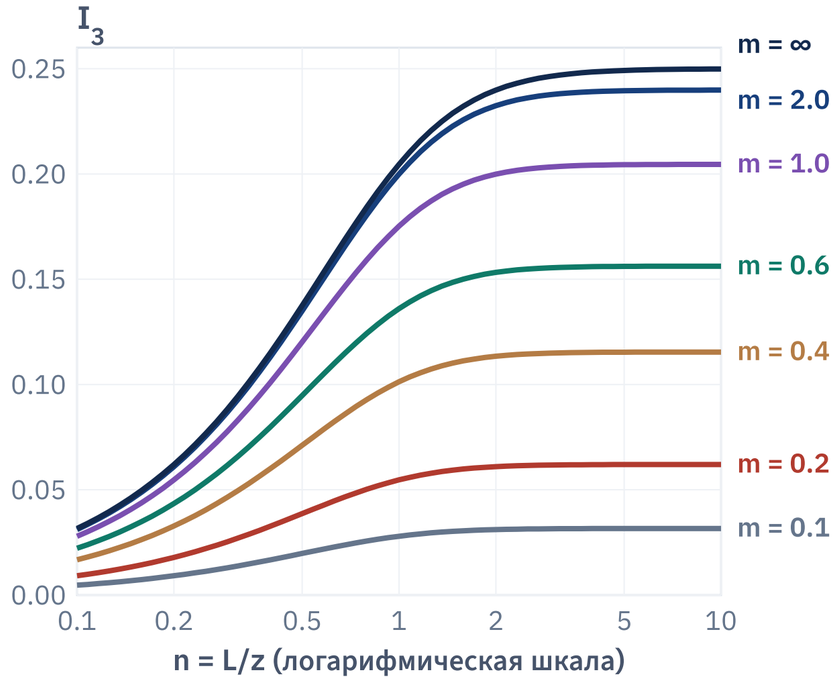
GeoTerva

Презентация к лекции по геотехнике · Напряжения в грунтовом массиве

Напряжение под прямоугольной нагрузкой

Лекция: вертикальное напряжение под прямоугольной нагрузкой; решение для угла, суперпозиция и примеры, решаемые вручную.

Под углом · I_3 | Четыре прямоугольника | Под центром · I_4 | Точка вне нагрузки | Несколько прямоугольников



Что мы изучим на этой лекции?

Приращение вертикального напряжения под **прямоугольной площадью** с равномерно распределённой нагрузкой (фундамент, фундаментная плита, перекрытие): $\Delta\sigma_z$

Замкнутое решение под углом прямоугольника: $\Delta\sigma_z = q\, I_3$, I_3 зависит только от $m = B/z$ и $n = L/z$

Для **произвольной точки** — **сложение и вычитание** прямоугольников: нагрузка делится на четыре прямоугольника с общим углом над точкой

Под центром — непосредственно по I_4; для квадрата проверка $I_4 = 4\, I_3(1, 1) = 0.701$

Понимание того, что напряжения от нескольких прямоугольников **суммируются**; влияние формы прямоугольника (L/B)

ХОД ЛЕКЦИИ

Каждая тема излагается **в три шага**:

1 · **Теория**: формула и обоснование

2 · **Условие**: дано и требуется определить

3 · **Решение**: пошагово, с числами

Пример: прямоугольник 3 m × 2 m, q = 150 kN/m²; точка A′ расположена на 1 m за короткой стороной, на продолжении одной из длинных сторон; z = 4 m.

Прямоугольная площадь с равномерно распределённой нагрузкой

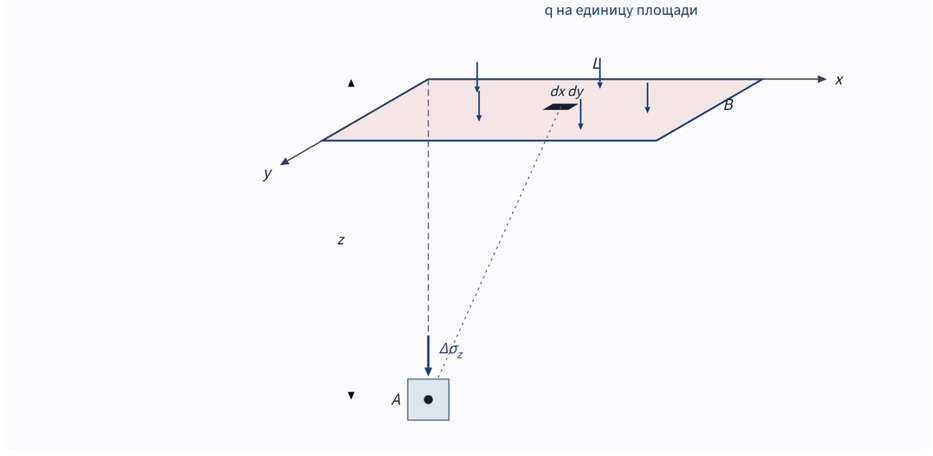
ТЕОРИЯ

Большинство фундаментов и фундаментных плит **прямоугольны**; при интегрировании решения Boussinesq по прямоугольнику вертикальное напряжение **под углом** находится в замкнутом виде

Для всех остальных точек прямоугольники **складываются и вычитаются**

Гибкий прямоугольник размерами **L × B** с равномерно распределённым давлением **q**; грунт — однородное, изотропное, линейно-упругое полупространство

$\Delta\sigma_z$ — приращение напряжения, вызванное только нагрузкой



Интеграл Boussinesq: $\Delta\sigma_z = q\, I_3$

ТЕОРИЯ

Элементарная площадка несёт нагрузку **dq = q dx dy**; в уравнение Boussinesq подставляются P = q dx dy и r² = x² + y²

$$d\sigma_z = \frac{3q\,dx\,dy\,z^3}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$\Delta\sigma_z = \int_0^B\int_0^L \frac{3q\,z^3\,dx\,dy}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} = q\,I_3$$

m = B/z и **n = L/z**; I_3 зависит только от этих двух отношений

Коэффициент влияния I_3

ТЕОРИЯ

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1} + \tan^{-1}\left(\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2-m^2n^2+1}\right)\right]$$

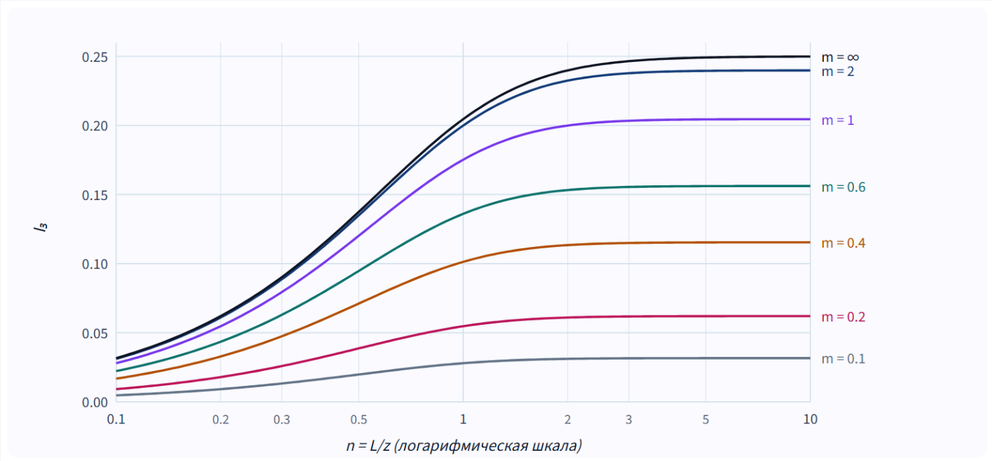
Арктангенс должен быть **положительным** углом в радианах: при $m^2 + n^2 + 1 < m^2n^2$ он получается отрицательным, и тогда **добавляется π**

I_3 **симметричен** относительно m и n; для очень большого прямоугольника он стремится к **1/4**: один угол несёт четверть нагрузки бесконечной площади

Значения I_3

ТЕОРИЯ

n \ m	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	3.0
0.10	0.0047	0.0092	0.0198	0.0279	0.0311	0.0315
0.25	0.0113	0.0220	0.0475	0.0674	0.0752	0.0761
0.50	0.0198	0.0387	0.0840	0.1202	0.1350	0.1368
1.00	0.0279	0.0547	0.1202	0.1752	0.1999	0.2034
2.00	0.0311	0.0610	0.1350	0.1999	0.2325	0.2378
5.00	0.0316	0.0620	0.1374	0.2044	0.2395	0.2461



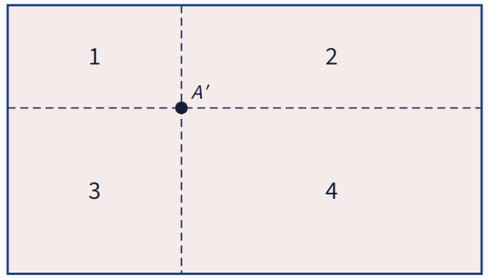
Прямоугольник по четырём углам

ТЕОРИЯ

$$\Delta\sigma_z = q\left[I_{3(1)} + I_{3(2)} + I_{3(3)} + I_{3(4)}\right]$$

Загруженная площадь разбивается на прямоугольники, имеющие **общий угол** над точкой A′; угловые напряжения суммируются

Если A′ находится **вне** площади, часть прямоугольников выходит за пределы площади и **вычитается**; в каждой точке модуль строит четыре прямоугольника от точки до углов нагрузки с учётом знаков расстояний, и каждый I_3 принимает знак произведения двух своих сторон



план загруженной площади;
A′ является общей вершиной всех четырёх прямоугольников 1–4

Под центром: I_4

ТЕОРИЯ

$$\Delta\sigma_z = q\, I_4, \quad I_4 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{m_1 n_1}{\sqrt{1+m_1^2+n_1^2}}\,\frac{1+m_1^2+2n_1^2}{(1+n_1^2)(m_1^2+n_1^2)} + \sin^{-1}\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\,\sqrt{1+n_1^2}}\right]$$

Под центром четыре прямоугольника **равны**; результат записывается непосредственно: **m_1 = L/B**, **n_1 = z/b**, b = B/2 (L ≥ B)

Для квадрата на глубине z = b: **I_4 = 0.701 = 4 I_3(1, 1)**

Суперпозиция

ТЕОРИЯ

Каждый прямоугольник задаётся собственными **q, L, B** и центром на поверхности грунта (x_c, y_c) (в модуле — не более восьми)

Два прямоугольника **могут иметь общую сторону, но не могут перекрываться**

Так как грунт упруг, напряжение от каждого прямоугольника находится по его **четырём угловым прямоугольникам**, а напряжения суммируются

$$\Delta\sigma_z = \sum_k q_k \sum \pm I_3 \text{ (четыре угла)}$$

Условие

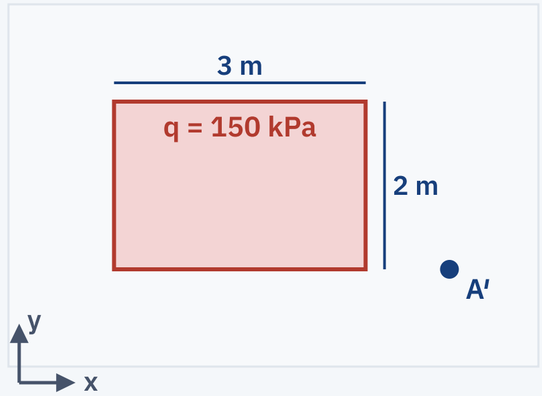
ПРИМЕР

Дано

Прямоугольный	3×2 m ($L = 3$ m в направлении x, $B = 2$ m в направлении y), $q = 150$ kN/m², центр в начале координат
Точка A′	на 1 m за короткой стороной, в направлении одной из длинных сторон: $x = 2.5$ m, $y = -1$ m; $z = 4$ m

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

$\Delta\sigma_z$ по методу четырёх угловых прямоугольников; два значения I_3 вычислить подробно.



Решение (1/3)

РЕШЕНИЕ

1 Расстояния со знаком от A′ до четырёх углов нагрузки (z = 4 m)

Угол (x; y)	a = x − $x_{A'}$	b = y − $y_{A'}$	m = |a|/z	n = |b|/z	знак
(1.5; 1.0)	−1.0	2.0	0.25	0.50	−
(1.5; -1.0)	−1.0	0.0	0.25	0.00	0 (b = 0)
(-1.5; 1.0)	−4.0	2.0	1.00	0.50	+
(-1.5; -1.0)	−4.0	0.0	1.00	0.00	0 (b = 0)

2 Остаются два прямоугольника: общий угол A′

$$\Delta\sigma_z = q\,[I_3(0.5;\,1) - I_3(0.25;\,0.5)] \qquad 4\ \text{m} \times 2\ \text{m} \;-\; 1\ \text{m} \times 2\ \text{m}$$

Два угла с b = 0 вклада не дают. Для прямоугольника **4 m × 2 m**: m = B/z = 2/4 = 0.5; n = L/z = 4/4 = 1; для прямоугольника **1 m × 2 m**: m = 1/4 = 0.25; n = 2/4 = 0.5. Поскольку I_3 симметричен, (1; 0.5) и (0.5; 1) дают одно и то же значение.

Решение (2/3)

РЕШЕНИЕ

Интерполяция	$I_3(0.5; 1)$	$I_3(0.25; 0.5)$
m ; n	0.50 ; 1.00	0.25 ; 0.50
m^2 ; n^2	0.2500 ; 1.0000	0.0625 ; 0.2500
$S_1 = m^2 + n^2 + 1$	2.2500	1.3125
$\sqrt{S_1}$	1.5000	1.1456
$2mn\sqrt{S_1}$	1.5000	0.2864
$S_2 = m^2 + n^2 + m^2n^2 + 1$	2.5000	1.3281
$(m^2 + n^2 + 2)/S_1$	1.4444	1.7619
Первое слагаемое = $2mn\sqrt{S_1} / S_2 \cdot (m^2 + n^2 + 2)/S_1$	0.8667	0.3800
$D = m^2 + n^2 + 1 - m^2n^2$	2.0000	1.2969
$2mn\sqrt{S_1} / D$	0.7500	0.2208
$\tan^{-1}(\dots)$ (rad)	0.6435	0.2174
I_3 = (1-е слагаемое + $\tan^{-1}$)/(4π)	**0.12018**	**0.04753**

$I_3(0.5; 1) = 0.12018$ и **$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753$**. Поскольку D > 0 для обоих углов, арктангенс положителен; добавлять π не требуется.

Решение (3/3)

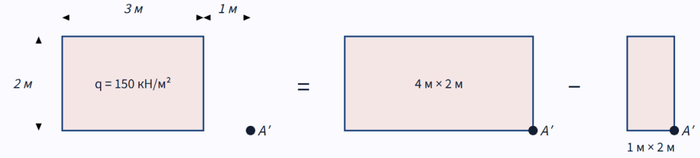
РЕШЕНИЕ

3 Разность и напряжение

$$\Delta\sigma_z = 150\,(0.12018 - 0.04753) = 150\,(0.07264)$$

$$\Delta\sigma_z = 18.03 - 7.13 = \mathbf{10.90}\ \text{kPa}$$

В точке A′ **$\Delta\sigma_z$ = 10.90 kPa** ($\Delta\sigma_z/q$ = 0.07264). Модуль открывается этим примером; если прямоугольник и точку сместить вместе на одинаковое расстояние (центр 4; 3 m, точка 6.5; 2 m), напряжение не изменится: 10.90 kPa.



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

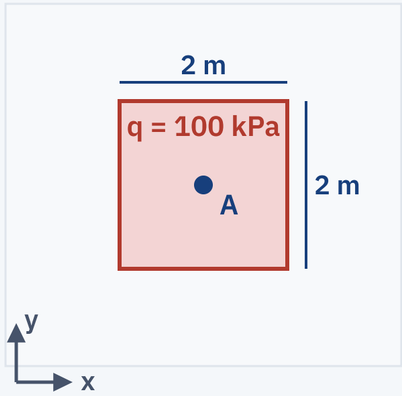
ПРИМЕР

Дано

(a) Квадрат	2×2 **m,** $q = 100$ **kN/m²; под центром** $z = 1$ **m (**$n_1 = z/b = 1$**)**
(b) Прямоугольник	3×2 **m,** $q = 150$ **kN/m²; под центром** $z = 4$ **m (**$m_1 = L/B = 1.5$**;** $n_1 = 4$**)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

(a) проверка $\mathbf{I_4 = 4\, I_3(1,\, 1)}$; (b) $\mathbf{I_4}$ и $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; сравнение с суммой по четырём углам.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Четыре равных прямоугольника (каждый 1 m × 1 m, z = 1 m): $I_3(1, 1)$; $S_1 = 3$, $\sqrt{S_1} = 1.7321$, $2mn\sqrt{S_1} = 3.4641$, $S_2 = 4$

$$\text{1-е слагаемое} = \frac{3.4641}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1.1547 \qquad \tan^{-1}\frac{3.4641}{3-1} = \tan^{-1}(1.7321) = 1.0472$$

$$I_3 = \frac{1.1547 + 1.0472}{4\pi} = \mathbf{0.17522}$$

2 Проверка по формуле для центра ($m_1 = 1$; $n_1 = 1$)

$$4\, I_3 = 4\,(0.17522) = 0.70089$$

$$I_4 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{4} + \sin^{-1}\frac{1}{2}\right] = \frac{2}{\pi}\,(0.5774 + 0.5236) = \mathbf{0.70089}$$

Для квадрата **$I_4 = 4\, I_3(1, 1) = 0.70089 \approx 0.701$**. В этом примере напряжение под центром равно 70.1% давления нагрузки (z = b).

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 I_4: m_1 = L/B = 1.5; n_1 = z/b = 4 (b = 1 m); $m_1^2 + n_1^2$ = 18.25

$$\frac{m_1 n_1}{\sqrt{1+m_1^2+n_1^2}} = \frac{6}{4.3875} = 1.3675 \qquad \frac{1+m_1^2+2n_1^2}{(1+n_1^2)(m_1^2+n_1^2)} = \frac{35.25}{310.25} = 0.1136$$

$$\sin^{-1}\frac{1.5}{\sqrt{18.25}\sqrt{17}} = 0.0853 \qquad I_4 = \frac{2}{\pi}(0.1554 + 0.0853) = \mathbf{0.15320}$$

2 Проверка по $\Delta\sigma_z$ и по сумме четырёх углов

$$\Delta\sigma_z = 150\,(0.15320) = \mathbf{22.98}\ \text{kPa} \qquad 4\,I_3(0.25;\,0.375) = 4\,(0.03830) = 0.15320$$

Под центром **$\Delta\sigma_z$ = 22.98 kPa** ($\Delta\sigma_z/q$ = 0.15320). Тот же результат дают и четыре равных угловых прямоугольника (каждый 1.5 m × 1 m): 4 I_3(0.25; 0.375).

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

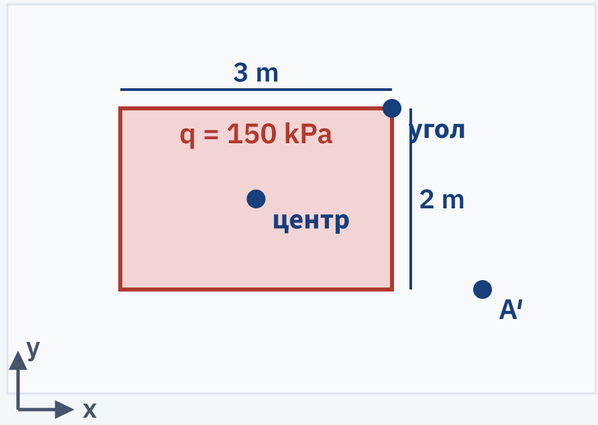
ПРИМЕР

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

$\Delta\sigma_z$ и $\Delta\sigma_z/q$ в трёх точках;
интерпретация изменения с глубиной.

Дано

Прямоугольный	3×2 **m,** $q = 150$ **kN/m²**
Точки	**центр** $(0; 0)$**, угол** $(1.5;\ 1)$ **и A′** $(2.5;\ -1)$
Глубины	$z = 1; 2; 4; 6; 8; 12$ **m**



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

z (m)	Центр $\Delta\sigma_z$	Угловое $\Delta\sigma_z$	A′ $\Delta\sigma_z$	Центр /q	Угол /q	A′ /q
1	116.19	35.67	5.88	0.7746	0.2378	0.0392
2	64.24	29.05	11.96	0.4283	0.1936	0.0798
4	22.98	16.06	10.90	0.1532	0.1071	0.0726
6	11.10	9.19	7.41	0.0740	0.0612	0.0494
8	6.44	5.74	5.03	0.0429	0.0383	0.0335
12	2.93	2.78	2.60	0.0195	0.0185	0.0174

Под **центром** и **углом** напряжение монотонно уменьшается с глубиной (22.98 и 16.06 kPa при z = 4 m); отношение угол / центр равно 0.70 при z = 4 m и 0.95 при z = 12 m. В точке **A′** (вне нагрузки) при z = 1 m оно равно 5.88 kPa, при z ≈ 2.50 m достигает наибольшего значения (12.64 kPa), затем уменьшается.

Решение (2/2)

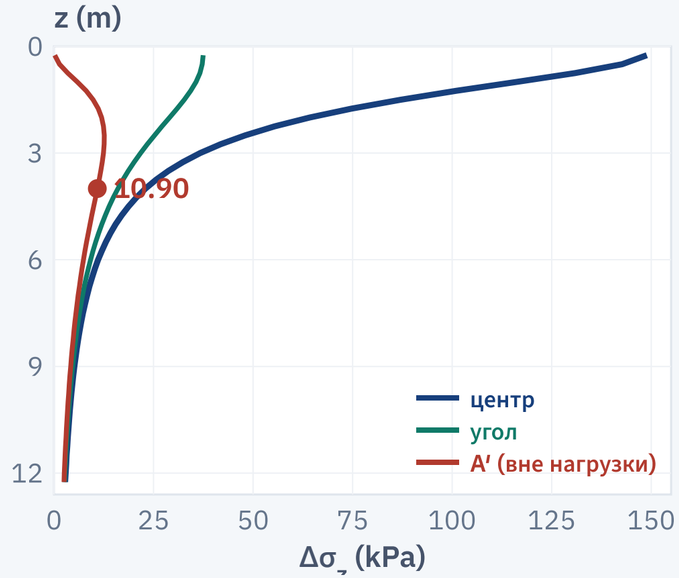
РЕШЕНИЕ

1 Строка z = 4 m: три точки

центр: $150\,(0.15320) = 22.98$ kPa

угол: $150\,I_3(0.5;\,0.75) = 16.06$ kPa A′ : 10.90 kPa

Вблизи поверхности под центром значение приближается к ≈ q, под углом — к ≈ q/4; на глубине три кривые сближаются: при z = 12 m — 2.93, 2.78 и 2.60 kPa.



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

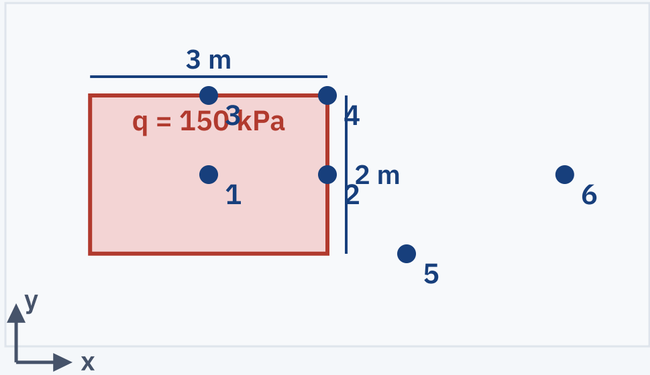
ПРИМЕР

Дано

Прямоугольный	3×2 **m,** $q = 150$ **kN/m²,** $z = 4$ **m**
Точки	**(1) центр; (2) середина короткой стороны; (3) середина длинной стороны; (4) угол; (5) A′; (6)** $(4.5;\ 0)$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Слагаемые I_3 со знаками в каждой точке, их сумма и $\Delta\sigma_z$.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

Точка	(x; y)	Слагаемое 1	Слагаемое 2	Слагаемое 3	Слагаемое 4	$\Sigma \pm I_3$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1	(0.0; 0)	0.0383	0.0383	0.0383	0.0383	0.1532	**22.98**
2	(1.5; 0)	0	0	0.0603	0.0603	0.1205	**18.08**
3	(0.0; 1)	0	0.0675	0	0.0675	0.1351	**20.26**
4	(1.5; 1)	0	0	0	0.1071	0.1071	**16.06**
5	(2.5; -1)	−0.0475	0	0.1202	0	0.0726	**10.90**
6	(4.5; 0)	−0.0603	−0.0603	0.0733	0.0733	0.0261	**3.91**

В точке внутри площади (1) все четыре члена **+**; в точках на кромке (2, 3) два члена равны нулю; в углу (4) остаётся один член; вне площади (5, 6) часть членов становится **−**. Порядок значений: 22.98 > 18.08 > 20.26 > 16.06 > 10.90 > 3.91 kPa.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

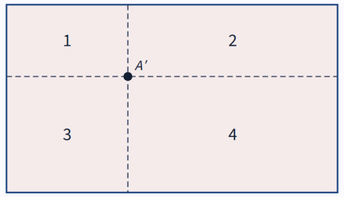
1 Угол (4): только один прямоугольник (3 m × 2 m)

$$\Delta\sigma_z = q\, I_3(m = 0.5;\, n = 0.75) = 150\,(0.10707) = \mathbf{16.06}\ \text{kPa}$$

2 Удалённая точка (6): (4.5; 0), в 3 m за нагрузкой

$$\Delta\sigma_z = q \cdot 2\,[\,I_3(1.5;\, 0.25) - I_3(0.75;\, 0.25)\,]$$
$$= 150 \cdot 2\,(0.07329 - 0.06026) = \mathbf{3.91}\ \text{kPa}$$

Отношение напряжений в углу и в центре 0.699; на расстоянии 3 m от нагрузки (6) остаётся 3.91 kPa: за пределами нагрузки напряжение также не равно нулю.



план загруженной площади;
A′ является общей вершиной всех четырёх прямоугольников 1–4

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

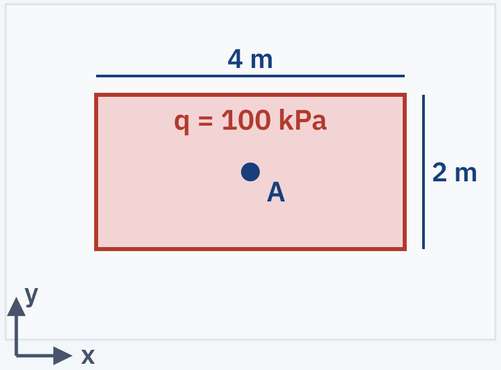
ПРИМЕР

Дано

Прямоугольный	$B = 2$ **m (**$b = 1$ **m),** $L/B = 1; 2; 5; 10$ **и** $L \to \infty$ **(полоса)**
Точки	**под центром,** $n_1 = z/b = 0.5; 1; 2; 4$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Под центром $\Delta\sigma_z/q = I_4$; сравнение с полосой.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

$n_1 = z/b$	L/B = 1	L/B = 2	L/B = 5	L/B = 10	полоса (L/B → ∞)
0.5	0.9299	0.9565	0.9594	0.9595	**0.9595**
1.0	0.7009	0.7998	0.8176	0.8183	**0.8183**
2.0	0.3361	0.4807	0.5451	0.5495	**0.5498**
4.0	0.1081	0.1901	0.2848	0.3034	**0.3058**

Вблизи поверхности ($n_1 = 0.5$) форма почти не имеет значения (0.930 – 0.959); на глубине напряжение под **коротким** прямоугольником затухает намного быстрее: при $n_1 = 4$ для квадрата 0.108, для полосы 0.306.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 Формула I_4 (m_1 = 2; n_1 = 1)

$$m_1^2 + n_1^2 = 5 \qquad \frac{m_1 n_1}{\sqrt{1+5}} = \frac{2}{2.4495} = 0.8165 \qquad \frac{1+4+2}{(1+1)(5)} = 0.70$$

$$\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = 0.6847 \qquad I_4 = \frac{2}{\pi}(0.5715 + 0.6847) = \mathbf{0.79976}$$

2 С четырьмя равными угловыми прямоугольниками (каждый 2 m × 1 m, z = 1 m)

$$4\,I_3(1;\,2) = 4\,(0.19994) = \mathbf{0.79976}$$

В центре прямоугольника L/B = 2 на глубине z = b **$\Delta\sigma_z/q$ = 0.7998** (квадрат: 0.7009; полоса: 0.8183). Для L/B = 10 (n_1 = 1) значение равно 0.81826, для полосы — 0.81831: по мере удлинения прямоугольника значение приближается к значению для полосы.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

ПРИМЕР

Дано

Прямоугольник 1	3×2 m, $q = 150$ kN/m², центр $x = 0$
Прямоугольник 2	3×2 m, $q = 150$ kN/m², центр $x = 5$ m ($y = 0$)
Точка	A′: $x = 2.5$ m, $y = -1$ m; $z = 4$ m (а также 1; 2; 6; 8; 12 m)

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

$\Delta\sigma_z$ каждого прямоугольника и суммарное; профиль по глубине.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Прямоугольник 2: углы, отсчитанные относительно A′ (расстояние между центрами 5 m ≥ $(L_1 + L_2)/2$ = 3 m: перекрытия нет)

Угол (x; y)	a	b	m	n	знак
(6.5; 1.0)	4.0	2.0	1.00	0.50	+
(6.5; -1.0)	4.0	0.0	1.00	0.00	0 (b = 0)
(3.5; 1.0)	1.0	2.0	0.25	0.50	–
(3.5; -1.0)	1.0	0.0	0.25	0.00	0 (b = 0)

2 Суперпозиция

$$\Delta\sigma_{z(2)} = 150\,[I_3(1;\,0.5) - I_3(0.25;\,0.5)] = 10.896 \text{ kPa}$$

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 10.896 + 10.896 = \mathbf{21.793} \text{ kPa}$$

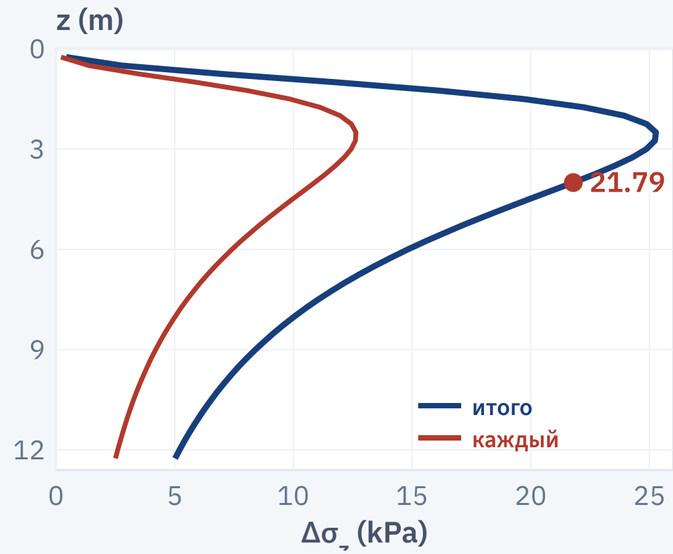
Точка A′ находится точно посередине между двумя прямоугольниками (x = 2.5 m; по 1 m от каждого): прямоугольник 2 является **зеркальным отображением** прямоугольника 1 и даёт то же напряжение. Суммарно **$\Delta\sigma_z$ = 21.79 kPa**.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

z (m)	Прямоугольник 1	Прямоугольник 2	Итого
1	5.877	5.877	**11.754**
2	11.965	11.965	**23.930**
4	10.896	10.896	**21.793**
6	7.413	7.413	**14.826**
8	5.028	5.028	**10.056**
12	2.603	2.603	**5.205**

Суммарное напряжение на z = 4 m равно **21.79 kPa**; поскольку два прямоугольника симметричны, на любой глубине сумма = 2 × значение для одного прямоугольника. Наибольшее суммарное значение 25.28 kPa достигается при z ≈ 2.50 m.



Проверить решение в GeoTerva ↗

Резюме

Главное

Угловая точка: $\Delta\sigma_z = q\, I_3(m, n)$, $m = B/z$, $n = L/z$; для большой площади $I_3 \to 1/4$. **Произвольная точка:** четыре угловых прямоугольника со знаками, $\Delta\sigma_z = q\, \Sigma \pm I_3$

Пример (A′; z = 4 m): 4 m × 2 m − 1 m × 2 m: $I_3(0.5; 1) = 0.12018$; $I_3(0.25; 0.5) = 0.04753$; **$\Delta\sigma_z$ = 150 (0.07264) = 10.90 kPa**

Центр: $\Delta\sigma_z = q\, I_4$; квадрат, z = b: $I_4 = 4\, I_3(1, 1) = 0.701$; прямоугольник 3 × 2 m, z = 4 m: **22.98 kPa**

Положение (z = 4 m): центр 22.98, середины сторон 20.26 и 18.08, угол 16.06, A′ 10.90, удалённая точка 3.91 kPa; и за контуром загруженной области напряжение не равно нулю

Форма: при z = 4b квадрат даёт 0.108 q, прямоугольник 10:1 — 0.303 q, полоса — 0.306 q. **Два прямоугольника:** напряжения суммируются (10.90 + 10.90 = 21.79 kPa)

Список литературы

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Gauthier-Villars, Paris.

ПРИМЕЧАНИЕ

Все численные примеры получены с помощью собственного расчётного ядра модуля; модуль даёт те же значения. При открытии модуля задан прямоугольник 3 m × 2 m (q = 150 kN/m²) и точка A′ (x = 2.5 m; y = −1 m; z = 4 m).

GeoTerva

Геотехнические расчёты онлайн

От теории к практике

В GeoTerva вводятся прямоугольники (q, L, B, центр), точка A и глубина; модуль выдаёт четыре угловых слагаемых, значение $\Delta\sigma_z$, изолинии напряжений, профиль по глубине, пошаговое решение и отчёт вместе.

Открыть модуль →

Страница теории →

Открыть на телефоне
Для пробных модулей регистрация не требуется.