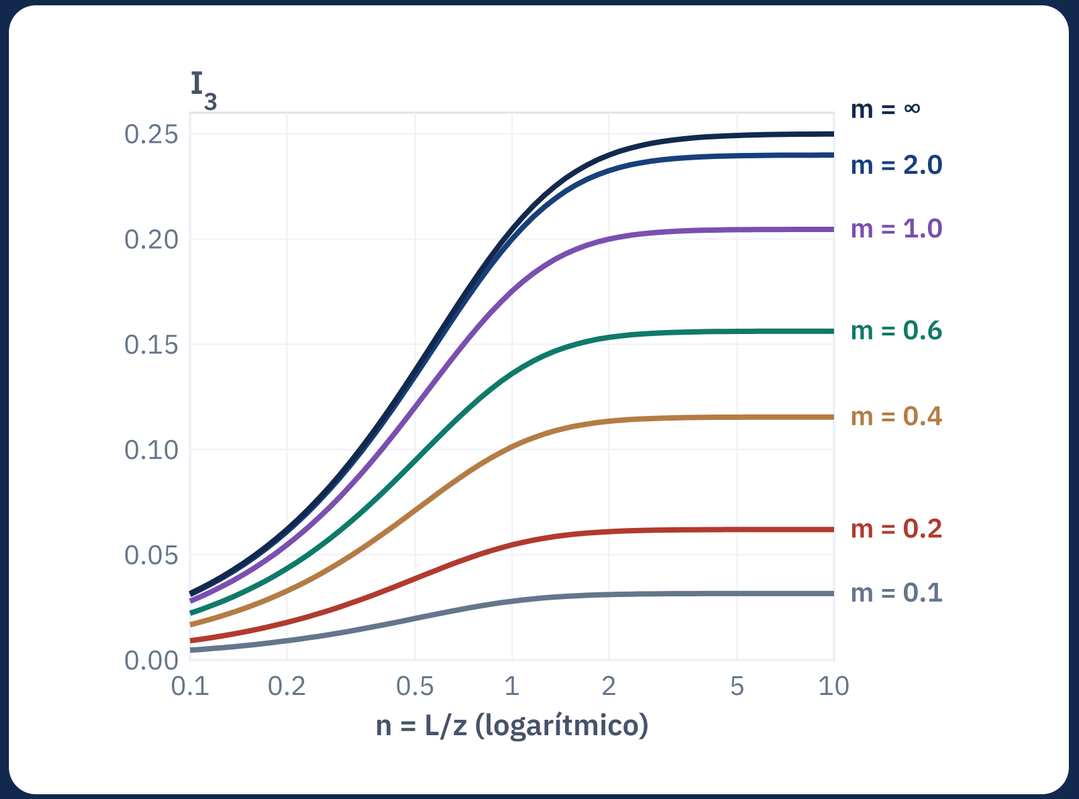
Apresentação de aula de geotecnia · Tensões no solo

Tensão sob uma carga retangular

Aula: tensão vertical sob carga retangular; solução do canto, superposição e exemplos resolvidos à mão.

- Sob o canto · I_3
- Quatro retângulos
- Sob o centro · I_4
- Fora da carga pontual
- Vários retângulos



Baseia-se na página de teoria do GeoTerva · geoterva.com

Introdução

O que veremos nesta aula?

Calcular o acréscimo de tensão vertical sob uma **área retangular** com carga uniformemente distribuída (sapata, radier, laje): $\Delta\sigma_z$

Solução em forma fechada sob o canto: $\Delta\sigma_z = q\, I_3$, em que I_3 depende apenas de $m = B/z$ e $n = L/z$

Para **um ponto qualquer**, a **soma e a subtração** de retângulos: a carga é dividida em quatro retângulos com um canto comum sobre o ponto

Abaixo do centro, diretamente I_4; para o quadrado, verificação de $I_4 = 4\, I_3(1, 1) = 0.701$

Constatar que as tensões de vários retângulos se **somam**; o efeito da forma do retângulo (L/B)

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: fórmula e justificativa

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Exemplo: retângulo de 3 m × 2 m, q = 150 kN/m²; o ponto A′ está 1 m além do lado menor, na direção de um dos lados maiores; z = 4 m.

Retângulo com carga uniformemente distribuída

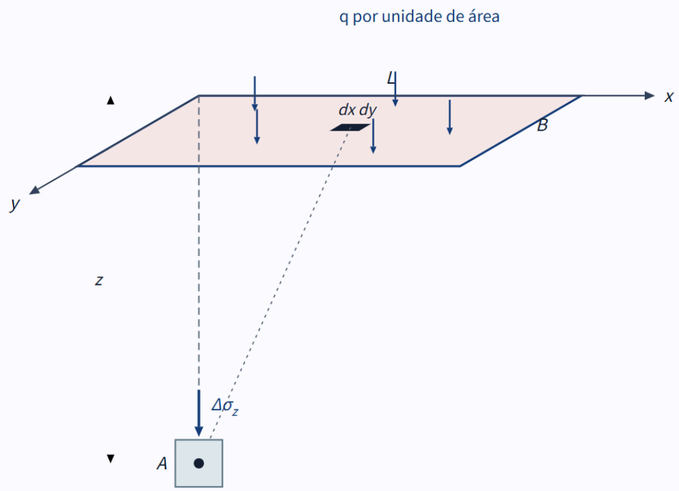
TEORIA

A maioria das sapatas e dos radiers é **retangular**; quando a solução de Boussinesq é integrada sobre um retângulo, a tensão vertical **sob o canto** é obtida em forma fechada

Para todos os demais pontos, os retângulos são **somados e subtraídos**

Um retângulo flexível de dimensões **L × B**, submetido a uma pressão uniformemente distribuída **q**; o solo é um meio semi-infinito homogêneo, isotrópico e linearmente elástico

$\Delta\sigma_z$ é o acréscimo de tensão produzido apenas pela carga



Integral de Boussinesq: $\Delta\sigma_z = q\, I_3$

TEORIA

A área elementar suporta a carga **dq = q dx dy**; na equação de Boussinesq adotam-se P = q dx dy e r² = x² + y²

$$d\sigma_z = \frac{3q\,dx\,dy\,z^3}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$\Delta\sigma_z = \int_0^B \int_0^L \frac{3q\,z^3\,dx\,dy}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} = q\,I_3$$

m = B/z e **n = L/z**; I_3 depende apenas dessas duas razões

Fator de influência I_3

TEORIA

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1} + \tan^{-1}\left(\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2-m^2n^2+1}\right)\right]$$

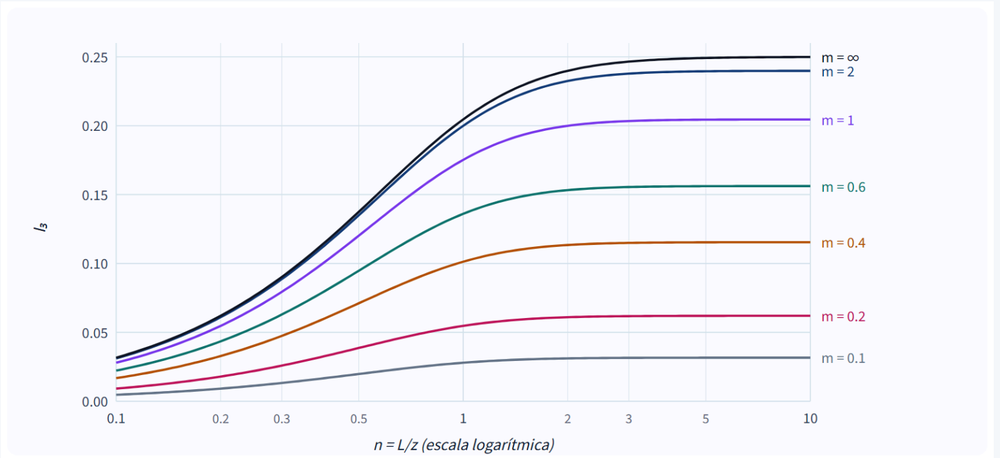
A arco-tangente deve ser um ângulo **positivo** em radianos: quando m² + n² + 1 < m²n², o resultado é negativo e **soma-se π**

I_3 é **simétrico** em relação a m e n; para um retângulo muito grande aproxima-se de **1/4**: um canto suporta um quarto da carga de uma área infinita

Valores de I_3

TEORIA

n \ m	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	3.0
0.10	0.0047	0.0092	0.0198	0.0279	0.0311	0.0315
0.25	0.0113	0.0220	0.0475	0.0674	0.0752	0.0761
0.50	0.0198	0.0387	0.0840	0.1202	0.1350	0.1368
1.00	0.0279	0.0547	0.1202	0.1752	0.1999	0.2034
2.00	0.0311	0.0610	0.1350	0.1999	0.2325	0.2378
5.00	0.0316	0.0620	0.1374	0.2044	0.2395	0.2461



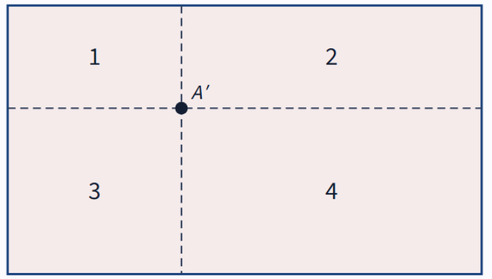
Retângulo de quatro cantos

TEORIA

$$\Delta\sigma_z = q\left[I_{3(1)} + I_{3(2)} + I_{3(3)} + I_{3(4)}\right]$$

A área carregada é dividida em retângulos com **canto comum** sobre o ponto A′; as tensões de canto são somadas

Se A′ estiver **fora** da área, parte dos retângulos se estende além da área e é **subtraída**; o módulo traça, em cada ponto, os quatro retângulos do ponto aos vértices da carga, com distâncias com sinal, e cada I_3 assume o sinal do produto de seus dois lados



planta da área carregada;
A′ é um canto de todos os quatro retângulos 1–4

Abaixo do centro: I_4

TEORIA

$$\Delta\sigma_z = q\, I_4, \quad I_4 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{m_1 n_1}{\sqrt{1+m_1^2+n_1^2}}\,\frac{1+m_1^2+2n_1^2}{(1+n_1^2)(m_1^2+n_1^2)} + \sin^{-1}\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\,\sqrt{1+n_1^2}}\right]$$

Abaixo do centro, os quatro retângulos são **iguais**; o resultado é escrito diretamente: **m_1 = L/B**, **n_1 = z/b**, b = B/2 (L ≥ B)

Para um quadrado à profundidade z = b, **I_4 = 0.701 = 4 I_3(1, 1)**

Superposição

TEORIA

Cada retângulo é definido por **q, L, B** próprios e pelo centro sobre o terreno (x_C, y_C) (no máximo oito no módulo)

Dois retângulos **podem ter uma borda em comum, mas não podem se sobrepor**

Como o solo é elástico, a tensão de cada retângulo é obtida a partir de seus próprios **quatro retângulos de canto** e as tensões são somadas

$$\Delta\sigma_z = \sum_k q_k \sum \pm I_3 \ (\text{quatro cantos})$$

Enunciado

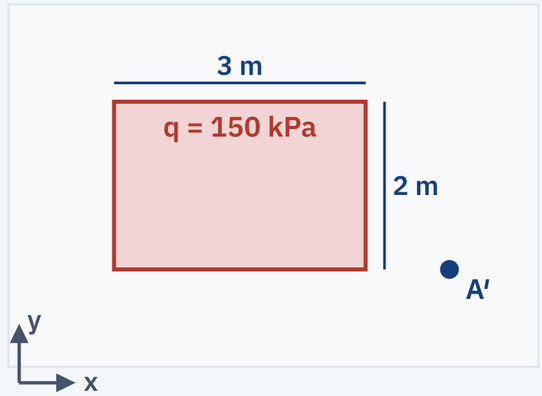
EXEMPLO

Dados

Retangular	3×2 m ($L = 3$ m na direção x, $B = 2$ m na direção y), $q = 150$ kN/m², centro na origem
Ponto A′	a 1 m além do lado menor, na direção de um dos lados maiores: $x = 2.5$ m, $y = -1$ m; $z = 4$ m

PEDE-SE

$\Delta\sigma_z$: pelo retângulo de quatro cantos; cálculo detalhado dos dois valores de I_3.



Solução (1/3)

SOLUÇÃO

1 Distâncias com sinal de A′ aos quatro cantos da carga (z = 4 m)

Canto (x; y)	a = x − $x_{A'}$	b = y − $y_{A'}$	m = |a|/z	n = |b|/z	sinal
(1.5; 1.0)	−1.0	2.0	0.25	0.50	–
(1.5; -1.0)	−1.0	0.0	0.25	0.00	0 (b = 0)
(-1.5; 1.0)	−4.0	2.0	1.00	0.50	+
(-1.5; -1.0)	−4.0	0.0	1.00	0.00	0 (b = 0)

2 Restam dois retângulos: A′ canto comum

$$\Delta\sigma_z = q\,[I_3(0.5;\,1) - I_3(0.25;\,0.5)] \qquad 4\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m} \;-\; 1\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$$

Os dois cantos com b = 0 não contribuem. Para o retângulo de **4 m × 2 m**, m = B/z = 2/4 = 0.5; n = L/z = 4/4 = 1; para o retângulo de **1 m × 2 m**, m = 1/4 = 0.25; n = 2/4 = 0.5. Como I_3 é simétrico, (1; 0.5) e (0.5; 1) são equivalentes.

Solução (2/3)

SOLUÇÃO

Interpolação	$I_3(0.5; 1)$	$I_3(0.25; 0.5)$
m ; n	0.50 ; 1.00	0.25 ; 0.50
m^2 ; n^2	0.2500 ; 1.0000	0.0625 ; 0.2500
$S_1 = m^2 + n^2 + 1$	2.2500	1.3125
$\sqrt{S_1}$	1.5000	1.1456
$2mn\sqrt{S_1}$	1.5000	0.2864
$S_2 = m^2 + n^2 + m^2n^2 + 1$	2.5000	1.3281
$(m^2 + n^2 + 2)/S_1$	1.4444	1.7619
1º termo = $2mn\sqrt{S_1} / S_2 \cdot (m^2 + n^2 + 2)/S_1$	0.8667	0.3800
$D = m^2 + n^2 + 1 - m^2n^2$	2.0000	1.2969
$2mn\sqrt{S_1} / D$	0.7500	0.2208
$\tan^{-1}(\ldots)$ (rad)	0.6435	0.2174
I_3 = (1.º termo + $\tan^{-1}$)/(4π)	**0.12018**	**0.04753**

$I_3(0.5; 1) = 0.12018$ e **$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753$**. Como D > 0 nos dois ângulos, o arco tangente é positivo; não é necessário somar π.

Solução (3/3)

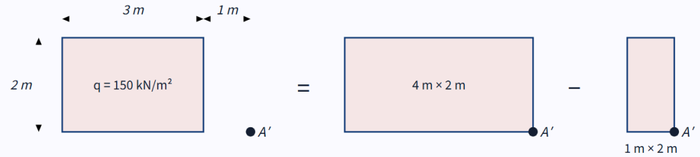
SOLUÇÃO

3 Diferença e tensão

$$\Delta\sigma_z = 150\,(0.12018 - 0.04753) = 150\,(0.07264)$$

$$\Delta\sigma_z = 18.03 - 7.13 = \mathbf{10.90}\ \text{kPa}$$

No ponto A′, **$\Delta\sigma_z$ = 10.90 kPa** ($\Delta\sigma_z$/q = 0.07264). Este é o exemplo inicial do módulo; se o retângulo e o ponto forem deslocados juntos pela mesma distância (centro 4; 3 m, ponto 6.5; 2 m), a tensão não muda: 10.90 kPa.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

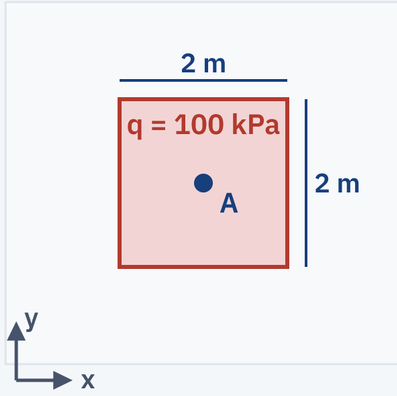
EXEMPLO

Dados

(a) Quadrada	2×2 **m,** $q = 100$ **kN/m²; sob o centro** $z = 1$ **m (**$n_1 = z/b = 1$**)**
(b) Retangular	3×2 **m,** $q = 150$ **kN/m²; abaixo do centro** $z = 4$ **m (**$m_1 = L/B = 1.5$**;** $n_1 = 4$**)**

PEDE-SE

(a) verificação de $\mathbf{I_4 = 4\, I_3(1, 1)}$; (b) $\mathbf{I_4}$ e $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; comparação com a soma dos quatro cantos.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Quatro retângulos iguais (cada um 1 m × 1 m, z = 1 m): $I_3(1, 1)$; $S_1 = 3$, $\sqrt{S_1} = 1.7321$, $2mn\sqrt{S_1} = 3.4641$, $S_2 = 4$

$$1^{o}\ \text{termo} = \frac{3.4641}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1.1547 \qquad \tan^{-1}\frac{3.4641}{3-1} = \tan^{-1}(1.7321) = 1.0472$$

$$I_3 = \frac{1.1547 + 1.0472}{4\pi} = \mathbf{0.17522}$$

2 Verificação com a fórmula do centro ($m_1 = 1$; $n_1 = 1$)

$$4\,I_3 = 4\,(0.17522) = 0.70089$$

$$I_4 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{4} + \sin^{-1}\frac{1}{2}\right] = \frac{2}{\pi}\,(0.5774 + 0.5236) = \mathbf{0.70089}$$

Para o quadrado, **$I_4 = 4\ I_3(1, 1) = 0.70089 \approx 0.701$**. Neste exemplo, a tensão abaixo do centro é igual a 70.1% da pressão da carga (z = b).

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

1 I_4: $m_1 = L/B = 1.5$; $n_1 = z/b = 4$ ($b = 1$ m); $m_1^2 + n_1^2 = 18.25$

$$\frac{m_1 n_1}{\sqrt{1 + m_1^2 + n_1^2}} = \frac{6}{4.3875} = 1.3675 \qquad \frac{1 + m_1^2 + 2n_1^2}{(1 + n_1^2)(m_1^2 + n_1^2)} = \frac{35.25}{310.25} = 0.1136$$

$$\sin^{-1} \frac{1.5}{\sqrt{18.25}\sqrt{17}} = 0.0853 \qquad I_4 = \frac{2}{\pi}\,(0.1554 + 0.0853) = \mathbf{0.15320}$$

2 Verificação por $\Delta\sigma_z$ e pela soma dos quatro cantos

$$\Delta\sigma_z = 150\,(0.15320) = \mathbf{22.98}\ \mathrm{kPa} \qquad 4\,I_3(0.25;\ 0.375) = 4\,(0.03830) = 0.15320$$

Sob o centro, **$\Delta\sigma_z$ = 22.98 kPa** ($\Delta\sigma_z/q = 0.15320$). O mesmo resultado também é obtido com quatro retângulos de canto iguais (cada um de 1.5 m × 1 m): 4 I_3(0.25; 0.375).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

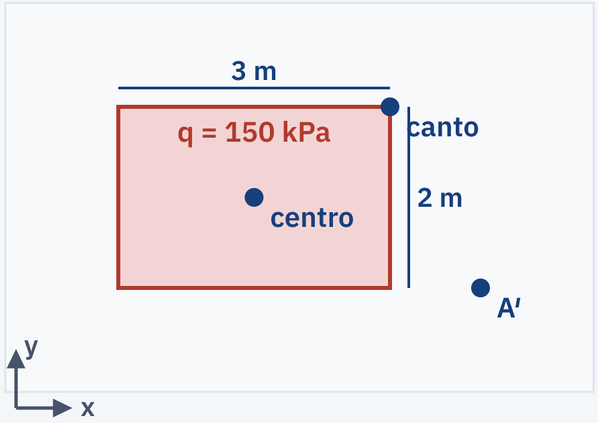
EXEMPLO

Dados

Retangular	3×2 **m,** $q = 150$ **kN/m²**
Pontos	**centro** $(0; 0)$**, canto** $(1.5;\ 1)$ **e A′** $(2.5;\ -1)$
Profundidades	$z = 1; 2; 4; 6; 8; 12$ **m**

PEDE-SE

$\Delta\sigma_z$ e $\Delta\sigma_z/q$ em três pontos; interpretação da variação com a profundidade.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

z (m)	Centro $\Delta\sigma_z$	$\Delta\sigma_z$ no canto	A′ $\Delta\sigma_z$	Centro /q	Canto /q	A′ /q
1	116.19	35.67	5.88	0.7746	0.2378	0.0392
2	64.24	29.05	11.96	0.4283	0.1936	0.0798
4	22.98	16.06	10.90	0.1532	0.1071	0.0726
6	11.10	9.19	7.41	0.0740	0.0612	0.0494
8	6.44	5.74	5.03	0.0429	0.0383	0.0335
12	2.93	2.78	2.60	0.0195	0.0185	0.0174

Sob o **centro** e o **canto**, a tensão diminui com a profundidade de forma monótona (22.98 e 16.06 kPa em z = 4 m); a razão canto / centro é 0.70 em z = 4 m e 0.95 em z = 12 m. Em **A′** (fora da carga), a tensão é de 5.88 kPa em z = 1 m, atinge o valor máximo (12.64 kPa) em z ≈ 2.50 m e depois diminui.

Solução (2/2)

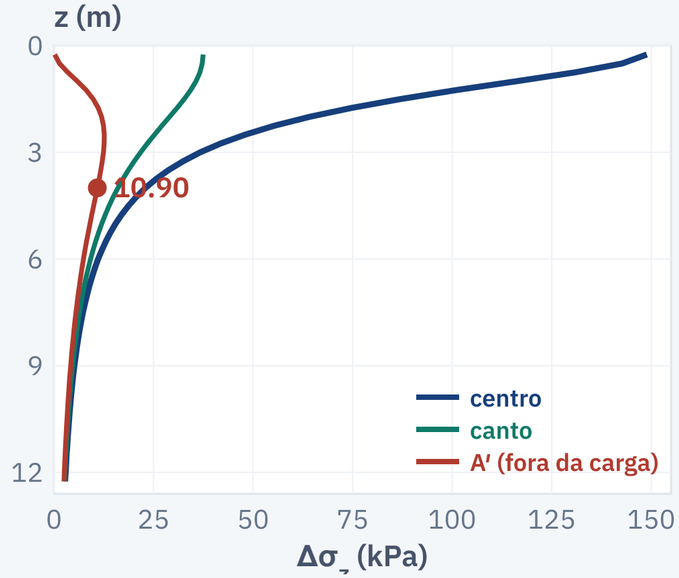
SOLUÇÃO

1 Linha z = 4 m: três pontos

$$\text{centro:}\;\; 150\,(0.15320) = 22.98\ \text{kPa}$$

$$\text{canto:}\;\; 150\,I_3(0.5;\,0.75) = 16.06\ \text{kPa} \qquad \text{A}' :\;\; 10.90\ \text{kPa}$$

Próximo à superfície, abaixo do centro a tensão se aproxima de ≈ q e abaixo do canto, de ≈ q/4; em profundidade, as três curvas se aproximam: em z = 12 m, 2.93, 2.78 e 2.60 kPa.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

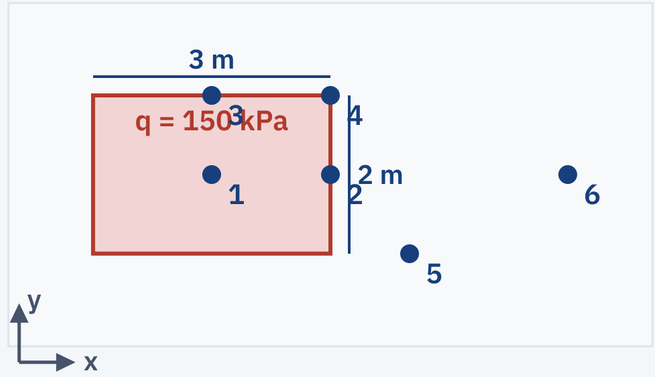
EXEMPLO

Dados

Retangular	3×2 **m,** $q = 150$ **kN/m²,** $z = 4$ **m**
Pontos	**(1) centro; (2) ponto médio do lado menor; (3) ponto médio do lado maior; (4) canto; (5) A′; (6)** $(4.5;\ 0)$

PEDE-SE

Termos I_3 com sinal em cada ponto, o total e $\Delta\sigma_z$.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

Ponto	(x; y)	Termo 1	Termo 2	Termo 3	Termo 4	$\Sigma \pm I_3$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1	(0.0; 0)	0.0383	0.0383	0.0383	0.0383	0.1532	**22.98**
2	(1.5; 0)	0	0	0.0603	0.0603	0.1205	**18.08**
3	(0.0; 1)	0	0.0675	0	0.0675	0.1351	**20.26**
4	(1.5; 1)	0	0	0	0.1071	0.1071	**16.06**
5	(2.5; -1)	−0.0475	0	0.1202	0	0.0726	**10.90**
6	(4.5; 0)	−0.0603	−0.0603	0.0733	0.0733	0.0261	**3.91**

No ponto interno (1), os quatro termos são **+**; nos pontos de borda (2, 3), dois termos são nulos; no canto (4) resta um único termo; fora (5, 6), alguns termos tornam-se **−**. Ordem: 22.98 > 18.08 > 20.26 > 16.06 > 10.90 > 3.91 kPa.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

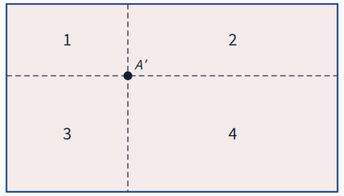
1 Canto (4): apenas um retângulo (3 m × 2 m)

$$\Delta\sigma_z = q\, I_3(m = 0.5;\ n = 0.75) = 150\,(0.10707) = \mathbf{16.06}\ \text{kPa}$$

2 Ponto distante (6): (4.5; 0), a 3 m além da carga

$$\Delta\sigma_z = q \cdot 2\,[\,I_3(1.5;\ 0.25) - I_3(0.75;\ 0.25)\,]$$
$$= 150 \cdot 2\,(0.07329 - 0.06026) = \mathbf{3.91}\ \text{kPa}$$

Razão de tensões canto / centro 0.699; a 3 m da carga (6) restam 3.91 kPa: fora da carga a tensão também não é nula.



planta da área carregada;
A′ é um canto de todos os quatro retângulos 1–4

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

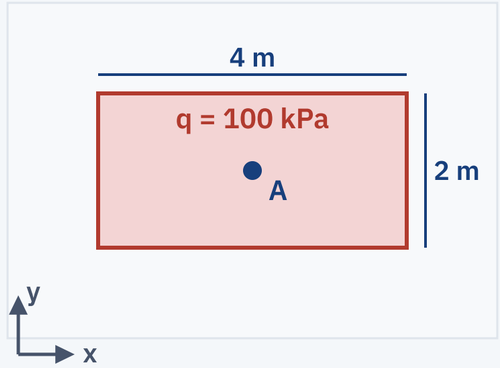
EXEMPLO

Dados

Retangular	$B = 2$ **m** ($b = 1$ **m**), $L/B = 1; 2; 5; 10$ **e** $L \to \infty$ **(faixa)**
Pontos	**abaixo do centro,** $n_1 = z/b = 0.5; 1; 2; 4$

PEDE-SE

Sob o centro, $\Delta\sigma_z/q = I_4$; comparação com a faixa.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

$n_1 = z/b$	L/B = 1	L/B = 2	L/B = 5	L/B = 10	faixa (L/B → ∞)
0.5	0.9299	0.9565	0.9594	0.9595	**0.9595**
1.0	0.7009	0.7998	0.8176	0.8183	**0.8183**
2.0	0.3361	0.4807	0.5451	0.5495	**0.5498**
4.0	0.1081	0.1901	0.2848	0.3034	**0.3058**

Próximo à superfície ($n_1 = 0.5$), a forma pouco importa (0.930 – 0.959); em profundidade, a tensão sob um retângulo **curto** se atenua muito mais depressa: em $n_1 = 4$, o quadrado dá 0.108 e a faixa, 0.306.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

1 Fórmula de I_4 (m_1 = 2; n_1 = 1)

$$m_1^2 + n_1^2 = 5 \qquad \frac{m_1 n_1}{\sqrt{1+5}} = \frac{2}{2.4495} = 0.8165 \qquad \frac{1+4+2}{(1+1)(5)} = 0.70$$

$$\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = 0.6847 \qquad I_4 = \frac{2}{\pi}(0.5715 + 0.6847) = \mathbf{0.79976}$$

2 Com quatro retângulos de canto iguais (cada um com 2 m × 1 m, z = 1 m)

$$4\,I_3(1;\,2) = 4\,(0.19994) = \mathbf{0.79976}$$

No centro de um retângulo L/B = 2, na profundidade z = b, **$\Delta\sigma_z/q$ = 0.7998** (quadrado: 0.7009; faixa: 0.8183). Para L/B = 10 (n_1 = 1) o valor é 0.81826 e o da faixa, 0.81831: à medida que o retângulo se alonga, aproxima-se da faixa.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

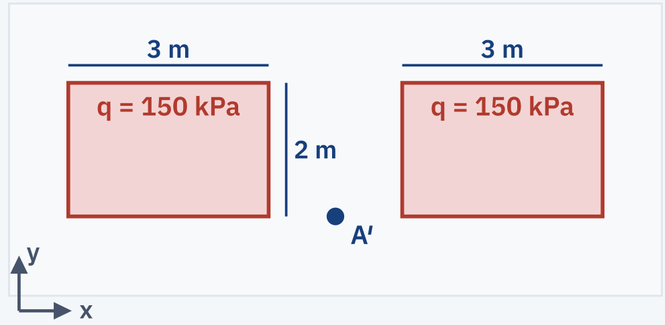
EXEMPLO

Dados

Retângulo 1	3×2 **m,** $q = 150$ **kN/m², centro** $x = 0$
Retângulo 2	3×2 **m,** $q = 150$ **kN/m², centro** $x = 5$ **m (**$y = 0$**)**
Ponto	**A′:** $x = 2.5$ **m,** $y = -1$ **m;** $z = 4$ **m (também** $1; 2; 6; 8; 12$ **m)**

PEDE-SE

$\Delta\sigma_z$ de cada retângulo e total; perfil em profundidade.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Retângulo 2: cantos com sinal em relação a A′ (5 m entre centros ≥ $(L_1 + L_2)/2$ = 3 m: sem sobreposição)

Canto (x; y)	a	b	m	n	sinal
(6.5; 1.0)	4.0	2.0	1.00	0.50	+
(6.5; -1.0)	4.0	0.0	1.00	0.00	0 (b = 0)
(3.5; 1.0)	1.0	2.0	0.25	0.50	–
(3.5; -1.0)	1.0	0.0	0.25	0.00	0 (b = 0)

2 Superposição

$$\Delta\sigma_{z(2)} = 150\,[I_3(1;\,0.5) - I_3(0.25;\,0.5)] = 10.896\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 10.896 + 10.896 = \mathbf{21.793}\ \text{kPa}$$

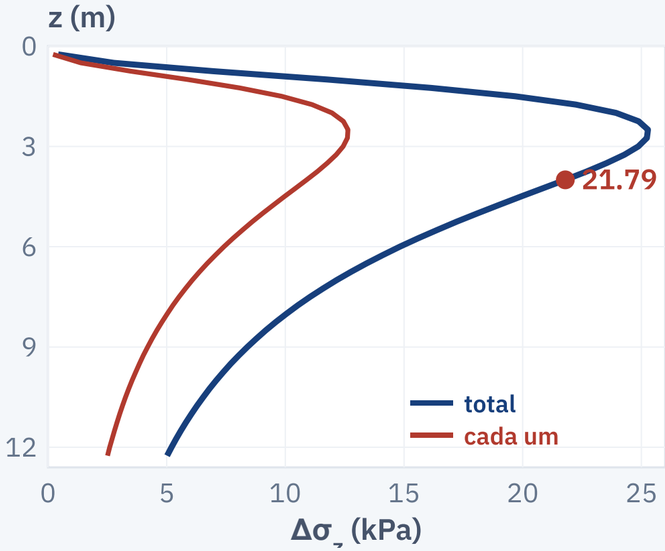
A′ está exatamente no ponto médio dos dois retângulos (x = 2.5 m; a 1 m de cada um): o retângulo 2 é a **imagem especular** do retângulo 1 e fornece a mesma tensão. Total: **$\Delta\sigma_z$ = 21.79 kPa**.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

z (m)	Retângulo 1	Retângulo 2	Total
1	5.877	5.877	**11.754**
2	11.965	11.965	**23.930**
4	10.896	10.896	**21.793**
6	7.413	7.413	**14.826**
8	5.028	5.028	**10.056**
12	2.603	2.603	**5.205**

A tensão total em z = 4 m é de **21.79 kPa**; como os dois retângulos são simétricos, o total em qualquer profundidade = 2 × um único retângulo. O maior valor total é 25.28 kPa em z ≈ 2.50 m.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Resumo

Pontos-chave

Canto: $\Delta\sigma_z = q\, I_3(m, n)$, $m = B/z$, $n = L/z$; para uma área grande, $I_3 \rightarrow 1/4$. **Ponto qualquer:** retângulos de quatro cantos com sinais, $\Delta\sigma_z = q\, \Sigma \pm I_3$

Exemplo (A′; z = 4 m): 4 m × 2 m – 1 m × 2 m: $I_3(0.5; 1) = 0.12018$; $I_3(0.25; 0.5) = 0.04753$; **$\Delta\sigma_z$ = 150 (0.07264) = 10.90 kPa**

Centro: $\Delta\sigma_z = q\, I_4$; quadrado, z = b: $I_4 = 4\, I_3(1, 1) = 0.701$; retângulo de 3 × 2 m, z = 4 m: **22.98 kPa**

Posição (z = 4 m): centro 22.98, meios dos lados 20.26 e 18.08, canto 16.06, A′ 10.90, ponto distante 3.91 kPa; fora da área a tensão também não é zero

Forma: em z = 4b, o quadrado dá 0.108 q, o retângulo 10:1 dá 0.303 q e a faixa, 0.306 q. **Dois retângulos:** as tensões são somadas (10.90 + 10.90 = 21.79 kPa)

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Gauthier-Villars, Paris.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o próprio motor de cálculo do módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O módulo abre com um retângulo de 3 m × 2 m (q = 150 kN/m²) e o ponto A′ (x = 2.5 m; y = −1 m; z = 4 m).

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Informar os próprios retângulos (q, L, B, centro), o ponto A e a profundidade no GeoTerva; o módulo fornece, em conjunto, os quatro termos de canto, o valor de $\Delta\sigma_z$, as curvas de isotensão, o perfil em profundidade, a solução passo a passo e o relatório.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.