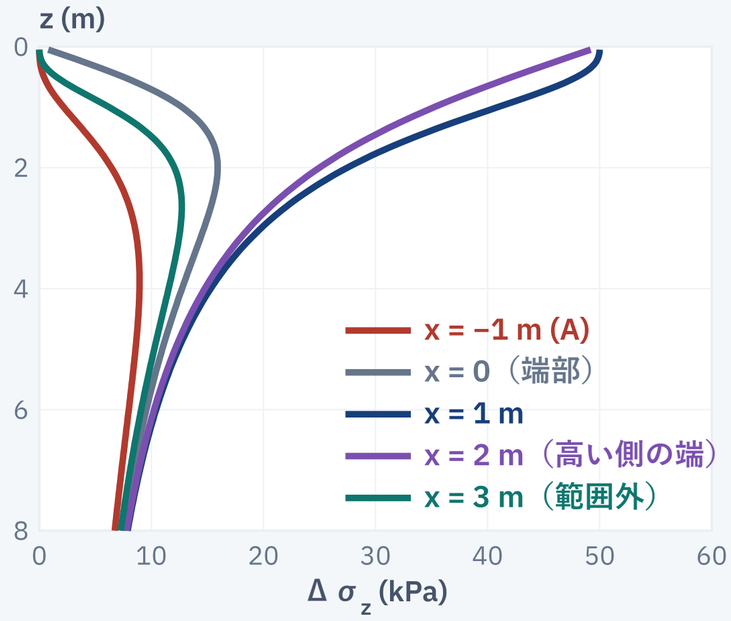
高い側の端部の下、深さz = 1.5 mで**29.52 kPa**（qの30 %）；ゼロ側の端部の下では荷重がゼロであるにもかかわらず**15.28 kPa**の応力が存在する。応力は荷重の直下だけでなく、その周囲にも存在する。

解答 (2/2)

解答

z (m)	x = −1 m (A)	x = 0（ゼロ）	x = 1 m	x = 2 m（高い）	x = 3 m（範囲外）
0.5	0.41	7.49	47.97	42.20	1.52
1.0	2.17	12.73	40.92	35.24	6.22
1.5	**4.47**	**15.28**	**33.41**	**29.52**	**10.10**
2.0	6.43	15.92	27.49	25.00	12.06
3.0	8.54	14.69	19.79	18.72	12.59
4.0	8.94	12.73	15.29	14.76	11.54
6.0	7.98	9.55	10.42	10.24	9.09
8.0	6.73	7.49	7.88	7.80	7.27

高い側の縁の下では、応力は地表面で**q/2 = 50 kPa**付近から始まり（z = 0.5 mで42.2 kPa）、深くなるにつれて減少する。**ゼロ側の縁の下**ではまず増加し、z ≈ 2 mで15.9 kPaのピークとなる。帯状荷重の外側（x = −1 m）でも、値はz ≈ 4 m付近で最大となる（z = 4 mで8.9 kPa）。



GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

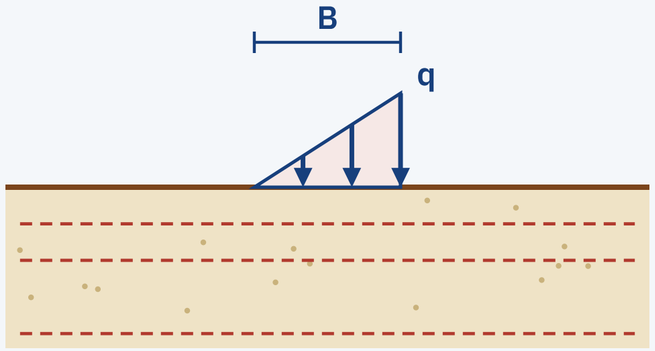
例題

与条件

帯状荷重	$q = 100$ kN/m², $B = 2$ m: $2x/B = x$ (m), $2z/B = z$ (m)
直線	深さ$z = 0.5,\ 1,\ 2,\ 4$ mにおける水平線、$x = -2 \ldots 4$ m
手計算	$z = 2$ mにおいて$x = 2B/3 = 1.333$ m（荷重の図心）

求めるもの

各深さにおいて$\Delta\sigma_z$のx方向の変化、**ピークの位置と値**、ピークが深さとともにどのように移動するか。



解答 (1/3)

解答

z (m)	x = -2 m	x = -1 m	x = 0 m	x = 0.5 m	x = 1 m	x = 2 m	x = 2 m	x = 3 m	x = 4 m
0.5	0.08	0.41	7.49	25.74	47.97	64.48	42.20	1.52	0.19
1	0.53	2.17	12.73	26.20	40.92	47.26	35.24	6.22	1.19
2	2.49	6.43	15.92	22.35	27.49	28.70	25.00	12.06	4.57
4	5.67	8.94	12.73	14.31	15.29	15.45	14.76	11.54	7.75

地表面付近（z = 0.5 m）では応力は荷重に追随し、載荷縁付近で大きい（約65 kPa）。深くなるにつれて曲線は**広がり**、ピークは**減少する**（z = 4 mで15.5 kPa）。帯状基礎の左側（x < 0）では値は小さいが0ではない。

解答 (2/3)

解答

1 x = 2B/3 = 1,333 m, z = 2 m

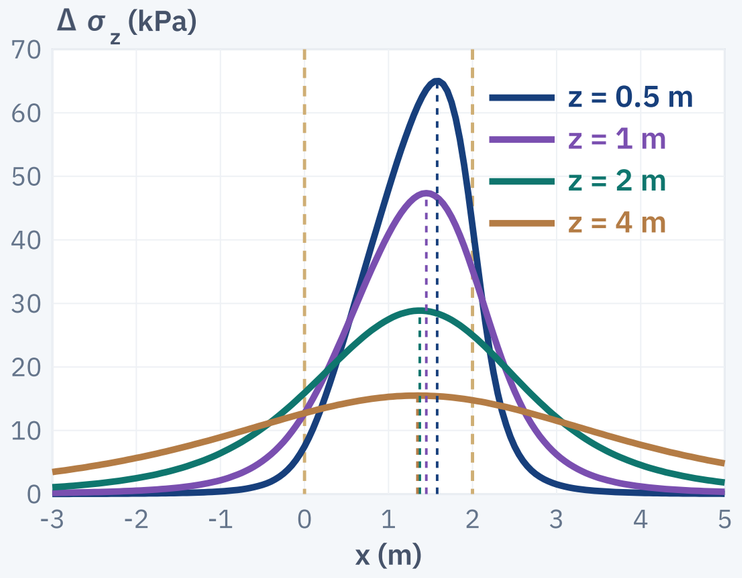
$$\alpha = \tan^{-1}\frac{1.333}{2} - \tan^{-1}\frac{-0.667}{2} = 0.9098$$

$$\delta = -0.3218 \;\Rightarrow\; \sin 2\delta = -0.6000$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[(1.333)(0.9098) - (-0.6000)\right] = 0.2885$$

$$\Delta\sigma_z = \mathbf{28.85}\ \text{kPa}$$

z = 2 mでは曲線のピークは28.87 kPaである；荷重の図心直下の値（28.85 kPa）はそれに非常に近い。



解答 (3/3)

解答

z (m)	2z/B	ピーク：x (m)	頂点：2x/B	ピーク：Δ σ_z (kPa)	頂部：Δ σ_z/q
0.5	0.5	1.579	1.579	**65.04**	0.6504
1	1	1.450	1.450	**47.36**	0.4736
2	2	1.372	1.372	**28.87**	0.2887
4	4	1.344	1.344	**15.49**	0.1549
8	8	1.336	1.336	**7.90**	0.0790

ピークは地表面付近の高い側の縁のやや内側（2x/B ≈ 1.58）から始まり、深くなるにつれて**載荷の図心**（2x/B = 1.333）に近づく：z = 8 mでは1.336である。ピーク値は深さとともに**減少**する：65.0 kPa → 7.9 kPa。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

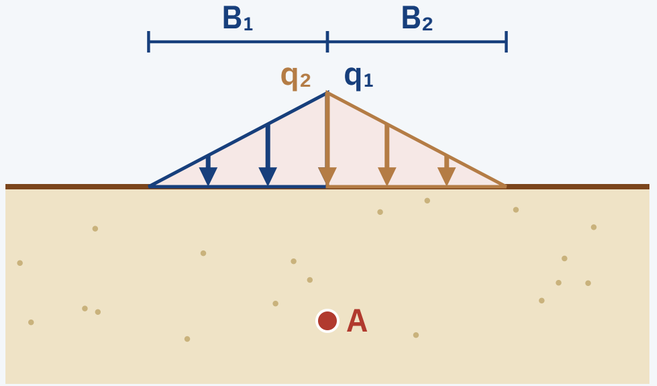
例題

与条件

1番目の帯状部分	$q_1 = 100$ kN/m²、$B_1 = 2$ m、左端$x_{L1} = 0$、左端でゼロ（0 … 2 m）
2番目の帯状部分	$q_2 = 100$ kN/m²、$B_2 = 2$ m、左端$x_{L2} = 2$ m、右側でゼロ（2 … 4 m）。2つの帯状荷重は$x = 2$で合流する
点	$z = 1.5$ mは$x = 2$ m（天端の下方）および$x = 0$（左側のゼロ端）；$x = 0 \dots 5$ m

求めるもの

$\Delta\sigma_z$の和を2点で手計算；対称な荷重による応力が**対称**であることを示す。



解答 (1/2)

解答

1 頂部の下方（x = 2 m）：両帯状荷重とも自身の高い側の縁にある

$$x_1 = 2 - 0 = 2\ \text{m} \qquad x_2 = x_{L2} + B - x_A = 2 + 2 - 2 = 2\ \text{m}$$

$$\Delta\sigma_{z(1)} = \Delta\sigma_{z(2)} = 29.52\ \text{kPa}\ \ (\text{例題2}) \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_z = \mathbf{59.03}\ \text{kPa}$$

2 左側のゼロ縁の下方（x = 0）

$$x_1 = 0 - 0 = 0 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z(1)} = 15.28\ \text{kPa}\ \ (\text{例題2})$$

$$x_2 = 2 + 2 - 0 = 4\ \text{m} \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z(2)} = 2.85\ \text{kPa};\qquad \Delta\sigma_z = 15.28 + 2.85 = \mathbf{18.13}\ \text{kPa}$$

頂点の下で応力**59.03 kPa**、左のゼロ端の下で**18.13 kPa**。モジュールは両方の帯状荷重に対して同じ値を与える。

解答 (2/2)

解答

x (m)	第1帯 (kPa)	第2帯 (kPa)	合計 (kPa)
0	15.28	2.85	**18.13**
1	33.41	10.10	**43.50**
2	29.52	29.52	**59.03**
3	10.10	33.41	**43.50**
4	2.85	15.28	**18.13**
5	0.97	4.47	**5.44**

合計は盛土の軸（x = 2 m）に関して**対称**である：x = 0およびx = 4 mで18.13 kPa、x = 1およびx = 3 mで43.50 kPa。二つの帯状基礎の値は互いに鏡像である：第1の帯状基礎のxにおける値は、第2の帯状基礎の4 – xにおける値に等しい。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

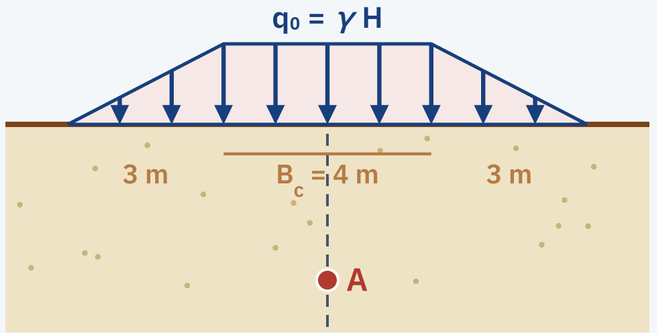
例題

与条件

盛土	天端幅$B_c = 4$ m（$x = -2 \ldots 2$）、両側の斜面は水平幅3 m + 3 m；$q_0 = \gamma H = 100$ kN/m²
風化	等分布帯状$B = 4$ m（鉛直帯状解）＋2つの三角形分布帯状$B = 3$ m（外側縁でゼロ）
点A	軸直下$x = 0$、$z = 3$ m

求めるもの

3部分の分担と**合計Δ σ_z**；深さ方向の分布、および同じ荷重を単一の広い等分布帯状荷重として計算した場合との比較。



解答 (1/3)

解答

1 等分布（頂部）部分：x = 0, b = 2 m, z = 3 m

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{b}{z} + \frac{bz}{b^2+z^2}\right] = \frac{2}{\pi}\left[0.5880 + 0.4615\right] = 0.6682 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_{z,c} = \mathbf{66.82}\ \text{kPa}$$

2 左斜面：ゼロ縁 x = −5 m、B = 3 m；Aについては x = 0 − (−5) = 5 m

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{5}{3} - \tan^{-1}\frac{5-3}{3} = 0.4424 \qquad \delta = 0.5880 \;\Rightarrow\; \sin 2\delta = 0.9231$$

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{1}{2\pi}\left[(3.333)(0.4424) - (0.9231)\right] = 0.0878 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_{z,s} = \mathbf{8.78}\ \text{kPa}$$

右側の斜面は鏡像であるため、Aに対して同じ値を与える：$x = x_L + B - x_A = 2 + 3 - 0 = 5$ m。合計：66.82 + 2(8.78) = **84.37 kPa**。モジュールの等分布帯状荷重と三角形分布荷重の解は同じ値を与える。

解答 (2/3)

解答

x (m)	頂点 (kPa)	左斜面	右斜面	合計
0	66.82	8.78	8.78	**84.37**
1	60.71	4.57	16.15	**81.43**
2	44.80	2.44	25.00	**72.24**
5	7.72	0.51	15.92	**24.15**
8	1.51	0.16	2.49	**4.16**

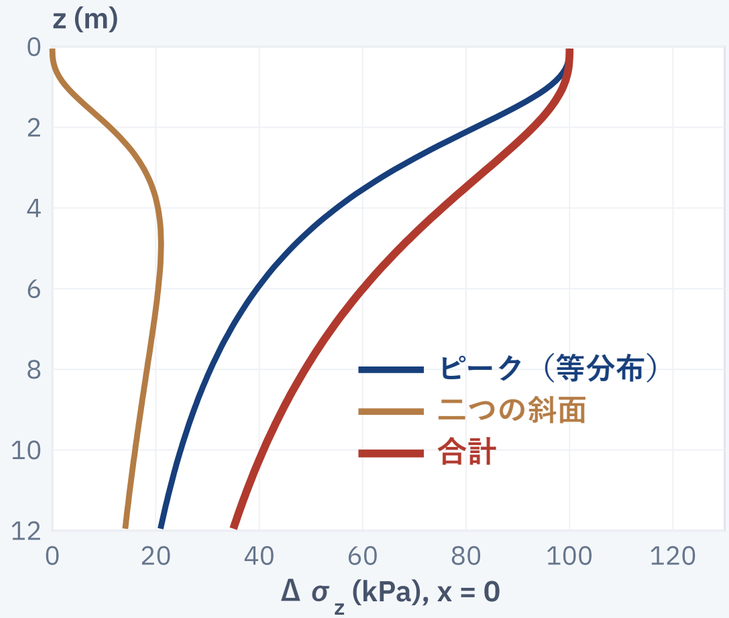
z = 3 mの深さで、盛土下の応力は軸上で**84.37 kPa**、斜面のつま先（x = 5 m）で**24.15 kPa**、つま先から3 m外側（x = 8 m）で**4.16 kPa**である。右側の点（x > 0）では右斜面が、左側の点では左斜面が支配的であり、対称軸（x = 0）を**対称軸**とみなす。

解答 (3/3)

解答

z (m)	ピーク（等分布）	二つの斜面	盛土の重ね合わせ	単一帯状荷重（B = 10 m）
1	95.95	2.79	**98.73**	99.68
2	81.83	11.13	**92.96**	97.73
3	66.82	17.55	**84.37**	93.68
4	54.98	20.42	**75.40**	88.10
6	39.58	20.48	**60.06**	75.54
8	30.58	18.30	**48.87**	64.17
12	20.84	14.04	**34.88**	47.74

地表では応力q_0は100 kPaに近い。深くなるにつれて盛土頂部の寄与は減少し、**法面の寄与**が増大する（z = 4 – 6 mで最大、20.5 kPa）。同じ荷重が単一の広い等分布帯状荷重（B = 10 m）であれば、z = 6 mで75.5 kPaとなる：3つの三角形法面が荷重の半分を負担する。



GeoTervaで解答を確認する ↗

まとめ

ポイントのまとめ

角度形式：$\Delta\sigma_z = (q/2\pi)[(2x/B)\,\alpha - \sin 2\delta]$；$\alpha = \tan^{-1}(x/z) - \tan^{-1}[(x-B)/z]$、$\delta = \tan^{-1}[(x-B)/z]$；xはゼロ側の端部から測り、高い側の端部が+x側にあればδは負となる；結果はすべてのxについて成立する

例題（q = 100 kPa、B = 2 m、A：x = −1、z = 1.5 m）：α = 29.74°（0.5191 rad）、δ = -63.43° → $\Delta\sigma_z/q$ = **0.0447**、**$\Delta\sigma_z$ = 4.47 kPa**。鏡像の帯状荷重でも同じ値となる。

両端（z = 1.5 m）：荷重の大きい側の端の下で29.52 kPa、ゼロ側の端の下で15.28 kPa。**ピーク**は深くなるにつれて減少し、荷重の図心（x = 2B/3）へ移動する

重ね合わせ：軸対称に鏡像配置した2本の帯状荷重は三角形を与える（頂部直下で59.03 kPa）；等分布帯状荷重と2つの三角形盛土が盛土を形成する（軸直下z = 3 mで84.37 kPa）

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

注記

数値例はすべてモジュール自身の計算エンジンで生成した。モジュールは同じ値を与える。モジュールはq = 100 kN/m²、B = 2 m、A（x = −1 m、z = 1.5 m）で開く。ゼロ側の縁が右にある帯状載荷は、この帯状載荷の鏡像である。

GeoTerva

オンライン地盤工学計算

理論から実務へ

自身の三角形帯状荷重（q、B、左端、方向）と点AをGeoTervaに入力する。モジュールは応力、等応力曲線、深さ方向分布、手順ごとの解答、レポートをまとめて与える。

モジュールを開く →

理論ページ →

スマートフォンで開く

お試しモジュールは登録不要です。

講義で使用したい場合：info@geoterva.com