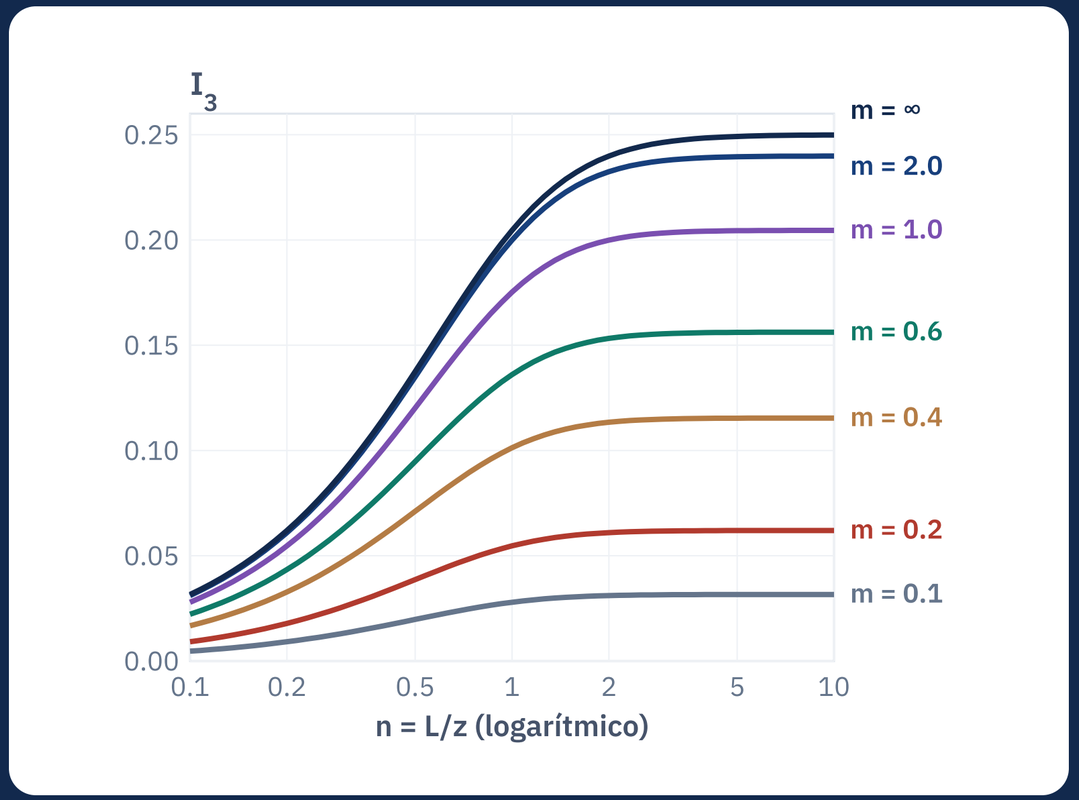
Presentación de clase de geotecnia · Tensiones en la masa de suelo

Tensión bajo una carga rectangular

Clase: tensión vertical bajo una carga rectangular; solución en la esquina, superposición y ejemplos resueltos a mano.

- Bajo la esquina · I_3
- Cuatro rectángulos
- Bajo el centro · I_4
- Fuera de la carga puntual
- Varios rectángulos



Se basa en la página de teoría de GeoTerva · geoterva.com

Introducción

¿Qué aprenderemos en esta clase?

El incremento de tensión vertical bajo un **área rectangular** con carga uniformemente repartida (zapata, losa de cimentación, losa): $\Delta\sigma_z$

Solución cerrada bajo la esquina: $\Delta\sigma_z = q\, I_3$, I_3 depende solo de $m = B/z$ y $n = L/z$

Para **un punto cualquiera**, la **suma y resta** de rectángulos: la carga se divide en cuatro rectángulos con una esquina común sobre el punto

Bajo el centro, directamente I_4; para un cuadrado, comprobación de $I_4 = 4\, I_3(1, 1) = 0.701$

Comprender que las tensiones de varios rectángulos se **suman**; el efecto de la forma del rectángulo (L/B)

DESARROLLO DE LA CLASE

Cada tema se desarrolla en **tres pasos**:

1 · **Teoría**: fórmula y su justificación

2 · **Enunciado**: datos y se pide

3 · **Solución**: paso a paso, con números

Ejemplo: rectángulo de 3 m × 2 m, q = 150 kN/m²; el punto A′ está a 1 m más allá del lado corto, alineado con uno de los lados largos; z = 4 m.

Rectángulo con carga uniformemente distribuida

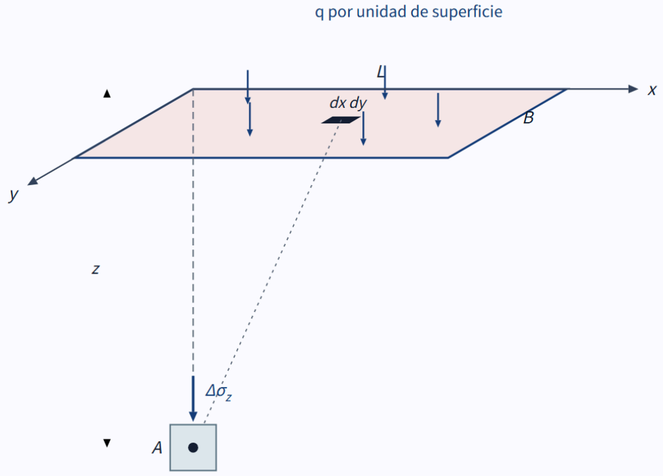
TEORÍA

La mayoría de las zapatas y de las losas de cimentación son **rectangulares**; al integrar la solución de Boussinesq sobre un rectángulo, la tensión vertical **bajo una esquina** se obtiene en forma cerrada

Para todos los demás puntos los rectángulos se **suman y se restan**

Rectángulo flexible de dimensiones **L × B** que soporta una presión **q** uniformemente distribuida; el terreno es un medio semiinfinito homogéneo, isótropo y elástico lineal

$\Delta\sigma_z$ es únicamente el incremento de tensión producido por la carga



Integral de Boussinesq: $\Delta\sigma_z = q\, I_3$

TEORÍA

El área elemental soporta la carga **dq = q dx dy**; en la ecuación de Boussinesq se toma P = q dx dy y $r^2 = x^2 + y^2$

$$d\sigma_z = \frac{3q\,dx\,dy\,z^3}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}}$$

$$\Delta\sigma_z = \int_0^B \int_0^L \frac{3q\,z^3\,dx\,dy}{2\pi\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} = q\,I_3$$

m = B/z y **n = L/z**; I_3 depende solo de estas dos relaciones

Factor de influencia I_3

TEORÍA

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1}+\tan^{-1}\left(\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2-m^2n^2+1}\right)\right]$$

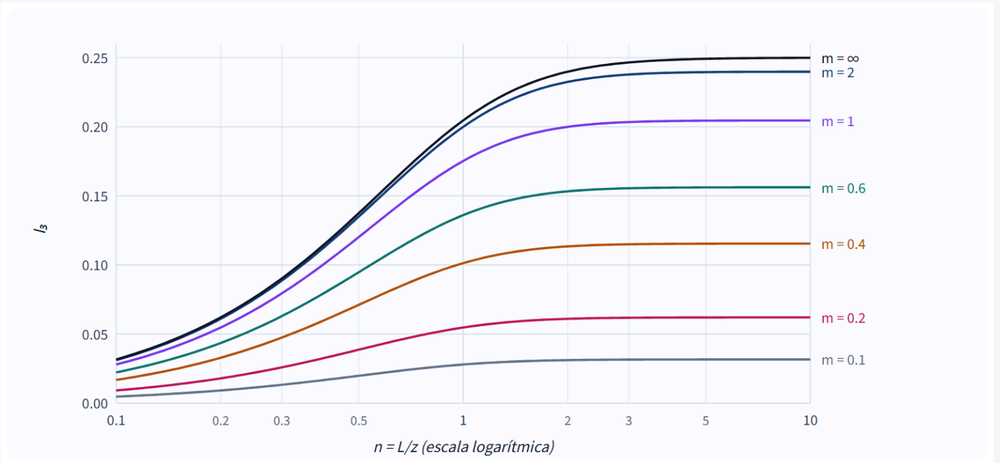
La arcotangente debe ser un ángulo **positivo** en radianes: cuando $m^2 + n^2 + 1 < m^2n^2$ resulta negativa y **se suma π**

I_3 es **simétrico** en m y n; para un rectángulo muy grande tiende a **1/4**: una esquina soporta la cuarta parte de la carga de un área infinita

Valores de I_3

TEORÍA

n \ m	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0	3.0
0.10	0.0047	0.0092	0.0198	0.0279	0.0311	0.0315
0.25	0.0113	0.0220	0.0475	0.0674	0.0752	0.0761
0.50	0.0198	0.0387	0.0840	0.1202	0.1350	0.1368
1.00	0.0279	0.0547	0.1202	0.1752	0.1999	0.2034
2.00	0.0311	0.0610	0.1350	0.1999	0.2325	0.2378
5.00	0.0316	0.0620	0.1374	0.2044	0.2395	0.2461



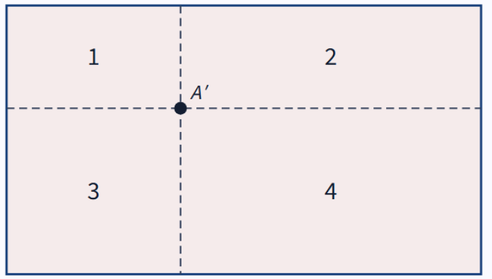
Rectángulo de cuatro esquinas

TEORÍA

$$\Delta\sigma_z = q\left[I_{3(1)} + I_{3(2)} + I_{3(3)} + I_{3(4)}\right]$$

El área cargada se divide en rectángulos que tienen una **esquina común** sobre el punto A′; se suman las tensiones en la esquina

Si A′ está **fuera** del área, parte de los rectángulos se extiende más allá del área y se **resta**; el módulo traza, desde el punto hasta las esquinas de la carga, los cuatro rectángulos con distancias con signo en cada punto, y cada I_3 toma el signo del producto de sus dos lados



planta del área cargada; A′ es esquina de los cuatro rectángulos 1–4

Bajo el centro: I_4

TEORÍA

$$\Delta\sigma_z = q\, I_4, \quad I_4 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{m_1 n_1}{\sqrt{1+m_1^2+n_1^2}}\,\frac{1+m_1^2+2n_1^2}{(1+n_1^2)(m_1^2+n_1^2)} + \sin^{-1}\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\,\sqrt{1+n_1^2}}\right]$$

Bajo el centro, los cuatro rectángulos son **iguales**; el resultado se escribe directamente: **m_1 = L/B**, **n_1 = z/b**, b = B/2 (L ≥ B)

Para un cuadrado a profundidad z = b, **I_4 = 0.701 = 4 I_3(1, 1)**

Superposición

TEORÍA

Cada rectángulo se define mediante su propio **q, L, B** y su centro sobre el terreno (x_c, y_c) (como máximo ocho en el módulo)

Dos rectángulos **pueden compartir un borde, pero no solaparse**

Como el terreno es elástico, la tensión de cada rectángulo se obtiene de sus propios **cuatro rectángulos de esquina** y las tensiones se suman

$$\Delta\sigma_z = \sum_k q_k \sum \pm I_3 \text{ (cuatro esquinas)}$$

Enunciado

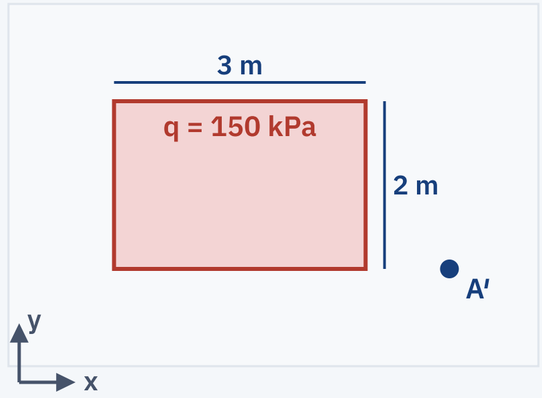
EJEMPLO

Datos

Rectangular	3×2 m ($L = 3$ m en la dirección x, $B = 2$ m en la dirección y), $q = 150$ kN/m², con centro en el origen
Punto A′	a 1 m más allá del lado corto, en la dirección de uno de los lados largos: $x = 2.5$ m, $y = -1$ m; $z = 4$ m

SE PIDE

$\Delta\sigma_z$: por el método de las cuatro esquinas; cálculo detallado de los dos valores de I_3.



Solución (1/3)

SOLUCIÓN

1 Distancias con signo desde A′ hasta las cuatro esquinas de la carga (z = 4 m)

Esquina (x; y)	a = x − $x_{A'}$	b = y − $y_{A'}$	m = |a|/z	n = |b|/z	signo
(1.5; 1.0)	−1.0	2.0	0.25	0.50	–
(1.5; -1.0)	−1.0	0.0	0.25	0.00	0 (b = 0)
(-1.5; 1.0)	−4.0	2.0	1.00	0.50	+
(-1.5; -1.0)	−4.0	0.0	1.00	0.00	0 (b = 0)

2 Quedan dos rectángulos: A′ es la esquina común

$$\Delta\sigma_z = q\,[I_3(0.5;\,1) - I_3(0.25;\,0.5)] \qquad 4\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m} \;-\; 1\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$$

Las dos esquinas con b = 0 no aportan. Para el rectángulo de **4 m × 2 m**, m = B/z = 2/4 = 0.5; n = L/z = 4/4 = 1; para el rectángulo de **1 m × 2 m**, m = 1/4 = 0.25; n = 2/4 = 0.5. Como I_3 es simétrica, (1; 0.5) y (0.5; 1) son equivalentes.

Solución (2/3)

SOLUCIÓN

Interpolación	$I_3(0.5; 1)$	$I_3(0.25; 0.5)$
m ; n	0.50 ; 1.00	0.25 ; 0.50
m^2 ; n^2	0.2500 ; 1.0000	0.0625 ; 0.2500
$S_1 = m^2 + n^2 + 1$	2.2500	1.3125
$\sqrt{S_1}$	1.5000	1.1456
$2mn\sqrt{S_1}$	1.5000	0.2864
$S_2 = m^2 + n^2 + m^2n^2 + 1$	2.5000	1.3281
$(m^2 + n^2 + 2)/S_1$	1.4444	1.7619
1.er término = $2mn\sqrt{S_1} / S_2 \cdot (m^2 + n^2 + 2)/S_1$	0.8667	0.3800
$D = m^2 + n^2 + 1 - m^2n^2$	2.0000	1.2969
$2mn\sqrt{S_1} / D$	0.7500	0.2208
$\tan^{-1}(\ldots)$ (rad)	0.6435	0.2174
I_3 = (primer término + $\tan^{-1}$)/(4π)	**0.12018**	**0.04753**

$I_3(0.5; 1) = 0.12018$ e **$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753$**. Como D > 0 en ambos ángulos, la arcotangente es positiva; no hace falta sumar π.

Solución (3/3)

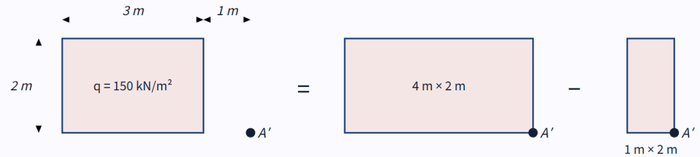
SOLUCIÓN

3 Diferencia y tensión

$$\Delta\sigma_z = 150\,(0.12018 - 0.04753) = 150\,(0.07264)$$

$$\Delta\sigma_z = 18.03 - 7.13 = \mathbf{10.90}\ \text{kPa}$$

En el punto A′, **$\Delta\sigma_z$ = 10.90 kPa** ($\Delta\sigma_z$/q = 0.07264). El módulo se abre con este ejemplo; si el rectángulo y el punto se desplazan juntos la misma distancia (centro 4; 3 m, punto 6.5; 2 m), la tensión no cambia: 10.90 kPa.



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

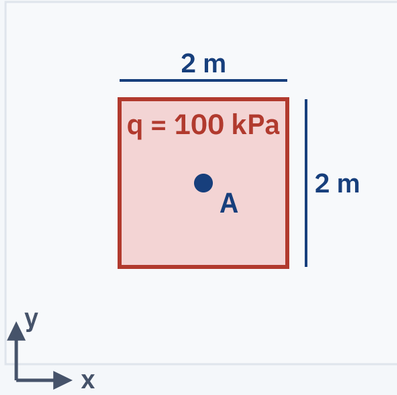
EJEMPLO

Datos

(a) Cuadrada	2×2 **m,** $q = 100$ **kN/m²; bajo el centro** $z = 1$ **m (**$n_1 = z/b = 1$**)**
(b) Rectangular	3×2 **m,** $q = 150$ **kN/m²; bajo el centro** $z = 4$ **m (**$m_1 = L/B = 1.5$**;** $n_1 = 4$**)**

SE PIDE

(a) comprobación de $\mathbf{I_4 = 4\, I_3(1,\, 1)}$; (b) $\mathbf{I_4}$ y $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; comparación con la suma de las cuatro esquinas.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 Cuatro rectángulos iguales (cada uno de 1 m × 1 m, z = 1 m): $I_3(1, 1)$; $S_1 = 3$, $\sqrt{S_1} = 1.7321$, $2mn\sqrt{S_1} = 3.4641$, $S_2 = 4$

$$1.\text{er término} = \frac{3.4641}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1.1547 \qquad \tan^{-1}\frac{3.4641}{3-1} = \tan^{-1}(1.7321) = 1.0472$$

$$I_3 = \frac{1.1547 + 1.0472}{4\pi} = \mathbf{0.17522}$$

2 Comprobación con la fórmula del centro ($m_1 = 1$; $n_1 = 1$)

$$4\,I_3 = 4\,(0.17522) = 0.70089$$

$$I_4 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{4} + \sin^{-1}\frac{1}{2}\right] = \frac{2}{\pi}\,(0.5774 + 0.5236) = \mathbf{0.70089}$$

Para el cuadrado, **$I_4 = 4\ I_3(1, 1) = 0.70089 \approx 0.701$**. En este ejemplo, la tensión bajo el centro es igual al 70.1% de la presión de la carga (z = b).

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

1 I_4: $m_1 = L/B = 1.5$; $n_1 = z/b = 4$ ($b = 1$ m); $m_1^2 + n_1^2 = 18.25$

$$\frac{m_1 n_1}{\sqrt{1 + m_1^2 + n_1^2}} = \frac{6}{4.3875} = 1.3675 \qquad \frac{1 + m_1^2 + 2n_1^2}{(1 + n_1^2)(m_1^2 + n_1^2)} = \frac{35.25}{310.25} = 0.1136$$

$$\sin^{-1} \frac{1.5}{\sqrt{18.25}\sqrt{17}} = 0.0853 \qquad I_4 = \frac{2}{\pi}\,(0.1554 + 0.0853) = \mathbf{0.15320}$$

2 Comprobación con $\Delta\sigma_z$ y la suma de las cuatro esquinas

$$\Delta\sigma_z = 150\,(0.15320) = \mathbf{22.98}\ \text{kPa} \qquad 4\,I_3(0.25;\ 0.375) = 4\,(0.03830) = 0.15320$$

Bajo el centro, **$\Delta\sigma_z$ = 22.98 kPa** ($\Delta\sigma_z/q = 0.15320$). El mismo resultado se obtiene también con cuatro rectángulos de esquina iguales (de 1.5 m × 1 m cada uno): 4 $I_3(0.25; 0.375)$.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

EJEMPLO

Datos

Rectangular	3×2 **m,** $q = 150$ **kN/m²**
Puntos	**centro** $(0; 0)$**, esquina** $(1.5;\ 1)$ **y A′** $(2.5;\ -1)$
Profundidades	$z = 1; 2; 4; 6; 8; 12$ **m**

SE PIDE

$\Delta\sigma_z$ y $\Delta\sigma_z/q$ en tres puntos; interpretación de la variación con la profundidad.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

z (m)	$\Delta\sigma_z$ en el centro	$\Delta\sigma_z$ en la esquina	A′ $\Delta\sigma_z$	Centro /q	Esquina /q	A′ /q
1	116.19	35.67	5.88	0.7746	0.2378	0.0392
2	64.24	29.05	11.96	0.4283	0.1936	0.0798
4	22.98	16.06	10.90	0.1532	0.1071	0.0726
6	11.10	9.19	7.41	0.0740	0.0612	0.0494
8	6.44	5.74	5.03	0.0429	0.0383	0.0335
12	2.93	2.78	2.60	0.0195	0.0185	0.0174

Bajo el **centro** y la **esquina** la tensión disminuye con la profundidad en un solo sentido (22.98 y 16.06 kPa a z = 4 m); la relación esquina / centro es 0.70 a z = 4 m y 0.95 a z = 12 m. En **A′** (fuera de la carga) vale 5.88 kPa a z = 1 m, alcanza su valor máximo (12.64 kPa) hacia z ≈ 2.50 m y luego disminuye.

Solución (2/2)

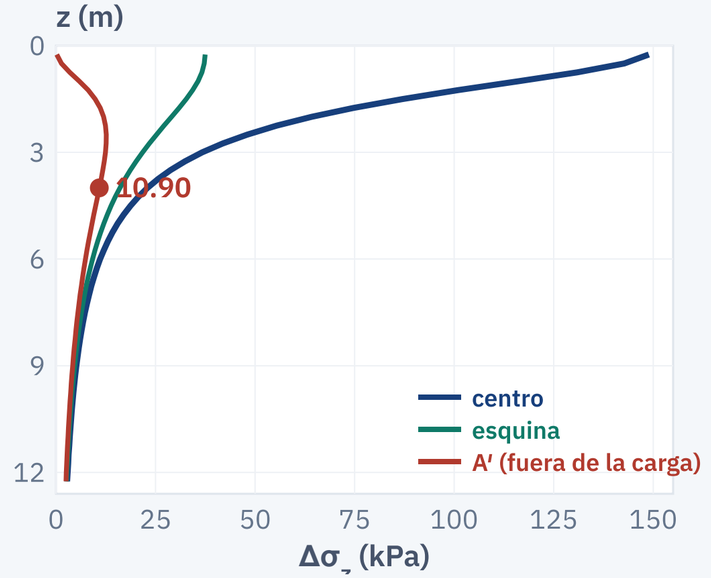
SOLUCIÓN

1 Fila z = 4 m: tres puntos

$$\text{centro:}\;\; 150\,(0.15320) = 22.98\ \text{kPa}$$

$$\text{esquina:}\;\; 150\,I_3(0.5;\,0.75) = 16.06\ \text{kPa} \qquad \text{A}' :\;\; 10.90\ \text{kPa}$$

Cerca de la superficie, bajo el centro la tensión se aproxima a ≈ q y bajo la esquina a ≈ q/4; en profundidad las tres curvas se aproximan: a z = 12 m, 2.93, 2.78 y 2.60 kPa.



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

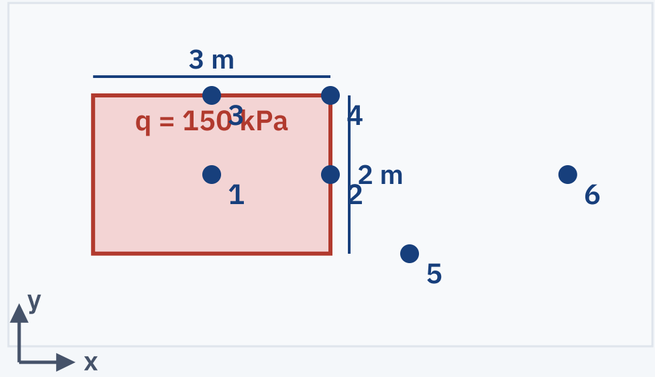
EJEMPLO

Datos

Rectangular	3×2 **m,** $q = 150$ **kN/m²,** $z = 4$ **m**
Puntos	**(1) centro; (2) punto medio del lado corto; (3) punto medio del lado largo; (4) esquina; (5) A′; (6)** $(4.5;\ 0)$

SE PIDE

Términos I_3 con signo en cada punto, el total y $\Delta\sigma_z$.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

Punto	(x; y)	Término 1	Término 2	Término 3	Término 4	$\Sigma \pm I_3$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1	(0.0; 0)	0.0383	0.0383	0.0383	0.0383	0.1532	**22.98**
2	(1.5; 0)	0	0	0.0603	0.0603	0.1205	**18.08**
3	(0.0; 1)	0	0.0675	0	0.0675	0.1351	**20.26**
4	(1.5; 1)	0	0	0	0.1071	0.1071	**16.06**
5	(2.5; -1)	−0.0475	0	0.1202	0	0.0726	**10.90**
6	(4.5; 0)	−0.0603	−0.0603	0.0733	0.0733	0.0261	**3.91**

En el punto interior (1) los cuatro términos son **+**; en los puntos de borde (2, 3) dos términos son nulos; en la esquina (4) queda un solo término; en el exterior (5, 6) algunos términos son **−**. Orden: 22.98 > 18.08 > 20.26 > 16.06 > 10.90 > 3.91 kPa.

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

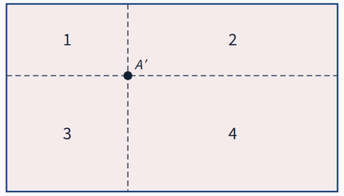
1 Esquina (4): un solo rectángulo (3 m × 2 m)

$$\Delta\sigma_z = q\, I_3(m = 0.5;\ n = 0.75) = 150\,(0.10707) = \mathbf{16.06}\ \text{kPa}$$

2 Punto lejano (6): (4.5; 0), a 3 m más allá de la carga

$$\Delta\sigma_z = q \cdot 2\,[\,I_3(1.5;\ 0.25) - I_3(0.75;\ 0.25)\,]$$
$$= 150 \cdot 2\,(0.07329 - 0.06026) = \mathbf{3.91}\ \text{kPa}$$

Relación de tensiones esquina / centro 0.699; a 3 m de la carga (6) quedan 3.91 kPa: también fuera de la carga la tensión es distinta de cero.



planta del área cargada; A′ es esquina de los cuatro rectángulos 1–4

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

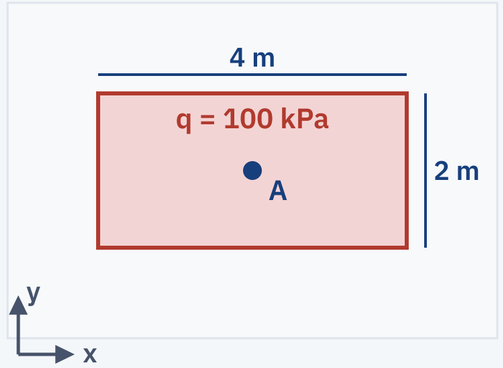
EJEMPLO

Datos

Rectangular	$B = 2$ **m** ($b = 1$ **m**), $L/B = 1; 2; 5; 10$ **y** $L \to \infty$ **(franja)**
Puntos	**bajo el centro,** $n_1 = z/b = 0.5; 1; 2; 4$

SE PIDE

Bajo el centro, $\Delta\sigma_z/q = I_4$; comparación con la franja.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

$n_1 = z/b$	L/B = 1	L/B = 2	L/B = 5	L/B = 10	franja (L/B → ∞)
0.5	0.9299	0.9565	0.9594	0.9595	**0.9595**
1.0	0.7009	0.7998	0.8176	0.8183	**0.8183**
2.0	0.3361	0.4807	0.5451	0.5495	**0.5498**
4.0	0.1081	0.1901	0.2848	0.3034	**0.3058**

Cerca de la superficie ($n_1 = 0.5$) la forma importa poco (0.930 – 0.959); en profundidad la tensión de un rectángulo **corto** se extingue mucho más rápido: para $n_1 = 4$, cuadrada 0.108, franja 0.306.

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

1 Fórmula de I_4 (m_1 = 2; n_1 = 1)

$$m_1^2 + n_1^2 = 5 \qquad \frac{m_1 n_1}{\sqrt{1+5}} = \frac{2}{2.4495} = 0.8165 \qquad \frac{1+4+2}{(1+1)(5)} = 0.70$$

$$\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{2}} = 0.6847 \qquad I_4 = \frac{2}{\pi}(0.5715 + 0.6847) = \mathbf{0.79976}$$

2 Con cuatro rectángulos de esquina iguales (cada uno de 2 m × 1 m, z = 1 m)

$$4\,I_3(1;\,2) = 4\,(0.19994) = \mathbf{0.79976}$$

En el centro de un rectángulo L/B = 2, a la profundidad z = b, **$\Delta\sigma_z/q$ = 0.7998** (cuadrado: 0.7009; franja: 0.8183). Para L/B = 10 (n_1 = 1) el valor es 0.81826 y el de la franja, 0.81831: al alargarse el rectángulo se aproxima a la franja.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

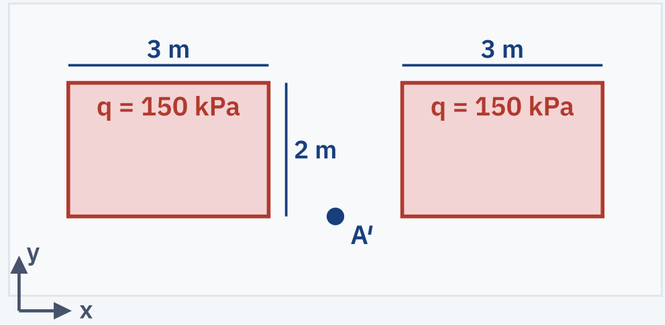
EJEMPLO

Datos

Rectángulo 1	3×2 **m,** $q = 150$ **kN/m², centro** $x = 0$
Rectángulo 2	3×2 **m,** $q = 150$ **kN/m², centro** $x = 5$ **m (** $y = 0$**)**
Punto	**A′:** $x = 2.5$ **m,** $y = -1$ **m;** $z = 4$ **m (además** $1; 2; 6; 8; 12$ **m)**

SE PIDE

$\Delta\sigma_z$ de cada rectángulo y total; perfil en profundidad.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 Rectángulo 2: esquinas con signo respecto a A′ (5 m entre centros ≥ $(L_1 + L_2)/2$ = 3 m: sin solape)

Esquina (x; y)	a	b	m	n	signo
(6.5; 1.0)	4.0	2.0	1.00	0.50	+
(6.5; -1.0)	4.0	0.0	1.00	0.00	0 (b = 0)
(3.5; 1.0)	1.0	2.0	0.25	0.50	–
(3.5; -1.0)	1.0	0.0	0.25	0.00	0 (b = 0)

2 Superposición

$$\Delta\sigma_{z(2)} = 150\,[I_3(1;\,0.5) - I_3(0.25;\,0.5)] = 10.896\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 10.896 + 10.896 = \mathbf{21.793}\ \text{kPa}$$

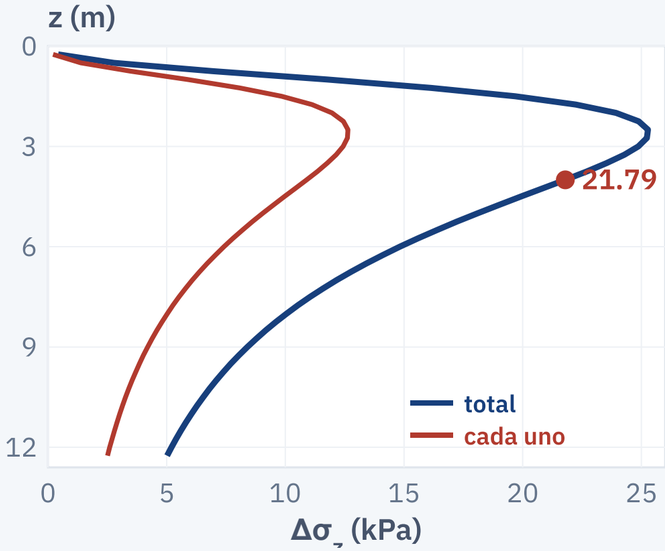
A′ está exactamente en el punto medio de los dos rectángulos (x = 2.5 m; a 1 m de cada uno): el rectángulo 2 es la **imagen especular** del rectángulo 1 y da la misma tensión. Total **$\Delta\sigma_z$ = 21.79 kPa**.

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

z (m)	Rectángulo 1	Rectángulo 2	Total
1	5.877	5.877	**11.754**
2	11.965	11.965	**23.930**
4	10.896	10.896	**21.793**
6	7.413	7.413	**14.826**
8	5.028	5.028	**10.056**
12	2.603	2.603	**5.205**

La tensión total en z = 4 m es de **21.79 kPa**; como los dos rectángulos son simétricos, en cada profundidad el total = 2 × un solo rectángulo. El mayor valor total es 25.28 kPa en z ≈ 2.50 m.



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Resumen

Puntos clave

Esquina: $\Delta\sigma_z = q\, I_3(m, n)$, $m = B/z$, $n = L/z$; para un área grande, $I_3 \to 1/4$. **Punto cualquiera:** rectángulos de cuatro esquinas con signo, $\Delta\sigma_z = q\, \Sigma \pm I_3$

Ejemplo (A′; z = 4 m): 4 m × 2 m − 1 m × 2 m: $I_3(0.5; 1) = 0.12018$; $I_3(0.25; 0.5) = 0.04753$; **$\Delta\sigma_z$ = 150 (0.07264) = 10.90 kPa**

Centro: $\Delta\sigma_z = q\, I_4$; cuadrado, z = b: $I_4 = 4\, I_3(1, 1) = 0.701$; rectángulo de 3 × 2 m, z = 4 m: **22.98 kPa**

Posición (z = 4 m): centro 22.98, puntos medios de los lados 20.26 y 18.08, esquina 16.06, A′ 10.90, punto lejano 3.91 kPa; fuera del área la tensión tampoco es nula

Forma: a z = 4b, el cuadrado da 0.108 q, el rectángulo 10:1 da 0.303 q y la franja 0.306 q. **Dos rectángulos:** se suman las tensiones (10.90 + 10.90 = 21.79 kPa)

Referencias bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Gauthier-Villars, Paris.

NOTA

Todos los ejemplos numéricos se han obtenido con el propio motor de cálculo del módulo; el módulo da los mismos valores. El módulo se abre con un rectángulo de 3 m × 2 m ($q = 150\ kN/m^2$) y el punto A′ ($x = 2.5$ m; $y = -1$ m; $z = 4$ m).

Cálculos geotécnicos en línea

De la teoría a la práctica

Introducir en GeoTerva los propios rectángulos (q, L, B, centro), el punto A y la profundidad; el módulo proporciona conjuntamente los cuatro términos de esquina, el valor de $\Delta\sigma_z$, las curvas de igual tensión, el perfil en profundidad, la solución paso a paso y el informe.

Abrir el módulo → | **Página de teoría →**

Abrir en el teléfono
Los módulos de prueba no requieren registro.

Si desea utilizarlas en sus clases: info@geoterva.com