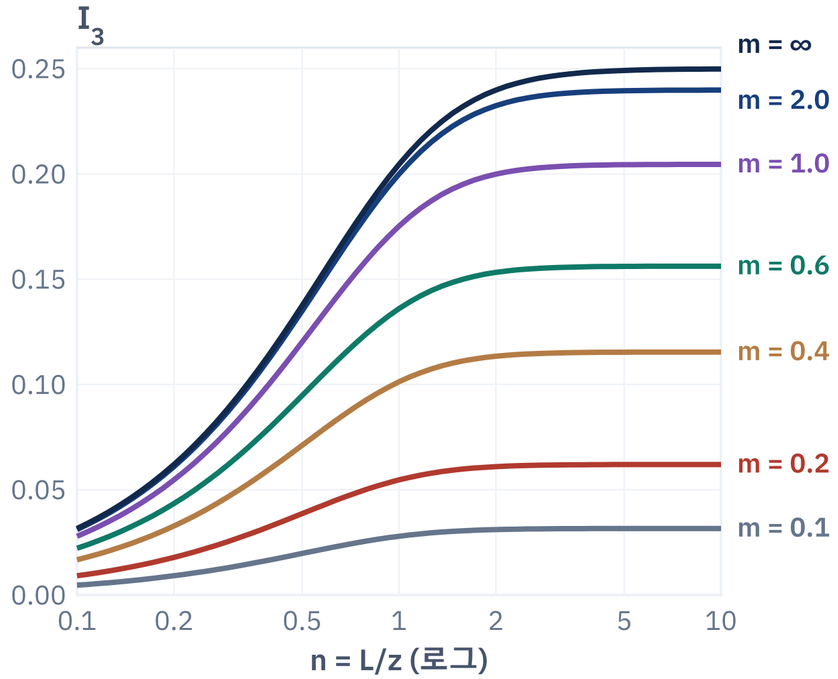
GeoTerva

지반공학 강의 자료 · 지반 내 응력

직사각형 하중 하부의 응력

강의: 직사각형 하중 아래의 연직응력; 모서리 해, 중첩 및 수계산 예제.

모서리 아래 · I_3 | 직사각형 4개 | 중심 아래 · I_4 | 하중 바깥의 점 | 다수의 직사각형



개요

이 강의에서 다루는 내용

등분포하중이 작용하는 **직사각형 면적**(기초, 전면기초, 슬래브) 아래의 수직응력 증가량 $\Delta\sigma_z$를 구하는 방법

모서리 아래의 **닫힌 해**: $\Delta\sigma_z = q\, I_3$, I_3은 $m = B/z$와 $n = L/z$에만 의존한다

임의의 점에 대한 직사각형의 **가산과 감산**: 하중을 점 위에 공통 모서리를 갖는 네 개의 직사각형으로 나눈다

중심 직하의 I_4; 정사각형은 $I_4 = 4\, I_3(1, 1) = 0.701$ 검토

여러 직사각형 응력의 **합산**; 직사각형 형상(L/B)의 영향

강의 흐름

각 주제는 **세 단계**로 다룬다:

1 · **이론**: 공식과 그 근거

2 · **문제**: 조건과 구하는 값

3 · **풀이**: 단계별 수치 계산

예제: 3 m × 2 m 직사각형, $q = 150$ kN/m²; 점 A′는 짧은 변에서 1 m 바깥에, 긴 변 중 하나의 연장선상에 있다; $z = 4$ m.

등분포하중을 받는 직사각형 면적

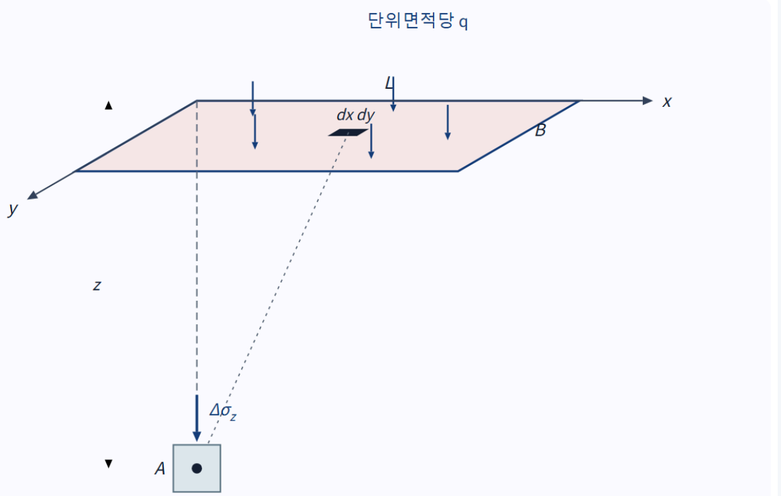
이론

대부분의 확대기초와 전면기초는 **직사각형**이다. Boussinesq 해를 직사각형 위에서 적분하면 **모서리 아래**의 연직응력을 닫힌 형태로 구할 수 있다

그 밖의 모든 점에 대해서는 직사각형을 **더하고 뺀다**

등분포 압력 **q**를 받는 **L × B** 크기의 연성 직사각형; 지반은 균질, 등방성, 선형 탄성의 반무한 매질이다

$\Delta\sigma_z$는 하중만으로 발생한 응력 증가량이다



Boussinesq 적분: $\Delta\sigma_z = q\, I_3$

이론

미소 면적은 **dq = q dx dy** 하중을 부담하며, Boussinesq 식에 P = q dx dy와 $r^2 = x^2 + y^2$을 대입한다

$$d\sigma_z = \frac{3q\,dx\,dy\,z^3}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$\Delta\sigma_z = \int_0^B\int_0^L \frac{3q\,z^3\,dx\,dy}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} = q\,I_3$$

m = B/z 및 **n = L/z**; I_3은 이 두 비에만 의존한다

영향계수 I_3

이론

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1}+\tan^{-1}\left(\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2-m^2n^2+1}\right)\right]$$

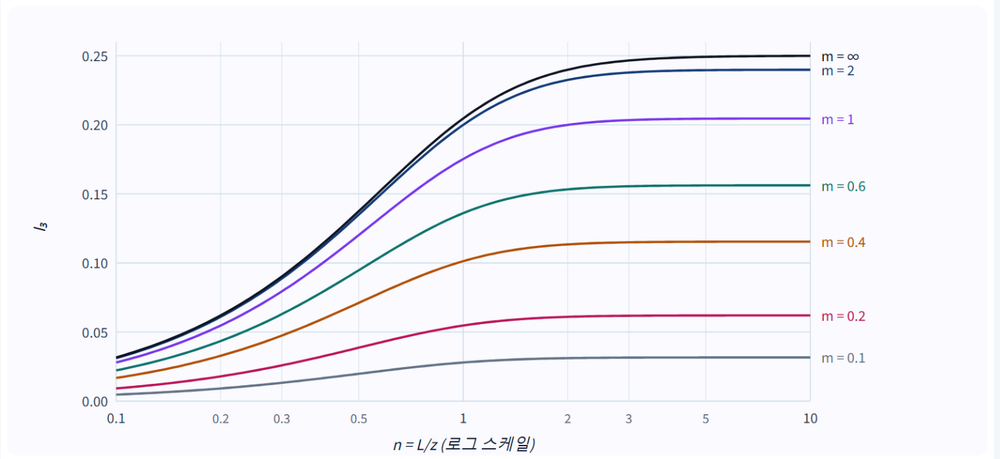
아크탄젠트는 라디안 단위의 **양**의 각이어야 한다: $m^2 + n^2 + 1 < m^2n^2$이면 음수가 되며 **π가 더해진다**

I_3은 m과 n에 대해 **대칭**이며, 매우 큰 직사각형에서는 **1/4**에 접근한다: 한 모서리는 무한 면적 하중의 4분의 1을 부담한다

I_3 값

이론

n \ m	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	3.0
0.10	0.0047	0.0092	0.0198	0.0279	0.0311	0.0315
0.25	0.0113	0.0220	0.0475	0.0674	0.0752	0.0761
0.50	0.0198	0.0387	0.0840	0.1202	0.1350	0.1368
1.00	0.0279	0.0547	0.1202	0.1752	0.1999	0.2034
2.00	0.0311	0.0610	0.1350	0.1999	0.2325	0.2378
5.00	0.0316	0.0620	0.1374	0.2044	0.2395	0.2461



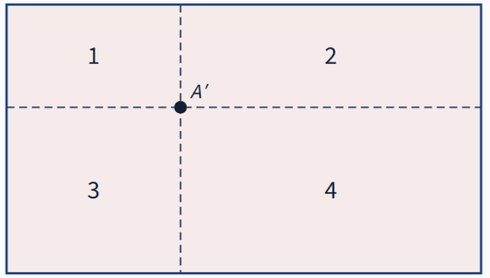
네 모서리 직사각형

이론

$$\Delta\sigma_z = q\left[I_{3(1)} + I_{3(2)} + I_{3(3)} + I_{3(4)}\right]$$

재하 면적은 A′점 위에서 **공통 모서리**를 갖는 직사각형들로 분할하고, 모서리 응력을 합산한다

A′가 영역의 **바깥**에 있으면 직사각형의 일부가 영역 밖으로 뻗으며 **제거된다**; 모듈은 각 지점에서 부호가 있는 거리를 사용하여 그 지점으로부터 하중의 모서리까지 네 개의 직사각형을 그리고, 각 I_3 값은 두 변의 곱의 부호를 갖는다



하중 작용 면적의 평면도;
A′은 4개 모서리의 공통점이다
직사각형 1–4

중심 아래: I_4

이론

$$\Delta\sigma_z = q\, I_4, \quad I_4 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{m_1 n_1}{\sqrt{1+m_1^2+n_1^2}}\,\frac{1+m_1^2+2n_1^2}{(1+n_1^2)(m_1^2+n_1^2)} + \sin^{-1}\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\,\sqrt{1+n_1^2}}\right]$$

중심 아래에서는 네 직사각형이 **같으므로** 결과를 바로 쓸 수 있다: **m_1 = L/B**, **n_1 = z/b**, b = B/2 (L ≥ B)

깊이 z = b에 있는 정사각형에 대해 **I_4 = 0.701 = 4 I_3(1, 1)**

중첩

이론

각 직사각형은 자체 **q, L, B**와 지표면 위의 중심 (x_c, y_c)에 의해 정의된다(모듈에서는 최대 여덟 개)

두 직사각형은 **한 변에서 만날 수 있으나 겹칠 수는 없다**

지반이 탄성이므로 각 직사각형의 응력은 그 직사각형의 **네 모서리 직사각형**으로부터 구하며, 응력을 합산한다

$$\Delta\sigma_z = \sum_k q_k \sum \pm I_3 \text{ (네 모서리)}$$

문제

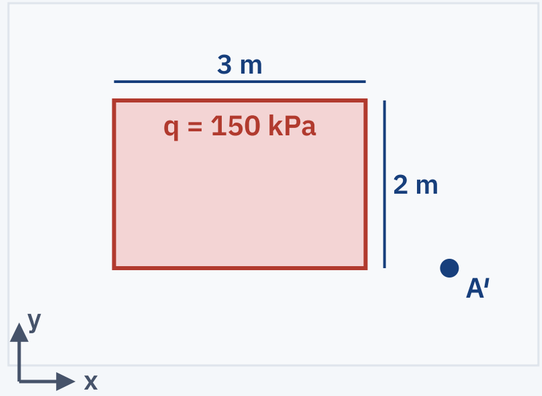
예제

조건

직사각형	3×2 m ($L = 3$ m는 x 방향, $B = 2$ m는 y 방향), $q = 150$ kN/m², 원점을 중심으로
점 A′	짧은 변 바깥쪽 1 m 지점, 긴 변 중 하나의 연장 방향: $x = 2.5$ m, $y = -1$ m; $z = 4$ m

구하는 값

$\Delta\sigma_z$: 4개 모서리 직사각형법; 두 I_3 값의 상세 계산.



풀이 (1/3)

풀이

1 A′에서 하중의 네 모서리까지의 부호 있는 거리 (z = 4 m)

모서리 (x; y)	$a = x - x_{A'}$	$b = y - y_{A'}$	$m = \lvert a \rvert / z$	$n = \lvert b \rvert / z$	부호
(1.5; 1.0)	−1.0	2.0	0.25	0.50	−
(1.5; -1.0)	−1.0	0.0	0.25	0.00	0 (b = 0)
(-1.5; 1.0)	−4.0	2.0	1.00	0.50	+
(-1.5; -1.0)	−4.0	0.0	1.00	0.00	0 (b = 0)

2 직사각형 두 개가 남는다: A′는 공통 모서리

$$\Delta\sigma_z = q\,[I_3(0.5;\,1) - I_3(0.25;\,0.5)] \qquad 4\ \text{m} \times 2\ \text{m} \;-\; 1\ \text{m} \times 2\ \text{m}$$

b = 0인 두 모서리는 기여하지 않는다. **4 m × 2 m** 직사각형에서는 m = B/z = 2/4 = 0.5; n = L/z = 4/4 = 1이고, **1 m × 2 m** 직사각형에서는 m = 1/4 = 0.25; n = 2/4 = 0.5이다. I_3 값은 대칭이므로 (1; 0.5)와 (0.5; 1)은 같다.

풀이 (2/3)

풀이

보간값	$I_3(0.5; 1)$	$I_3(0.25; 0.5)$
m ; n	0.50 ; 1.00	0.25 ; 0.50
m^2 ; n^2	0.2500 ; 1.0000	0.0625 ; 0.2500
$S_1 = m^2 + n^2 + 1$	2.2500	1.3125
$\sqrt{S_1}$	1.5000	1.1456
$2mn\sqrt{S_1}$	1.5000	0.2864
$S_2 = m^2 + n^2 + m^2n^2 + 1$	2.5000	1.3281
$(m^2 + n^2 + 2)/S_1$	1.4444	1.7619
1항 = $2mn\sqrt{S_1} / S_2 \cdot (m^2 + n^2 + 2)/S_1$	0.8667	0.3800
$D = m^2 + n^2 + 1 - m^2n^2$	2.0000	1.2969
$2mn\sqrt{S_1} / D$	0.7500	0.2208
$\tan^{-1}(\dots)$ (rad)	0.6435	0.2174
I_3 = (첫째 항 + $\tan^{-1}$)/(4π)	**0.12018**	**0.04753**

$I_3(0.5; 1) = 0.12018$과 **$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753$**. 두 각 모두 $D > 0$이므로 아크탄젠트는 양수이며, π를 더할 필요가 없다.

풀이 (3/3)

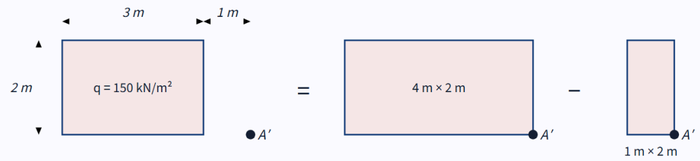
풀이

3 차이와 응력

$$\Delta\sigma_z = 150\,(0.12018 - 0.04753) = 150\,(0.07264)$$

$$\Delta\sigma_z = 18.03 - 7.13 = \mathbf{10.90}\ \text{kPa}$$

점 A′에서 **$\Delta\sigma_z$ = 10.90 kPa**이다($\Delta\sigma_z/q$ = 0.07264). 모듈은 이 예제를 초기 예제로 불러오며, 직사각형과 점을 같은 거리만큼 함께 이동하면(중심 4; 3 m, 점 6.5; 2 m) 응력은 변하지 않는다: 10.90 kPa.



GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

예제

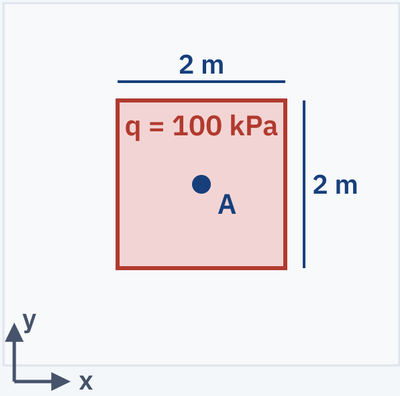
조건

(a) 정사각형 — 2×2 m, $q = 100$ kN/m²; 중심 아래 $z = 1$ m ($n_1 = z/b = 1$)

(b) 직사각형 — 3×2 m, $q = 150$ kN/m²; 중심 아래 $z = 4$ m ($m_1 = L/B = 1.5$; $n_1 = 4$)

구하는 값

(a) $I_4 = 4\,I_3(1, 1)$ 검토; (b) I_4 및 $\Delta\sigma_z$; 네 모서리 합과의 비교.



풀이 (1/2)

풀이

1 동일한 직사각형 4개(각각 1 m × 1 m, z = 1 m): $I_3(1,\,1)$; $S_1 = 3$, $\sqrt{S_1} = 1.7321$, $2mn\sqrt{S_1} = 3.4641$, $S_2 = 4$

$$\text{제1항} = \frac{3.4641}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1.1547 \qquad \tan^{-1}\frac{3.4641}{3-1} = \tan^{-1}(1.7321) = 1.0472$$

$$I_3 = \frac{1.1547 + 1.0472}{4\pi} = \mathbf{0.17522}$$

2 중심점 공식에 의한 검토 ($m_1 = 1$; $n_1 = 1$)

$$4\,I_3 = 4\,(0.17522) = 0.70089$$

$$I_4 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{4} + \sin^{-1}\frac{1}{2}\right] = \frac{2}{\pi}\,(0.5774 + 0.5236) = \mathbf{0.70089}$$

정사각형의 경우 **$I_4 = 4\,I_3(1,\,1) = 0.70089 \approx 0.701$**이다. 이 예제에서 중심 아래의 응력은 하중 압력의 70.1%에 해당한다(z = b).

풀이 (2/2)

풀이

1 I_4: $m_1 = L/B = 1.5$; $n_1 = z/b = 4$ ($b = 1$ m); $m_1^2 + n_1^2 = 18.25$

$$\frac{m_1 n_1}{\sqrt{1 + m_1^2 + n_1^2}} = \frac{6}{4.3875} = 1.3675 \qquad \frac{1 + m_1^2 + 2n_1^2}{(1 + n_1^2)(m_1^2 + n_1^2)} = \frac{35.25}{310.25} = 0.1136$$

$$\sin^{-1} \frac{1.5}{\sqrt{18.25}\sqrt{17}} = 0.0853 \qquad I_4 = \frac{2}{\pi}(0.1554 + 0.0853) = \mathbf{0.15320}$$

2 $\Delta\sigma_z$ 및 네 모서리 합산에 의한 검토

$$\Delta\sigma_z = 150\,(0.15320) = \mathbf{22.98}\ \text{kPa} \qquad 4\,I_3(0.25;\ 0.375) = 4\,(0.03830) = 0.15320$$

중심 아래에서 **$\Delta\sigma_z$ = 22.98 kPa**($\Delta\sigma_z/q$ = 0.15320)이다. 같은 결과는 동일한 네 개의 모서리 직사각형(각각 1.5 m × 1 m)으로도 얻는다: 4 I_3(0.25; 0.375).

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

예제

구하는 값

세 지점에서의 $\Delta\sigma_z$ 및 $\Delta\sigma_z/q$; 깊이에 따른 변화의 해석.

조건

직사각형	3×2 m, $q = 150$ kN/m²
점	**중심** $(0; 0)$, **모서리** $(1.5;\ 1)$, **A′** $(2.5;\ -1)$
깊이	$z = 1; 2; 4; 6; 8; 12$ m



풀이 (1/2)

풀이

z (m)	중심 $\Delta\sigma_z$	모서리 $\Delta\sigma_z$	A′ $\Delta\sigma_z$	중심 /q	모서리 /q	A′ /q
1	116.19	35.67	5.88	0.7746	0.2378	0.0392
2	64.24	29.05	11.96	0.4283	0.1936	0.0798
4	22.98	16.06	10.90	0.1532	0.1071	0.0726
6	11.10	9.19	7.41	0.0740	0.0612	0.0494
8	6.44	5.74	5.03	0.0429	0.0383	0.0335
12	2.93	2.78	2.60	0.0195	0.0185	0.0174

중심과 **모서리** 아래에서 응력은 깊이에 따라 한 방향으로 감소한다(z = 4 m에서 22.98 및 16.06 kPa); 모서리/중심 비는 z = 4 m에서 0.70, z = 12 m에서 0.95이다. **A′**(하중 바깥)의 응력은 z = 1 m에서 5.88 kPa이나 z ≈ 2.50 m에서 최댓값(12.64 kPa)에 이르고, 이후 감소한다.

풀이 (2/2)

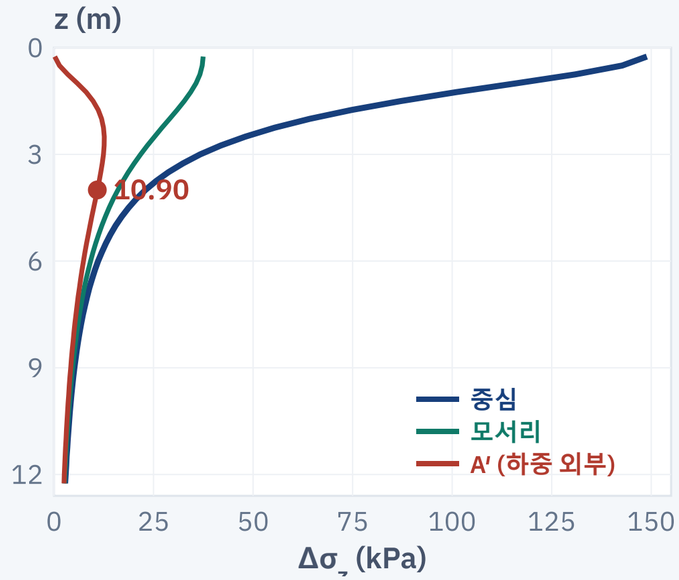
풀이

1 z = 4 m 행: 세 점

$$\text{중심: } 150\,(0.15320) = 22.98 \text{ kPa}$$

$$\text{모서리: } 150\,I_3(0.5;\,0.75) = 16.06 \text{ kPa} \qquad \text{A}' : \quad 10.90 \text{ kPa}$$

지표면 부근에서 중심 아래의 값은 ≈ q에, 모서리 아래의 값은 ≈ q/4에 가까워지며, 깊은 곳에서는 세 곡선이 서로 접근한다: z = 12 m에서 2.93, 2.78, 2.60 kPa.



GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

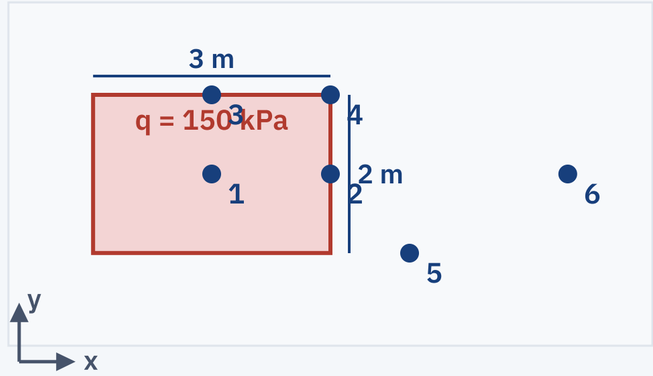
예제

조건

직사각형	3×2 m, $q = 150$ kN/m², $z = 4$ m
점	(1) 중심; (2) 짧은 변의 중앙; (3) 긴 변의 중앙; (4) 모서리; (5) A′; (6) $(4.5;\ 0)$

구하는 값

각 점에서 부호를 포함한 I_3 항, 합계 및 $\Delta\sigma_z$.



풀이 (1/2)

풀이

점	(x; y)	항 1	항 2	항 3	항 4	$\Sigma \pm I_3$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1	(0.0; 0)	0.0383	0.0383	0.0383	0.0383	0.1532	**22.98**
2	(1.5; 0)	0	0	0.0603	0.0603	0.1205	**18.08**
3	(0.0; 1)	0	0.0675	0	0.0675	0.1351	**20.26**
4	(1.5; 1)	0	0	0	0.1071	0.1071	**16.06**
5	(2.5; -1)	−0.0475	0	0.1202	0	0.0726	**10.90**
6	(4.5; 0)	−0.0603	−0.0603	0.0733	0.0733	0.0261	**3.91**

내부 지점(1)에서는 네 항이 모두 +이고, 가장자리 지점(2, 3)에서는 두 항이 영이며, 모서리(4)에서는 한 항만 남고, 외부(5, 6)에서는 일부 항이 −가 된다. 순서: 22.98 > 18.08 > 20.26 > 16.06 > 10.90 > 3.91 kPa.

풀이 (2/2)

풀이

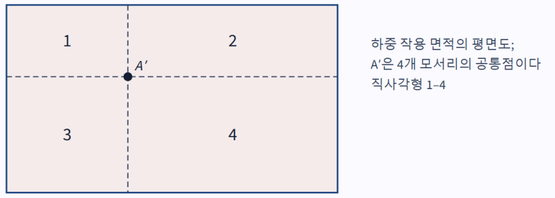
1 모서리 (4): 직사각형 1개뿐 (3 m × 2 m)

$$\Delta\sigma_z = q\, I_3(m = 0.5;\, n = 0.75) = 150\,(0.10707) = \mathbf{16.06}\ \text{kPa}$$

2 원거리 지점 (6): (4.5; 0), 하중으로부터 3 m 바깥

$$\Delta\sigma_z = q \cdot 2\,[\,I_3(1.5;\,0.25) - I_3(0.75;\,0.25)\,]$$
$$= 150 \cdot 2\,(0.07329 - 0.06026) = \mathbf{3.91}\ \text{kPa}$$

모서리/중심 응력비 0.699; 하중에서 3 m 떨어진 곳(6)에서 3.91 kPa가 남는다: 하중 바깥에서도 응력은 0이 아니다.



하중 작용 면적의 평면도; A′은 4개 모서리의 공통점이다 직사각형 1–4

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

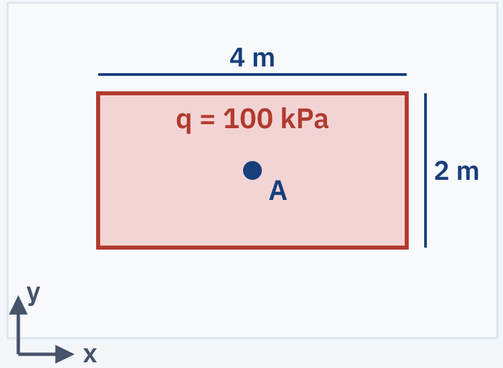
예제

조건

직사각형	$B = 2$ m ($b = 1$ m), $L/B = 1; 2; 5; 10$ 및 $L \to \infty$ (띠하중)
점	중심 아래, $n_1 = z/b = 0.5; 1; 2; 4$

구하는 값

중심 아래에서 $\Delta\sigma_z/q = I_4$; 띠하중과 비교.



풀이 (1/2)

풀이

$n_1 = z/b$	L/B = 1	L/B = 2	L/B = 5	L/B = 10	띠하중 (L/B → ∞)
0.5	0.9299	0.9565	0.9594	0.9595	**0.9595**
1.0	0.7009	0.7998	0.8176	0.8183	**0.8183**
2.0	0.3361	0.4807	0.5451	0.5495	**0.5498**
4.0	0.1081	0.1901	0.2848	0.3034	**0.3058**

지표 부근($n_1 = 0.5$)에서는 형상이 거의 중요하지 않으나(0.930 – 0.959), 깊은 곳에서는 **짧은** 직사각형 아래의 응력이 훨씬 빨리 소멸한다: $n_1 = 4$에서 정사각형 0.108, 띠 0.306.

풀이 (2/2)

풀이

1 I_4 공식 (m_1 = 2; n_1 = 1)

$$m_1^2 + n_1^2 = 5 \qquad \frac{m_1 n_1}{\sqrt{1+5}} = \frac{2}{2.4495} = 0.8165 \qquad \frac{1+4+2}{(1+1)(5)} = 0.70$$

$$\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = 0.6847 \qquad I_4 = \frac{2}{\pi}\,(0.5715 + 0.6847) = \mathbf{0.79976}$$

2 동일한 모서리 직사각형 4개로 (각각 2 m × 1 m, z = 1 m)

$$4\,I_3(1;\,2) = 4\,(0.19994) = \mathbf{0.79976}$$

L/B = 2인 직사각형의 중심에서 깊이 z = b일 때 **$\Delta\sigma_z/q$ = 0.7998**이다(정사각형: 0.7009; 띠: 0.8183). L/B = 10(n_1 = 1)에서는 0.81826이고 띠하중은 0.81831이다: 직사각형이 길어질수록 띠하중에 가까워진다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

예제

조건

직사각형 1	3×2 m, $q = 150$ kN/m², 중심 $x = 0$
직사각형 2	3×2 m, $q = 150$ kN/m², 중심 $x = 5$ m ($y = 0$)
점	A′: $x = 2.5$ m, $y = -1$ m; $z = 4$ m (또한 1; 2; 6; 8; 12 m)

구하는 값

각 직사각형 및 합계의 $\Delta\sigma_z$; 깊이별 분포.



풀이 (1/2)

풀이

1 직사각형 2: A′ 기준으로 부호를 붙인 모서리 (중심 간 거리 5 m ≥ $(L_1 + L_2)/2$ = 3 m: 겹침 없음)

모서리 (x; y)	a	b	m	n	부호
(6.5; 1.0)	4.0	2.0	1.00	0.50	+
(6.5; -1.0)	4.0	0.0	1.00	0.00	0 (b = 0)
(3.5; 1.0)	1.0	2.0	0.25	0.50	−
(3.5; -1.0)	1.0	0.0	0.25	0.00	0 (b = 0)

2 중첩

$$\Delta\sigma_{z(2)} = 150\,[I_3(1;\,0.5) - I_3(0.25;\,0.5)] = 10.896\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 10.896 + 10.896 = \mathbf{21.793}\ \text{kPa}$$

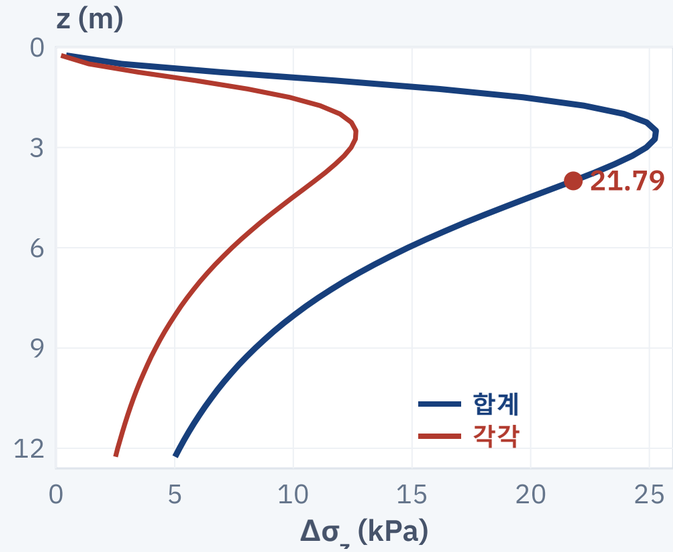
A′는 두 직사각형의 정중앙에 있다(x = 2.5 m; 각각에서 1 m 떨어짐): 직사각형 2는 직사각형 1의 **거울상**이며 동일한 응력을 준다. 합계 **$\Delta\sigma_z$ = 21.79 kPa**이다.

풀이 (2/2)

풀이

z (m)	직사각형 1	직사각형 2	합계
1	5.877	5.877	**11.754**
2	11.965	11.965	**23.930**
4	10.896	10.896	**21.793**
6	7.413	7.413	**14.826**
8	5.028	5.028	**10.056**
12	2.603	2.603	**5.205**

합산 응력은 z = 4 m에서 **21.79 kPa**이다. 두 직사각형이 대칭이므로 모든 깊이에서 합계 = 2 × 직사각형 1개의 값이다. 합계의 최댓값은 z ≈ 2.50 m에서 25.28 kPa이다.



GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

요약

핵심 정리

모서리: $\Delta\sigma_z = q\, I_3(m, n)$, $m = B/z$, $n = L/z$; 넓은 면적에서는 $I_3 \to 1/4$. **임의의 점:** 부호를 붙인 네 개의 모서리 직사각형, $\Delta\sigma_z = q\, \Sigma \pm I_3$

예제 (A′; z = 4 m): 4 m × 2 m − 1 m × 2 m: $I_3(0.5; 1) = 0.12018$; $I_3(0.25; 0.5) = 0.04753$; **$\Delta\sigma_z$ = 150 (0.07264) = 10.90 kPa**

중심: $\Delta\sigma_z = q\, I_4$; 정사각형, z = b: $I_4 = 4\, I_3(1, 1) = 0.701$; 3 × 2 m 직사각형, z = 4 m: **22.98 kPa**

위치(z = 4 m): 중심 22.98, 변의 중점 20.26과 18.08, 모서리 16.06, A′ 10.90, 먼 지점 3.91 kPa; 바깥쪽에서도 응력은 0이 아니다

형상: z = 4b에서 정사각형은 0.108 q, 10:1 직사각형은 0.303 q, 띠하중은 0.306 q. **두 직사각형:** 응력을 합산(10.90 + 10.90 = 21.79 kPa)

참고문헌

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Gauthier-Villars, Paris.

참고

수치 예제는 모두 모듈의 자체 계산 엔진으로 산출하였으며, 모듈도 동일한 값을 제공한다. 모듈의 초기 입력은 3 m × 2 m 직사각형(q = 150 kN/m²)과 A′점(x = 2.5 m; y = −1 m; z = 4 m)이다.

온라인 지반공학 계산

이론에서 실무로

직사각형(q, L, B, 중심), 점 A, 깊이를 GeoTerva에 직접 입력한다. 모듈은 네 모서리 항, $\Delta\sigma_z$ 값, 등응력선, 깊이 프로파일, 단계별 풀이와 보고서를 함께 제공한다.

모듈 열기 →

이론 페이지 →

스마트폰으로 열기

체험 모듈은 가입 없이 이용할 수 있습니다.

강의에서 사용하려면: info@geoterva.com