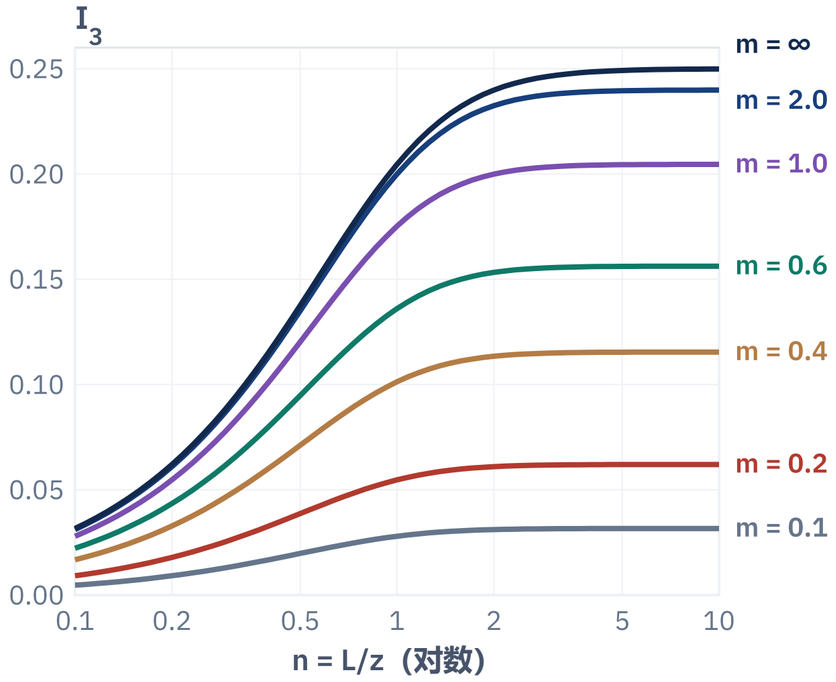
GeoTerva

岩土工程讲义 · 土体中的应力

矩形荷载下的应力

讲义：矩形荷载下的竖向应力；角点解、叠加原理及手算算例。

角点下方 · I_3 | 四个矩形 | 中心下方 · I_4 | 计算点位于荷载之外 | 多个矩形



本讲内容

均布荷载作用下**矩形面积**（基础、筏板、楼板）下方的竖向应力增量：$\Delta\sigma_z$

角点下方的**闭合解**：$\Delta\sigma_z = q\, I_3$，I_3仅取决于$m = B/z$和$n = L/z$

对于**任意一点**，采用矩形的**叠加与相减**：将荷载划分为四个矩形，其公共角点位于该点上方

中心点正下方直接用I_4；对正方形验算$I_4 = 4\, I_3(1, 1) = 0.701$

多个矩形的应力**可以叠加**；矩形形状(L/B)的影响

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：公式及其依据

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

算例：3 m × 2 m矩形，q = 150 kN/m²；A′点位于短边外侧1 m处，在其中一条长边的延长线上；z = 4 m。

均布荷载作用下的矩形

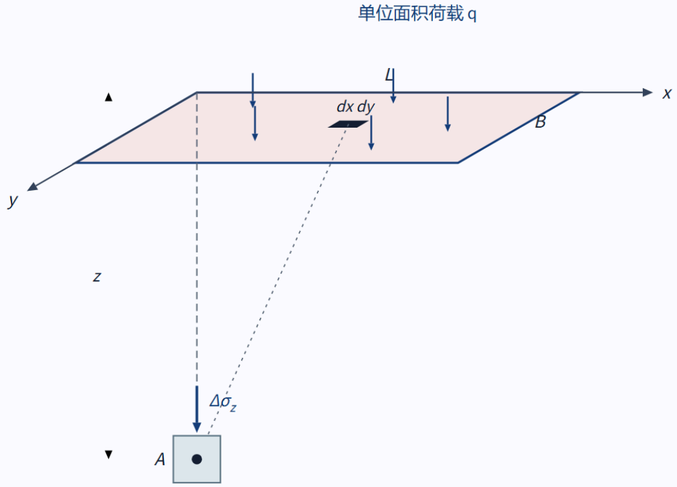
理论

大多数基础和筏板为**矩形**；将Boussinesq解在矩形上积分后，可得到**角点下方**竖向应力的闭式解

对于其他所有点，矩形**相加和相减**

承受均布压力**q**、尺寸为**L × B**的柔性矩形；土体为均质、各向同性的线弹性半无限体

$\Delta\sigma_z$仅为该荷载引起的应力增量



Boussinesq积分：$\Delta\sigma_z = q\, I_3$

理论

微元面积承担荷载**dq = q dx dy**；在Boussinesq公式中取P = q dx dy，$r^2 = x^2 + y^2$

$$d\sigma_z = \frac{3q\,dx\,dy\,z^3}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$\Delta\sigma_z = \int_0^B\int_0^L \frac{3q\,z^3\,dx\,dy}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} = q\,I_3$$

m = B/z和n = L/z；I_3仅取决于这两个比值

影响系数I_3

理论

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1}+\tan^{-1}\left(\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2-m^2n^2+1}\right)\right]$$

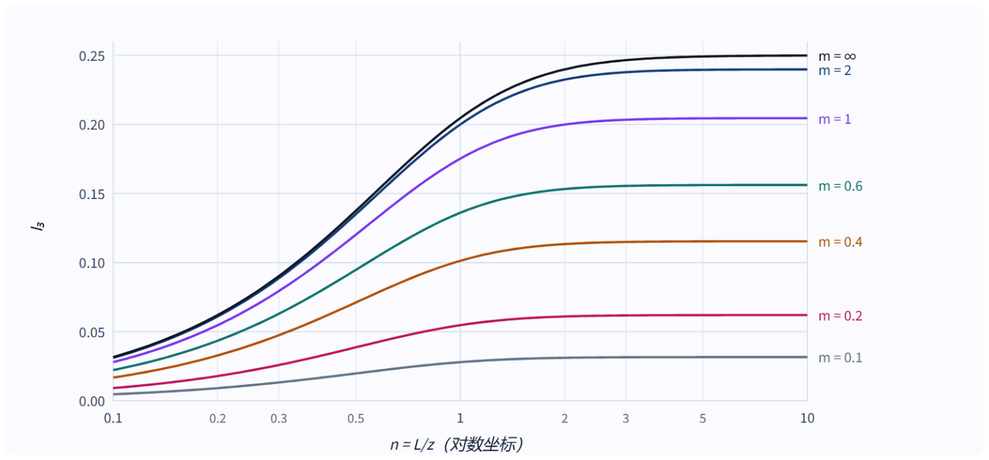
反正切应为以弧度计的**正**角：当$m^2 + n^2 + 1 < m^2n^2$时结果为负，此时**加上π**

I_3关于m和n**对称**；对于很大的矩形，其值趋近**1/4**：一个角点承担无限大面积荷载的四分之一

I_3值

理论

n \ m	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	3.0
0.10	0.0047	0.0092	0.0198	0.0279	0.0311	0.0315
0.25	0.0113	0.0220	0.0475	0.0674	0.0752	0.0761
0.50	0.0198	0.0387	0.0840	0.1202	0.1350	0.1368
1.00	0.0279	0.0547	0.1202	0.1752	0.1999	0.2034
2.00	0.0311	0.0610	0.1350	0.1999	0.2325	0.2378
5.00	0.0316	0.0620	0.1374	0.2044	0.2395	0.2461



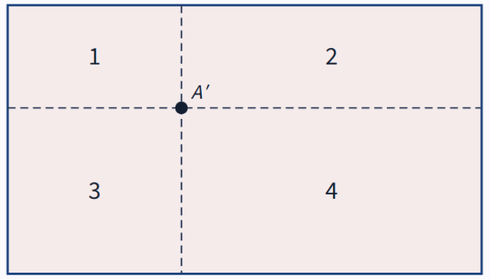
四个角点矩形

理论

$$\Delta\sigma_z = q\left[I_{3(1)} + I_{3(2)} + I_{3(3)} + I_{3(4)}\right]$$

将受荷面积划分为以A′点上方的点为**公共角点**的矩形；将各角点应力叠加

若点A′位于荷载面积**之外**，则部分矩形延伸到荷载面积以外并被**扣除**；模块在每个点处按带符号的距离，从该点向荷载面的角点作出四个矩形，每个I_3取其两边乘积的符号



荷载区域平面图；
A′ 为全部 4 个
矩形 1–4 的公共角点

中心下方：I_4

理论

$$\Delta\sigma_z = q\,I_4, \quad I_4 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{m_1 n_1}{\sqrt{1+m_1^2+n_1^2}}\,\frac{1+m_1^2+2n_1^2}{(1+n_1^2)(m_1^2+n_1^2)} + \sin^{-1}\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\,\sqrt{1+n_1^2}}\right]$$

中心点下方的四个矩形**相等**；可直接写出结果：**m_1 = L/B**，**n_1 = z/b**，b = B/2 (L ≥ B)

对于深度z = b处的正方形，**I_4 = 0.701 = 4 I_3(1, 1)**

叠加原理

理论

每个矩形由各自的**q, L, B**和其在地面上的中心(x_c, y_c)确定（模块中最多八个）

两个矩形**可共用一条边，但不得重叠**

由于土体为弹性体，各矩形的应力由其自身的**四个角点矩形**求得，再将各应力叠加

$$\Delta\sigma_z = \sum_k q_k \sum \pm I_3 \quad \text{（四个角点）}$$

题目

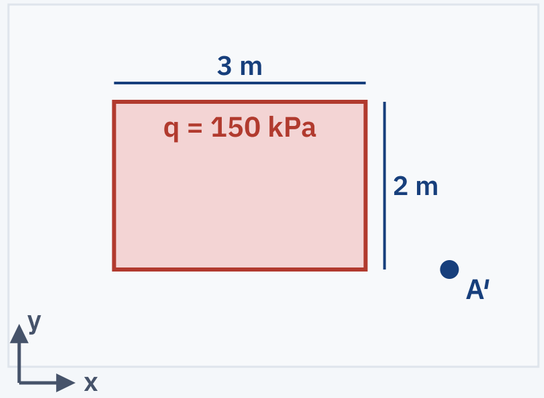
算例

已知条件

矩形	3×2 m（$L = 3$ m，沿x方向；$B = 2$ m，沿y方向），$q = 150$ kN/m²，中心位于原点
A′点	短边之外1 m，位于其中一条长边的延长线方向上：$x = 2.5$ m，$y = -1$ m；$z = 4$ m

求

$\Delta\sigma_z$：采用四角点矩形法；详细计算其中两个I_3值。



解答 (1/3)

解答

1 A′至荷载四个角点的标注距离(z = 4 m)

角点(x; y)	$a = x - x_{A'}$	$b = y - y_{A'}$	$m = \lvert a\rvert/z$	$n = \lvert b\rvert/z$	符号
(1.5; 1.0)	−1.0	2.0	0.25	0.50	−
(1.5; -1.0)	−1.0	0.0	0.25	0.00	0 (b = 0)
(-1.5; 1.0)	−4.0	2.0	1.00	0.50	+
(-1.5; -1.0)	−4.0	0.0	1.00	0.00	0 (b = 0)

2 剩余两个矩形：A′为公共角点

$$\Delta\sigma_z = q\,[I_3(0.5;\,1) - I_3(0.25;\,0.5)] \qquad 4\ \text{m} \times 2\ \text{m} \;-\; 1\ \text{m} \times 2\ \text{m}$$

b = 0的两个角点不产生贡献。对于**4 m × 2 m**的矩形，m = B/z = 2/4 = 0.5；n = L/z = 4/4 = 1；对于**1 m × 2 m**的矩形，m = 1/4 = 0.25；n = 2/4 = 0.5。由于I_3具有对称性，(1; 0.5)与(0.5; 1)相同。

解答 (2/3)

解答

插值	$I_3(0.5; 1)$	$I_3(0.25; 0.5)$
m ; n	0.50 ; 1.00	0.25 ; 0.50
m^2 ; n^2	0.2500 ; 1.0000	0.0625 ; 0.2500
$S_1 = m^2 + n^2 + 1$	2.2500	1.3125
$\sqrt{S_1}$	1.5000	1.1456
$2mn\sqrt{S_1}$	1.5000	0.2864
$S_2 = m^2 + n^2 + m^2n^2 + 1$	2.5000	1.3281
$(m^2 + n^2 + 2)/S_1$	1.4444	1.7619
第1项为$2mn\sqrt{S_1} / S_2 \cdot (m^2 + n^2 + 2)/S_1$	0.8667	0.3800
$D = m^2 + n^2 + 1 - m^2n^2$	2.0000	1.2969
$2mn\sqrt{S_1} / D$	0.7500	0.2208
$\tan^{-1}(\dots)$ (rad)	0.6435	0.2174
I_3 = (第1项+$\tan^{-1}$)/(4π)	**0.12018**	**0.04753**

$I_3(0.5; 1) = 0.12018$和$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753$。两个角度下均有$D > 0$，故反正切值为正；无需加π。

解答 (3/3)

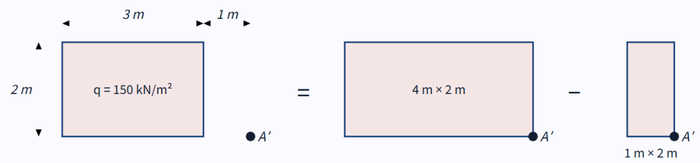
解答

3 差值与应力

$$\Delta\sigma_z = 150\,(0.12018 - 0.04753) = 150\,(0.07264)$$

$$\Delta\sigma_z = 18.03 - 7.13 = \mathbf{10.90}\ \text{kPa}$$

A′点处**$\Delta\sigma_z$ = 10.90 kPa**($\Delta\sigma_z/q$ = 0.07264)。模块以此算例打开；若将矩形与计算点一同平移相同的距离（中心4; 3 m，点6.5; 2 m），应力不变：10.90 kPa。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

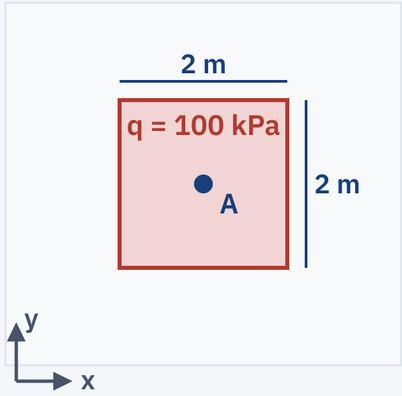
已知条件

(a)正方形 2×2 m，$q = 100$ kN/m²；中心下方 $z = 1$ m $(n_1 = z/b = 1)$

(b)矩形 3×2 m，$q = 150$ kN/m²；中心下方 $z = 4$ m $(m_1 = L/B = 1.5;\ n_1 = 4)$

求

(a)验算$I_4 = 4\,I_3(1, 1)$；(b)求I_4和$\Delta\sigma_z$；与四个角点之和对比。



解答 (1/2)

解答

1 四个相等的矩形（每个1 m × 1 m，z = 1 m）：$I_3(1, 1)$；$S_1 = 3$，$\sqrt{S_1} = 1.7321$，$2mn\sqrt{S_1} = 3.4641$，$S_2 = 4$

$$\text{第1项} = \frac{3.4641}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1.1547 \qquad \tan^{-1}\frac{3.4641}{3-1} = \tan^{-1}(1.7321) = 1.0472$$

$$I_3 = \frac{1.1547 + 1.0472}{4\pi} = \mathbf{0.17522}$$

2 用中心点公式验算($m_1 = 1$; $n_1 = 1$)

$$4\,I_3 = 4\,(0.17522) = 0.70089$$

$$I_4 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{4} + \sin^{-1}\frac{1}{2}\right] = \frac{2}{\pi}\,(0.5774 + 0.5236) = \mathbf{0.70089}$$

对于正方形，**$I_4 = 4\,I_3(1, 1) = 0.70089 \approx 0.701$**。在本算例中，中心下方的应力等于荷载压力的70.1% (z = b)。

解答 (2/2)

解答

1 I_4: $m_1 = L/B = 1.5$; $n_1 = z/b = 4$ ($b = 1$ m); $m_1^2 + n_1^2 = 18.25$

$$\frac{m_1 n_1}{\sqrt{1 + m_1^2 + n_1^2}} = \frac{6}{4.3875} = 1.3675 \qquad \frac{1 + m_1^2 + 2n_1^2}{(1 + n_1^2)(m_1^2 + n_1^2)} = \frac{35.25}{310.25} = 0.1136$$

$$\sin^{-1} \frac{1.5}{\sqrt{18.25}\sqrt{17}} = 0.0853 \qquad I_4 = \frac{2}{\pi}(0.1554 + 0.0853) = \mathbf{0.15320}$$

2 按$\Delta\sigma_z$与四个角点之和验算

$$\Delta\sigma_z = 150\,(0.15320) = \mathbf{22.98}\ \text{kPa} \qquad 4\,I_3(0.25;\ 0.375) = 4\,(0.03830) = 0.15320$$

中心下方**$\Delta\sigma_z$ = 22.98 kPa** ($\Delta\sigma_z/q = 0.15320$)。四个相等的角点矩形（每个1.5 m × 1 m）同样给出该结果：4 I_3(0.25; 0.375)。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

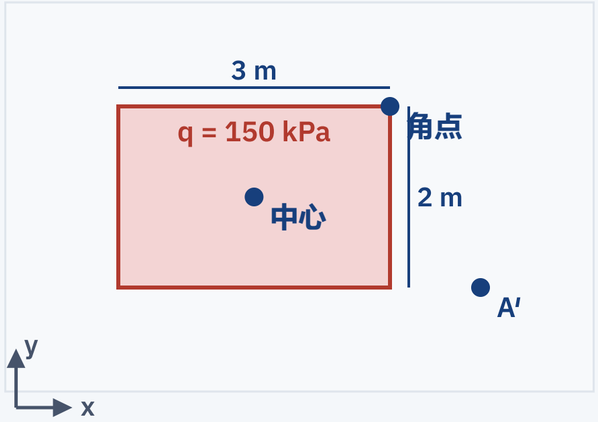
算例

已知条件

矩形	3×2 m, $q = 150$ kN/m²
点	**中心**$(0; 0)$，**角点**$(1.5;\ 1)$**及A′** $(2.5;\ -1)$
深度	$z = 1; 2; 4; 6; 8; 12$ m

求

三个点处的$\Delta\sigma_z$和$\Delta\sigma_z/q$；随深度变化规律的解释。



解答 (1/2)

解答

z (m)	中心$\Delta\sigma_z$	角点$\Delta\sigma_z$	A′ $\Delta\sigma_z$	中心/q	角点/q	A′ /q
1	116.19	35.67	5.88	0.7746	0.2378	0.0392
2	64.24	29.05	11.96	0.4283	0.1936	0.0798
4	22.98	16.06	10.90	0.1532	0.1071	0.0726
6	11.10	9.19	7.41	0.0740	0.0612	0.0494
8	6.44	5.74	5.03	0.0429	0.0383	0.0335
12	2.93	2.78	2.60	0.0195	0.0185	0.0174

在**中心点**和**角点**下方，应力随深度单调减小（z = 4 m处分别为22.98和16.06 kPa）；角点与中心点的应力比在z = 4 m处为0.70，在z = 12 m处为0.95。**A′**点（位于荷载区之外）在z = 1 m处为5.88 kPa，在z ≈ 2.50 m处达到最大值(12.64 kPa)，随后减小。

解答 (2/2)

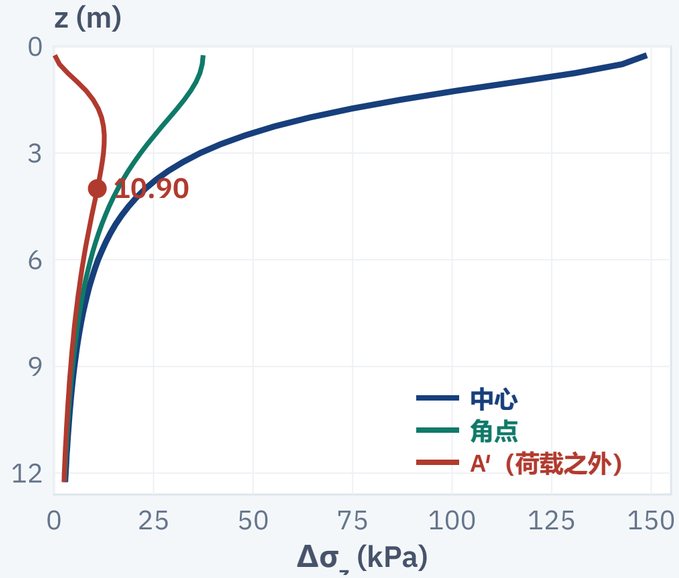
解答

1 z = 4 m所在行：三个点

中心：　$150\,(0.15320) = 22.98$ kPa

角点：　$150\,I_3(0.5;\,0.75) = 16.06$ kPa　　A′：　10.90 kPa

靠近地表处，中心下方的值趋于≈ q，角点下方的值趋于≈ q/4；在深处三条曲线趋于接近：z = 12 m时分别为2.93、2.78和2.60 kPa。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

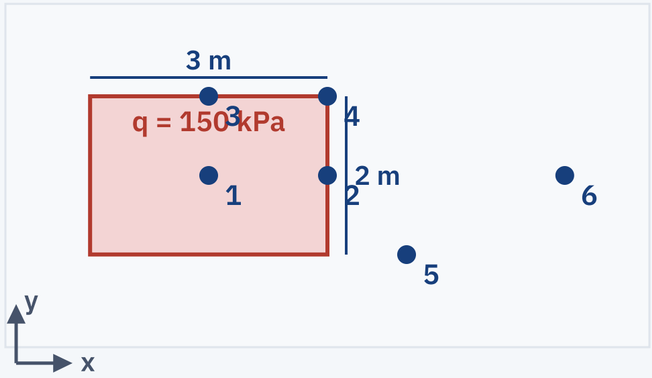
求

各点处带符号的I_3项、总和以及$\Delta\sigma_z$。

已知条件

矩形　3×2 m, $q = 150$ kN/m², $z = 4$ m

点　**(1)中心；(2)短边中点；(3)长边中点；(4)角点；(5) A′；(6)** $(4.5;\ 0)$



解答 (1/2)

解答

点	(x; y)	项1	项2	项3	第4项	$\Sigma \pm I_3$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1	(0.0; 0)	0.0383	0.0383	0.0383	0.0383	0.1532	**22.98**
2	(1.5; 0)	0	0	0.0603	0.0603	0.1205	**18.08**
3	(0.0; 1)	0	0.0675	0	0.0675	0.1351	**20.26**
4	(1.5; 1)	0	0	0	0.1071	0.1071	**16.06**
5	(2.5; -1)	−0.0475	0	0.1202	0	0.0726	**10.90**
6	(4.5; 0)	−0.0603	−0.0603	0.0733	0.0733	0.0261	**3.91**

在内部点(1)，四项均为+；在边缘点(2, 3)，有两项为零；在角点(4)，仅剩一项；在荷载面之外(5, 6)，部分项变为−。顺序：22.98 > 18.08 > 20.26 > 16.06 > 10.90 > 3.91 kPa。

解答 (2/2)

解答

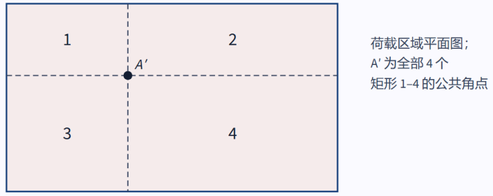
1 角点(4)：仅一个矩形(3 m × 2 m)

$$\Delta\sigma_z = q\, I_3(m = 0.5;\, n = 0.75) = 150\,(0.10707) = \mathbf{16.06}\ \text{kPa}$$

2 远点(6)：(4.5; 0)，荷载以外3 m处

$$\Delta\sigma_z = q \cdot 2\,[\,I_3(1.5;\, 0.25) - I_3(0.75;\, 0.25)\,]$$
$$= 150 \cdot 2\,(0.07329 - 0.06026) = \mathbf{3.91}\ \text{kPa}$$

角点/中心点应力比为0.699；距荷载3 m处(6)仍有3.91 kPa：荷载范围之外应力同样不为零。



荷载区域平面图；A′ 为全部 4 个矩形 1–4 的公共角点

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

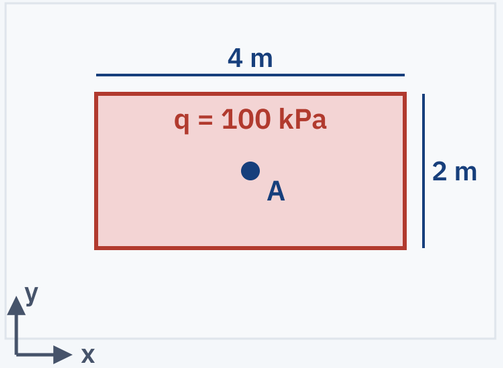
算例

已知条件

矩形	$B = 2\,\text{m}\ (b = 1\,\text{m})$，$L/B = 1$；$2$；$5$；$10$**和** $L \to \infty$ **（条形）**
点	**中心点下方，** $n_1 = z/b = 0.5$；1；2；4

求

中心下方$\Delta\sigma_z/q = I_4$；与条形荷载的比较。



解答 (1/2)

解答

$n_1 = z/b$	L/B = 1	L/B = 2	L/B = 5	L/B = 10	条形(L/B → ∞)
0.5	0.9299	0.9565	0.9594	0.9595	**0.9595**
1.0	0.7009	0.7998	0.8176	0.8183	**0.8183**
2.0	0.3361	0.4807	0.5451	0.5495	**0.5498**
4.0	0.1081	0.1901	0.2848	0.3034	**0.3058**

靠近地表($n_1 = 0.5$)时形状影响不大(0.930 – 0.959)；在深处，**短**矩形下的应力衰减快得多：$n_1 = 4$时，方形为0.108，条形为0.306。

解答 (2/2)

解答

1 I_4公式(m_1 = 2; n_1 = 1)

$$m_1^2 + n_1^2 = 5 \qquad \frac{m_1 n_1}{\sqrt{1+5}} = \frac{2}{2.4495} = 0.8165 \qquad \frac{1+4+2}{(1+1)(5)} = 0.70$$

$$\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = 0.6847 \qquad I_4 = \frac{2}{\pi}(0.5715 + 0.6847) = \mathbf{0.79976}$$

2 用四个相同的角点矩形（各为2 m × 1 m，z = 1 m）

$$4\,I_3(1;\,2) = 4\,(0.19994) = \mathbf{0.79976}$$

L/B = 2的矩形中心处、深度z = b处，**$\Delta\sigma_z/q$ = 0.7998**（正方形：0.7009；条形：0.8183）。

L/B = 10时(n_1 = 1)，数值为0.81826，条形为0.81831：矩形越长，越趋近于条形。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

矩形1	3×2 m，$q = 150$ kN/m²，中心$x = 0$
矩形2	3×2 m，$q = 150$ kN/m²，中心$x = 5$ m（$y = 0$）
点	A′：$x = 2.5$ m，$y = -1$ m；$z = 4$ m（另有1；2；6；8；12 m）

求

各矩形及合计的$\Delta\sigma_z$；沿深度分布。



解答 (1/2)

解答

1 矩形2：相对于A′标注的角点（两中心间距5 m ≥ $(L_1 + L_2)/2$ = 3 m：无重叠）

角点(x; y)	a	b	m	n	符号
(6.5; 1.0)	4.0	2.0	1.00	0.50	+
(6.5; -1.0)	4.0	0.0	1.00	0.00	0 (b = 0)
(3.5; 1.0)	1.0	2.0	0.25	0.50	−
(3.5; -1.0)	1.0	0.0	0.25	0.00	0 (b = 0)

2 叠加原理

$$\Delta\sigma_{z(2)} = 150\,[I_3(1;\,0.5) - I_3(0.25;\,0.5)] = 10.896 \text{ kPa}$$

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 10.896 + 10.896 = \mathbf{21.793} \text{ kPa}$$

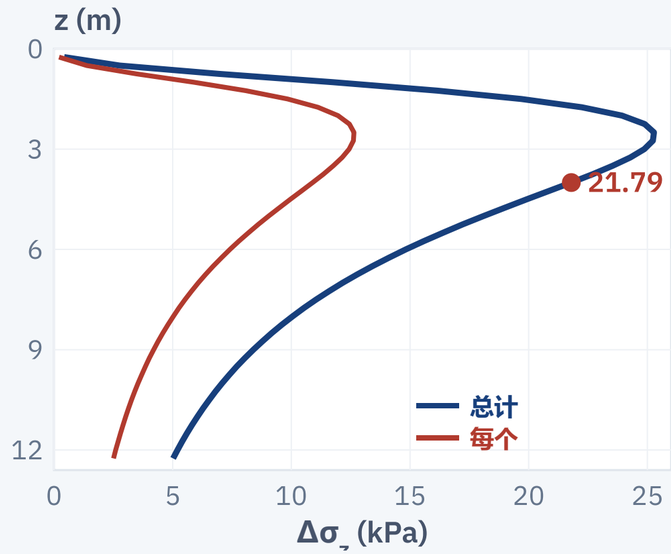
A′恰位于两个矩形的正中间（x = 2.5 m；距各矩形1 m）：矩形2是矩形1的**镜像**，产生相同的应力。总计**$\Delta\sigma_z$ = 21.79 kPa**。

解答 (2/2)

解答

z (m)	矩形1	矩形2	总计
1	5.877	5.877	**11.754**
2	11.965	11.965	**23.930**
4	10.896	10.896	**21.793**
6	7.413	7.413	**14.826**
8	5.028	5.028	**10.056**
12	2.603	2.603	**5.205**

在z = 4 m处，应力总和为**21.79 kPa**；由于两个矩形对称，任一深度处的总和均为单个矩形值的2倍。总和的最大值出现在z ≈ 2.50 m处，为25.28 kPa。



在GeoTerva中验算解答 ↗

小结

要点回顾

角点： $\Delta\sigma_z = q\, I_3(m, n)$，$m = B/z$，$n = L/z$；对于大面积，$I_3 \to 1/4$。**任意点：** 带正负号的四角点矩形叠加，$\Delta\sigma_z = q\, \Sigma \pm I_3$

算例(A′; z = 4 m)： 4 m × 2 m − 1 m × 2 m：$I_3(0.5; 1) = 0.12018$；$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753$；**$\Delta\sigma_z$ = 150 (0.07264) = 10.90 kPa**

中心： $\Delta\sigma_z = q\, I_4$；正方形，z = b：$I_4 = 4\, I_3(1, 1) = 0.701$；3 × 2 m矩形，z = 4 m：**22.98 kPa**

位置(z = 4 m)： 中心22.98，边中点20.26和18.08，角点16.06，A′ 10.90，远点3.91 kPa；荷载范围之外的应力同样不为零

形状： 在z = 4b处，正方形为0.108 q，10:1矩形为0.303 q，条形为0.306 q。**两个矩形：** 应力叠加(10.90 + 10.90 = 21.79 kPa)

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Gauthier-Villars, Paris.

注

全部数值算例均由模块自身的计算引擎生成；模块给出相同的数值。模块打开时默认为3 m × 2 m矩形(q = 150 kN/m²)和A′点(x = 2.5 m; y = −1 m; z = 4 m)。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入自定义的各矩形（q、L、B、中心）、A点和深度；模块一并给出四个角点项、$\Delta\sigma_z$值、等应力线、沿深度分布曲线、逐步解答和报告。

打开模块→

理论页面 →

用手机打开

试用模块无需注册。

如需在课堂教学中使用：info@geoterva.com