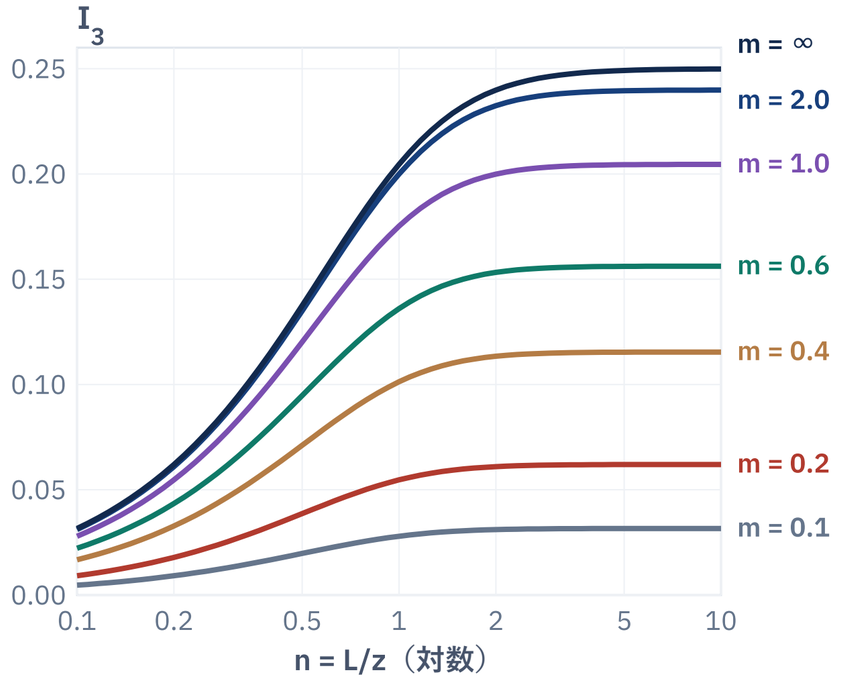
地盤工学の講義スライド・地盤内の応力

長方形荷重下の応力

講義：矩形荷重下の鉛直応力；角点解、重ね合わせおよび手計算の例題。

- 隅角部下・I_3
- 4つの長方形
- 中心下・I_4
- 集中荷重の外側
- 複数の長方形



はじめに

この講義で学ぶこと

等分布荷重を受ける**長方形領域**（フーチング、ラフト、スラブ）下の鉛直応力増分：**$\Delta\sigma_z$**

隅角点直下の**閉形式解**：$\Delta\sigma_z = q\,I_3$、I_3は $m = B/z$ と $n = L/z$ のみに依存する

任意の点に対して長方形の**加算と減算**：荷重は、点の上方に共通の角を持つ4つの長方形に分割される

中心の直下では直接I_4；正方形では$I_4 = 4\,I_3(1, 1) = 0.701$となることを照査する

複数の長方形による応力が**重ね合わされる**こと。長方形の形状（L/B）の影響

講義の流れ

各項目は**3つの手順**で扱う：

1 · **理論**：式とその根拠

2 · **問題**：与条件と求めるもの

3 · **解答**：数値を用いて手順ごとに

例題：3 m × 2 mの長方形、$q = 150$ kN/m²；点A′は短辺の1 m外側で、長辺の一方の方向にある；$z = 4$ m。

等分布荷重を受ける長方形領域

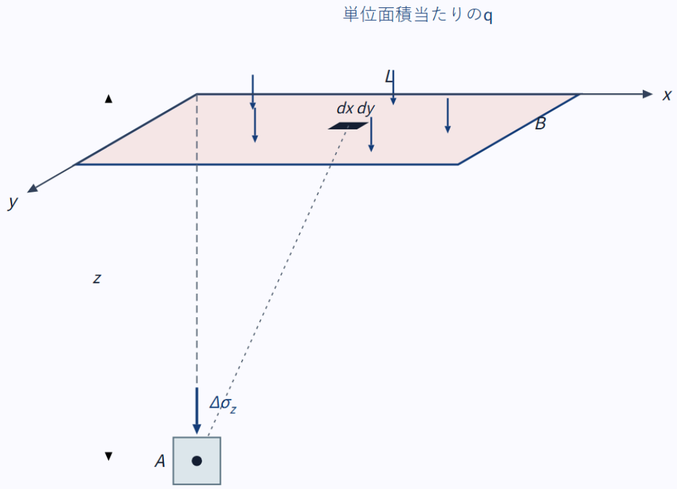
理論

フーチングやラフトの多くは**長方形である**；Boussinesq解を長方形上で積分すると、**隅角部の直下**の鉛直応力が閉形式で求められる

その他のすべての点については矩形を**加算および減算**する

一様分布圧力**q**を受ける**L × B**の寸法の柔軟な長方形基礎。地盤は均質・等方・線形弾性の半無限体である

Δ σ z は荷重のみによる応力増分である



Boussinesqの積分：$\Delta\sigma_z = q\,I_3$

理論

要素面積は**dq = q dx dy**の荷重を負担する。Boussinesqの式ではP = q dx dy、r² = x² + y²とおく。

$$d\sigma_z = \frac{3q\,dx\,dy\,z^3}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$\Delta\sigma_z = \int_0^B\int_0^L \frac{3q\,z^3\,dx\,dy}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} = q\,I_3$$

m = B/zおよび**n = L/z**。I_3はこの2つの比のみに依存する。

影響係数I_3

理論

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1}+\tan^{-1}\left(\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2-m^2n^2+1}\right)\right]$$

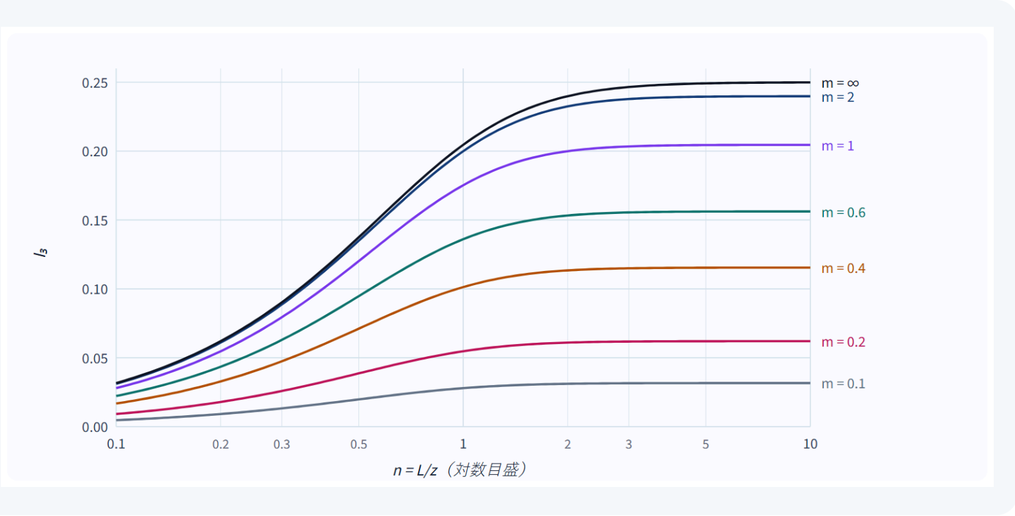
逆正接はラジアンで**正**の角度でなければならない：$m^2+n^2+1 < m^2n^2$のとき負になるため**πを加える**。

I_3はmとnに関して**対称**であり、非常に大きな長方形では**1/4**に近づく。すなわち、1つの角は無限領域の荷重の4分の1を負担する。

I_3の値

理論

n \ m	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	3.0
0.10	0.0047	0.0092	0.0198	0.0279	0.0311	0.0315
0.25	0.0113	0.0220	0.0475	0.0674	0.0752	0.0761
0.50	0.0198	0.0387	0.0840	0.1202	0.1350	0.1368
1.00	0.0279	0.0547	0.1202	0.1752	0.1999	0.2034
2.00	0.0311	0.0610	0.1350	0.1999	0.2325	0.2378
5.00	0.0316	0.0620	0.1374	0.2044	0.2395	0.2461



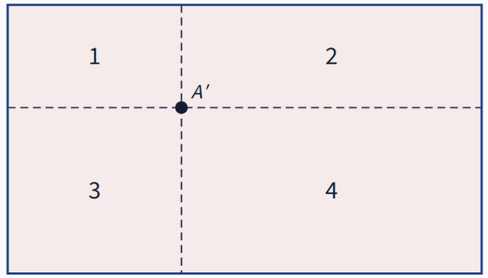
四隅の長方形

理論

$$\Delta\sigma_z = q\left[I_{3(1)} + I_{3(2)} + I_{3(3)} + I_{3(4)}\right]$$

載荷領域を、点A′の上方に**共通の隅角**をもつ長方形に分割する；隅角応力を合計する

A′が領域の**外側**にある場合、長方形の一部は領域を越えて延び、**差し引かれる**。モジュールは各点で符号付き距離を用いて集中荷重から長方形の角まで四つの長方形を描き、各I_3はその二辺の積の符号をとる



載荷面の平面図；
A′は4つすべての矩形の
隅角部（矩形1–4）

中心直下：I_4

理論

$$\Delta\sigma_z = q\,I_4, \quad I_4 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{m_1 n_1}{\sqrt{1+m_1^2+n_1^2}}\,\frac{1+m_1^2+2n_1^2}{(1+n_1^2)(m_1^2+n_1^2)} + \sin^{-1}\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\,\sqrt{1+n_1^2}}\right]$$

中心の下では4つの矩形が**等しい**。結果は直接書き下せる：**m_1 = L/B**、**n_1 = z/b**、b = B/2（L ≥ B）

深さz = bにおける正方形に対して**I_4 = 0.701 = 4 I_3(1, 1)**

重ね合わせ

理論

各長方形は自身の**q、L、B**および地盤上の中心（x_c、y_c）で定義される（モジュールでは最大8個）

2つの長方形は辺で**接することはできるが重なってはならない**

地盤は弾性であるため、各長方形の応力は**4つの隅角長方形**から求め、応力を合計する

$$\Delta\sigma_z = \sum_k q_k \sum \pm I_3 \quad \text{（四隅）}$$

問題

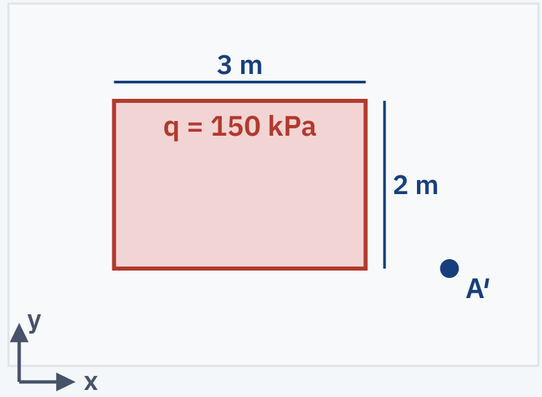
例題

与条件

長方形	3×2 m（x方向に$L = 3$ m、y方向に$B = 2$ m）、$q = 150$ kN/m²、原点を中心とする
点A′	短辺の1 m外側、長辺の一つの方向に沿って：$x = 2.5$ m、$y = -1$ m；$z = 4$ m

求めるもの

$\Delta\sigma_z$：四隅の矩形により求める。2つのI_3値を詳細に計算する。



解答 (1/3)

解答

1 A′から荷重の四隅までの距離（z = 4 m）

隅角 (x; y)	$a = x - x_{A'}$	$b = y - y_{A'}$	$m = \lvert a \rvert / z$	$n = \lvert b \rvert / z$	符号
(1.5; 1.0)	−1.0	2.0	0.25	0.50	−
(1.5; -1.0)	−1.0	0.0	0.25	0.00	0 (b = 0)
(-1.5; 1.0)	−4.0	2.0	1.00	0.50	+
(-1.5; -1.0)	−4.0	0.0	1.00	0.00	0 (b = 0)

2 2つの長方形が残る：A′は共通の角

$$\Delta\sigma_z = q\,[I_3(0.5;\,1) - I_3(0.25;\,0.5)] \qquad 4\ \text{m} \times 2\ \text{m} \;-\; 1\ \text{m} \times 2\ \text{m}$$

b = 0の2つの角は寄与しない。**4 m × 2 m**の長方形ではm = B/z = 2/4 = 0.5、n = L/z = 4/4 = 1；**1 m × 2 m**の長方形ではm = 1/4 = 0.25、n = 2/4 = 0.5。I_3は対称であるため、(1; 0.5)と(0.5; 1)は同じである。

解答 (2/3)

解答

補間	$I_3(0.5; 1)$	$I_3(0.25; 0.5)$
m ; n	0.50 ; 1.00	0.25 ; 0.50
m^2 ; n^2	0.2500 ; 1.0000	0.0625 ; 0.2500
$S_1 = m^2 + n^2 + 1$	2.2500	1.3125
$\sqrt{S_1}$	1.5000	1.1456
$2mn\sqrt{S_1}$	1.5000	0.2864
$S_2 = m^2 + n^2 + m^2n^2 + 1$	2.5000	1.3281
$(m^2 + n^2 + 2)/S_1$	1.4444	1.7619
第1項 $= 2mn\sqrt{S_1} / S_2 \cdot (m^2 + n^2 + 2)/S_1$	0.8667	0.3800
$D = m^2 + n^2 + 1 - m^2n^2$	2.0000	1.2969
$2mn\sqrt{S_1} / D$	0.7500	0.2208
$\tan^{-1}(\dots)$ (rad)	0.6435	0.2174
I_3 = (第1項 + $\tan^{-1}$)/(4π)	**0.12018**	**0.04753**

$I_3(0.5; 1) = 0.12018$および**$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753$**。両方の角度でD > 0であるから、逆正接は正となり、πを加える必要はない。

解答 (3/3)

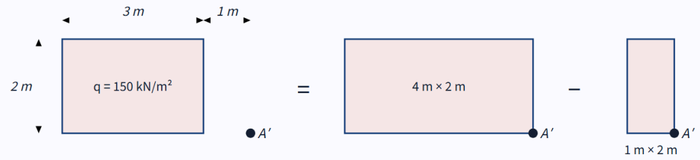
解答

3 差と応力

$$\Delta\sigma_z = 150\,(0.12018 - 0.04753) = 150\,(0.07264)$$

$$\Delta\sigma_z = 18.03 - 7.13 = \mathbf{10.90}\ \text{kPa}$$

A′点において **Δ σ z = 10.90 kPa**（Δ σ z/q = 0.07264）。モジュールはこの例題で開く。長方形と点を同じ距離だけともに移動させても（中心4；3 m、点6.5；2 m）応力は変化しない：10.90 kPa。



GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

例題

与条件

(a) 正方形

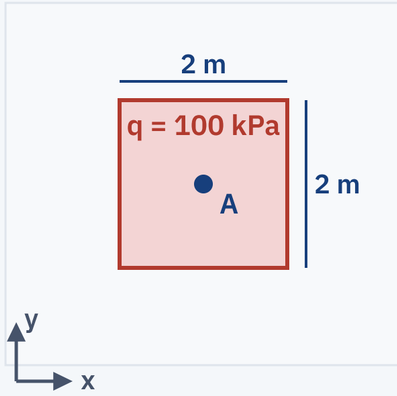
2×2 m、$q = 100$ kN/m²；中心直下$z = 1$ m $(n_1 = z/b = 1)$

(b) 長方形

3×2 m、$q = 150$ kN/m²；中心直下$z = 4$ m $(m_1 = L/B = 1.5$；$n_1 = 4)$

求めるもの

(a) $I_4 = 4\,I_3(1, 1)$の照査；(b) I_4と$\Delta\sigma_z$；4隅の合計との比較。



解答 (1/2)

解答

1 4つの等しい矩形（各1 m × 1 m、z = 1 m）：$I_3(1,\,1)$；$S_1 = 3$、$\sqrt{S_1} = 1.7321$、$2mn\sqrt{S_1} = 3.4641$、$S_2 = 4$

$$\text{第1項} = \frac{3.4641}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1.1547 \qquad \tan^{-1}\frac{3.4641}{3-1} = \tan^{-1}(1.7321) = 1.0472$$

$$I_3 = \frac{1.1547 + 1.0472}{4\pi} = \mathbf{0.17522}$$

2 中心式による照査（$m_1 = 1$；$n_1 = 1$）

$$4\,I_3 = 4\,(0.17522) = 0.70089$$

$$I_4 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{4} + \sin^{-1}\frac{1}{2}\right] = \frac{2}{\pi}\,(0.5774 + 0.5236) = \mathbf{0.70089}$$

正方形の場合、**$I_4 = 4\,I_3(1,\,1) = 0.70089 \approx 0.701$**。この例では中心直下の応力は載荷圧力の70.1%に等しい（z = b）。

解答 (2/2)

解答

1 I_4: m_1 = L/B = 1.5; n_1 = z/b = 4 (b = 1 m); $m_1^2 + n_1^2 = 18.25$

$$\frac{m_1 n_1}{\sqrt{1+m_1^2+n_1^2}} = \frac{6}{4.3875} = 1.3675 \qquad \frac{1+m_1^2+2n_1^2}{(1+n_1^2)(m_1^2+n_1^2)} = \frac{35.25}{310.25} = 0.1136$$

$$\sin^{-1}\frac{1.5}{\sqrt{18.25}\sqrt{17}} = 0.0853 \qquad I_4 = \frac{2}{\pi}(0.1554 + 0.0853) = \mathbf{0.15320}$$

2 Δ σ_zと四隅の和で照査する

$$\Delta\sigma_z = 150\,(0.15320) = \mathbf{22.98}\ \text{kPa} \qquad 4\,I_3(0.25;\,0.375) = 4\,(0.03830) = 0.15320$$

中心下では**Δ σ_z = 22.98 kPa**となる（Δ σ_z/q = 0.15320）。同じ結果は4つの等しい隅角矩形（それぞれ1.5 m × 1 m）によっても得られる：4 I_3(0.25; 0.375)。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

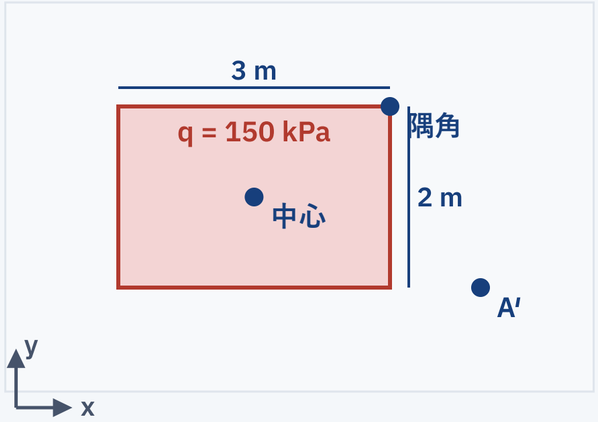
例題

与条件

長方形	3×2 m, $q = 150$ kN/m²
点	**中心** $(0; 0)$、**隅角** $(1.5;\ 1)$、**A′** $(2.5;\ -1)$
深さ	$z = 1; 2; 4; 6; 8; 12$ m

求めるもの

3点における $\Delta \sigma_z$ と $\Delta \sigma_z/q$；深さによる変化の解釈。



解答 (1/2)

解答

z (m)	中心 $\Delta\sigma_z$	隅角部の $\Delta\sigma_z$	A′ $\Delta\sigma_z$	中心 /q	隅角部/q	A′ /q
1	116.19	35.67	5.88	0.7746	0.2378	0.0392
2	64.24	29.05	11.96	0.4283	0.1936	0.0798
4	22.98	16.06	10.90	0.1532	0.1071	0.0726
6	11.10	9.19	7.41	0.0740	0.0612	0.0494
8	6.44	5.74	5.03	0.0429	0.0383	0.0335
12	2.93	2.78	2.60	0.0195	0.0185	0.0174

中心および**隅角**の下では応力は深さとともに一方向に減少する（z = 4 mで22.98および16.06 kPa）。隅角/中心の比はz = 4 mで0.70、z = 12 mで0.95である。**A′**（載荷面の外側）ではz = 1 mで5.88 kPaであるが、z ≈ 2.50 mで最大値（12.64 kPa）に達した後、減少する。

解答 (2/2)

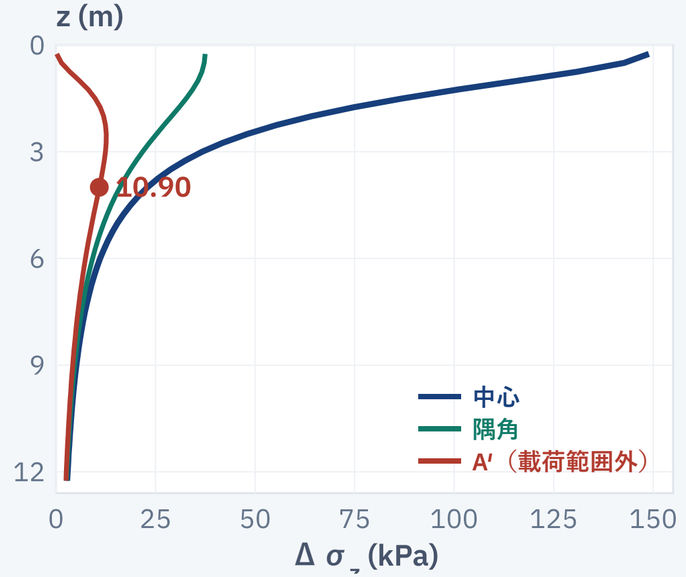
解答

1 z = 4 m の行：3点

$$\text{中心：}\quad 150\,(0.15320) = 22.98\ \text{kPa}$$

$$\text{隅角部：}\quad 150\,I_3(0.5;\,0.75) = 16.06\ \text{kPa} \qquad \text{A}'\text{：}\quad 10.90\ \text{kPa}$$

地表近くでは中央直下で≈q、隅角直下で≈q/4に近づく。深さが増すと3本の曲線は互いに近づく：z = 12 mで2.93、2.78、2.60 kPa。



GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

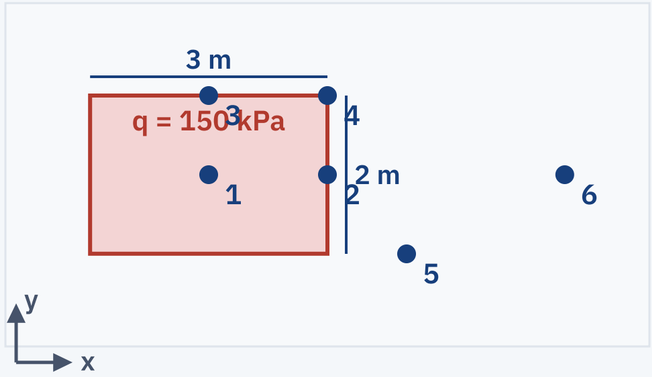
例題

与条件

長方形	3×2 m, $q = 150$ kN/m², $z = 4$ m
点	(1) 中央；(2) 短辺の中央；(3) 長辺の中央；(4) 隅角部；(5) A′；(6) $(4.5;\ 0)$

求めるもの

各点における符号付きのI_3の項、合計および$\Delta\sigma_z$。



解答 (1/2)

解答

点	(x; y)	項1	項2	項3	項4	$\Sigma \pm I_3$	$\Delta \sigma_z$ (kPa)
1	(0.0; 0)	0.0383	0.0383	0.0383	0.0383	0.1532	**22.98**
2	(1.5; 0)	0	0	0.0603	0.0603	0.1205	**18.08**
3	(0.0; 1)	0	0.0675	0	0.0675	0.1351	**20.26**
4	(1.5; 1)	0	0	0	0.1071	0.1071	**16.06**
5	(2.5; -1)	−0.0475	0	0.1202	0	0.0726	**10.90**
6	(4.5; 0)	−0.0603	−0.0603	0.0733	0.0733	0.0261	**3.91**

内部の点(1)では4つの項がすべて**+**であり、辺上の点(2, 3)では2つの項がゼロとなり、隅角部(4)では1つの項だけが残り、外部(5, 6)では一部の項が**−**となる。順序：22.98 > 18.08 > 20.26 > 16.06 > 10.90 > 3.91 kPa。

解答 (2/2)

解答

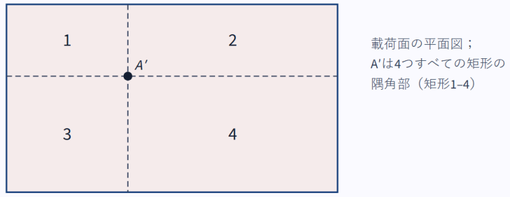
1 隅角（4）：単一の矩形（3 m × 2 m）

$$\Delta\sigma_z = q\, I_3(m = 0.5;\, n = 0.75) = 150\,(0.10707) = \mathbf{16.06}\ \text{kPa}$$

2 遠方の点(6)：(4.5; 0)、荷重の3 m先

$$\Delta\sigma_z = q \cdot 2\,[\,I_3(1.5;\,0.25) - I_3(0.75;\,0.25)\,]$$
$$= 150 \cdot 2\,(0.07329 - 0.06026) = \mathbf{3.91}\ \text{kPa}$$

隅角／中心の応力比は0.699；荷重から3 m離れた点(6)でも3.91 kPaが残る：載荷領域の外でも応力はゼロではない。



載荷面の平面図；
A′は4つすべての矩形の
隅角部（矩形1–4）

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

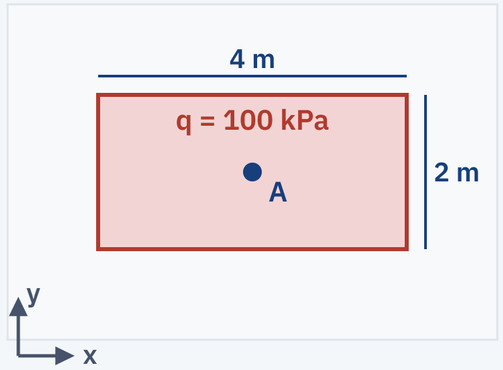
例題

与条件

長方形	$B = 2\,\mathrm{m}$（$b = 1\,\mathrm{m}$）、$L/B = 1\,;\,2\,;\,5\,;\,10$ および$L \to \infty$（帯状）
点	中心直下、$n_1 = z/b = 0.5\,;\,1\,;\,2\,;\,4$

求めるもの

中心直下では $\Delta\,\sigma_z/q = I_4$。帯状荷重との比較。



解答 (1/2)

解答

$n_1 = z/b$	L/B = 1	L/B = 2	L/B = 5	L/B = 10	帯状（L/B → ∞）
0.5	0.9299	0.9565	0.9594	0.9595	**0.9595**
1.0	0.7009	0.7998	0.8176	0.8183	**0.8183**
2.0	0.3361	0.4807	0.5451	0.5495	**0.5498**
4.0	0.1081	0.1901	0.2848	0.3034	**0.3058**

地表面付近（$n_1 = 0.5$）では形状の影響はほとんどない（0.930 – 0.959）。深部では**短い**長方形の応力ははるかに速く減衰する：$n_1 = 4$では正方形で0.108、帯状で0.306である。

解答 (2/2)

解答

1 I_4の式（$m_1 = 2$；$n_1 = 1$）

$$m_1^2 + n_1^2 = 5 \qquad \frac{m_1 n_1}{\sqrt{1+5}} = \frac{2}{2.4495} = 0.8165 \qquad \frac{1+4+2}{(1+1)(5)} = 0.70$$

$$\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = 0.6847 \qquad I_4 = \frac{2}{\pi}\left(0.5715 + 0.6847\right) = \mathbf{0.79976}$$

2 4つの等しい隅角矩形（各2 m × 1 m、z = 1 m）を用いる

$$4\, I_3(1;\, 2) = 4\,(0.19994) = \mathbf{0.79976}$$

L/B = 2の長方形の中心において、深さz = bで**Δ σ_z/q = 0.7998**（正方形：0.7009；帯状：0.8183）。L/B = 10の場合（$n_1 = 1$）は0.81826、帯状は0.81831であり、長方形が長くなるほど帯状に近づく。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

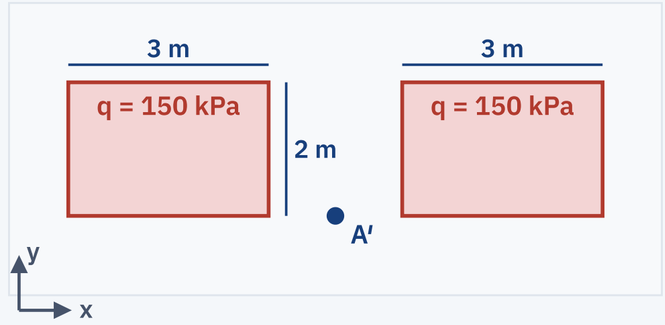
例題

与条件

長方形1	3×2 m、$q = 150$ kN/m²、中心 $x = 0$
長方形2	3×2 m、$q = 150$ kN/m²、中心$x = 5$ m（$y = 0$）
点	A′：$x = 2.5$ m、$y = -1$ m；$z = 4$ m（さらに1；2；6；8；12 m）

求めるもの

各矩形および合計の $\Delta \sigma_z$；深さ方向の分布。



解答 (1/2)

解答

1 長方形2：A′に対する符号付きの角（中心間5 m ≥ $(L_1 + L_2)/2$ = 3 m：重複なし）

隅角 (x; y)	a	b	m	n	符号
(6.5; 1.0)	4.0	2.0	1.00	0.50	+
(6.5; -1.0)	4.0	0.0	1.00	0.00	0 (b = 0)
(3.5; 1.0)	1.0	2.0	0.25	0.50	−
(3.5; -1.0)	1.0	0.0	0.25	0.00	0 (b = 0)

2 重ね合わせ

$$\Delta\sigma_{z(2)} = 150\,[I_3(1;\,0.5) - I_3(0.25;\,0.5)] = 10.896 \text{ kPa}$$

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 10.896 + 10.896 = \mathbf{21.793} \text{ kPa}$$

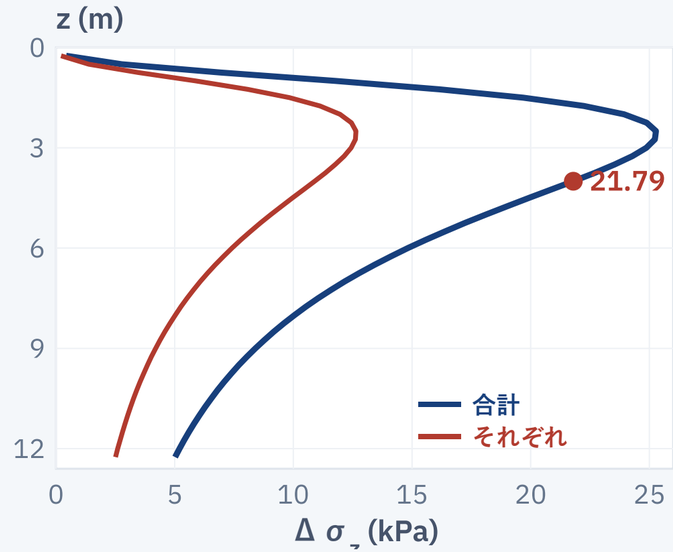
A′は2つの長方形のちょうど中点にある（x = 2.5 m、それぞれから1 m）：長方形2は長方形1の**鏡像**であり、同じ応力を与える。合計 **$\Delta\,\sigma_z$ = 21.79 kPa**。

解答 (2/2)

解答

z (m)	長方形1	長方形2	合計
1	5.877	5.877	**11.754**
2	11.965	11.965	**23.930**
4	10.896	10.896	**21.793**
6	7.413	7.413	**14.826**
8	5.028	5.028	**10.056**
12	2.603	2.603	**5.205**

z = 4 mでの全応力は**21.79 kPa**。2つの長方形は対称であるため、どの深さでも全応力 = 2 × 単一長方形となる。全応力の最大値はz ≈ 2.50 mで25.28 kPaである。



GeoTervaで解答を確認する ↗

まとめ

ポイントのまとめ

角点： $\Delta \sigma_z = q\, I_3(m, n)$、$m = B/z$、$n = L/z$。大きな領域では$I_3 \to 1/4$。**任意点：**符号付き四角点矩形により、$\Delta \sigma_z = q \sum \pm I_3$

例（A′；z = 4 m）：4 m × 2 m − 1 m × 2 m：$I_3(0.5；1) = 0.12018$；$I_3(0.25；0.5) = 0.04753$；**$\Delta \sigma_z = 150\,(0.07264) = 10.90$ kPa**

中心： $\Delta \sigma_z = q\, I_4$；正方形、z = b：$I_4 = 4\, I_3(1, 1) = 0.701$；3 × 2 mの長方形、z = 4 m：**22.98 kPa**

位置（z = 4 m）：中央22.98、辺中央20.26および18.08、隅角16.06、A′ 10.90、遠点3.91 kPa。領域外でも応力はゼロではない

形状：z = 4bにおいて正方形は0.108 q、10:1の長方形は0.303 q、帯状は0.306 q。**2つの長方形：**応力は重ね合わせられる（10.90 + 10.90 = 21.79 kPa）

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Gauthier-Villars, Paris.

注記

数値例はすべてモジュール自身の計算エンジンで生成した；モジュールは同じ値を与える。モジュールは3 m × 2 mの矩形（q = 150 kN/m²）と点A′（x = 2.5 m；y = −1 m；z = 4 m）で開く。

GeoTerva

オンライン地盤工学計算

理論から実務へ

矩形（q, L, B, 中心）、点Aおよび深さをGeoTervaに入力する；モジュールは四隅の項、$\Delta \sigma_z$ の値、等応力曲線、深さ方向の分布、手順ごとの解答およびレポートをまとめて与える。

モジュールを開く →

理論ページ →

スマートフォンで開く

お試しモジュールは登録不要です。

講義で使用したい場合：info@geoterva.com