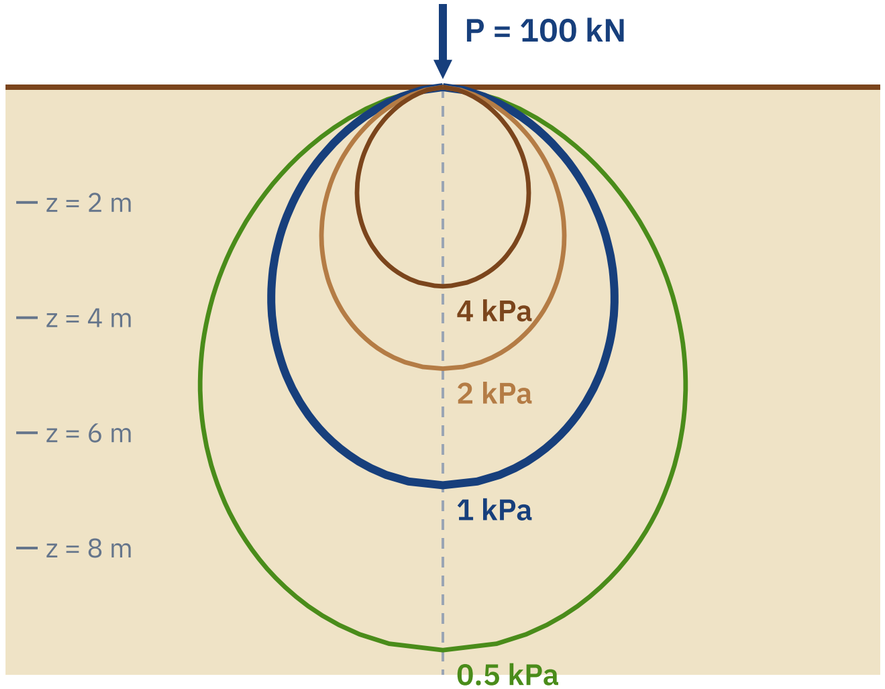
Презентация к лекции по геотехнике · Распределение напряжений в грунте

Напряжение под сосредоточенной нагрузкой (Boussinesq)

Лекция: напряжения в грунте от вертикальной сосредоточенной силы на поверхности; начальная точка решается вручную от начала до конца, профили по глубине и в боковом направлении — по таблицам.

- Решение Boussinesq
- Коэффициент влияния I_1
- Горизонтальные напряжения
- Суперпозиция
- Луковицы давления



Что мы изучим на этой лекции?

Три нормальных напряжения в точке полубесконечной однородной изотропной линейно-упругой среды от **вертикальной сосредоточенной нагрузки** на поверхности: $\Delta\sigma_z$, $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$

Независимость вертикального напряжения **от μ и модуля упругости**; зависимость горизонтальных напряжений от μ

Коэффициент влияния I_1: $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$ и зависимость I_1 только от r/z

Суперпозиция: сложение напряжений от нескольких сосредоточенных нагрузок; **изолинии напряжений** (луковицы давления) и $0.4775\ P/z^2$ под осью нагрузки

Начальная точка модуля **от начала до конца вручную**; изменение по глубине и по горизонтали, горизонтальные напряжения — в таблицах

ХОД ЛЕКЦИИ

Каждая тема излагается **в три шага**:

1 · **Теория**: формула и обоснование

2 · **Условие**: дано и требуется определить

3 · **Решение**: пошагово, с числами

Пример: P = 5 kN; точка A: x = 3 m, y = 4 m, z = 6 m (r = 5 m); μ = 0.5.

Полубесконечная среда по Boussinesq

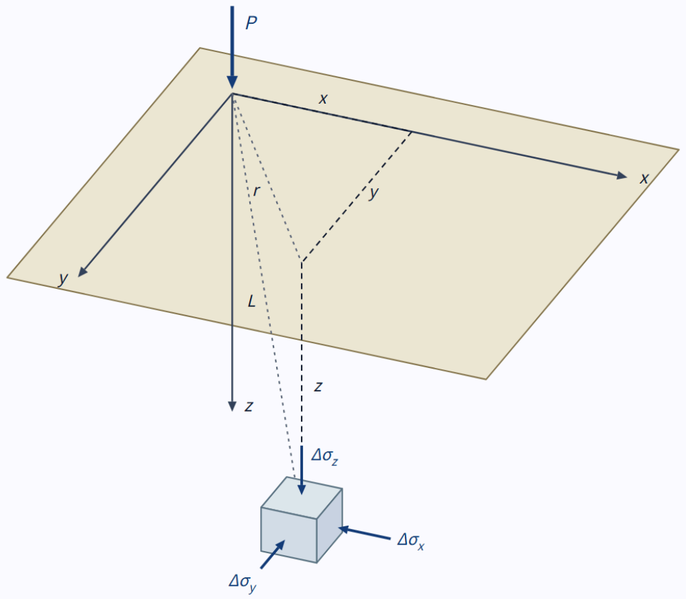
ТЕОРИЯ

Boussinesq (1883) получил решение для напряжений, создаваемых сосредоточенной нагрузкой, приложенной к поверхности полубесконечной однородной, упругой и изотропной среды.

Согласно допущениям решения, грунт представляет собой **упругое полупространство**: под плоской поверхностью он неограниченно простирается в стороны и вниз.

Среда однородна, изотропна и линейно упруга; она задаётся **коэффициентом Пуассона** μ, модуль упругости в выражения напряжений не входит.

Нагрузка **P** — вертикальная сосредоточенная сила, действующая на поверхность; найденные напряжения представляют собой приращения от этой нагрузки, напряжения от собственного веса грунта прибавляются к ним.



Три нормальных напряжения в точке

ТЕОРИЯ

По координатам, показанным на рисунке (**r** — горизонтальное расстояние от точки до оси нагрузки, **L** — расстояние от точки до нагрузки), нормальные напряжения в точке равны:

$$\Delta\sigma_x = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3x^2z}{L^5} - (1-2\mu)\left[\frac{x^2-y^2}{Lr^2(L+z)} + \frac{y^2z}{L^3r^2}\right]\right\}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3y^2z}{L^5} - (1-2\mu)\left[\frac{y^2-x^2}{Lr^2(L+z)} + \frac{x^2z}{L^3r^2}\right]\right\}$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{L^5} = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{(r^2+z^2)^{5/2}} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\ \ L = \sqrt{r^2+z^2}$$

Влияние коэффициента Пуассона

ТЕОРИЯ

Горизонтальные напряжения зависят от коэффициента Пуассона μ, тогда как **вертикальное напряжение** не зависит ни от μ, ни от модуля упругости.

При μ = 0.5 (изменения объёма нет, недренированная глина) члены в квадратных скобках обращаются в нуль, и $\Delta\sigma_x = 3P\,x^2z/(2\pi L^5)$, $\Delta\sigma_y = 3P\,y^2z/(2\pi L^5)$.

На оси нагрузки (r = 0) оба горизонтальных напряжения стремятся к значению $-P(1-2\mu)/(4\pi z^2)$; это небольшое уменьшение.

$$\mu = 0.5: \qquad \Delta\sigma_x = \frac{3P\,x^2 z}{2\pi L^5}, \qquad \Delta\sigma_y = \frac{3P\,y^2 z}{2\pi L^5}$$

$$r = 0: \qquad \Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = -\frac{P\,(1-2\mu)}{4\pi z^2}$$

$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$

ТЕОРИЯ

Поскольку $L^2 = z^2[(r/z)^2 + 1]$, уравнение можно записать с коэффициентом, зависящим только от r/z.

Коэффициент влияния I_1 зависит только от r/z; поэтому одна таблица или кривая используется для любых P и z.

$$L^2 = z^2\left[(r/z)^2 + 1\right]$$

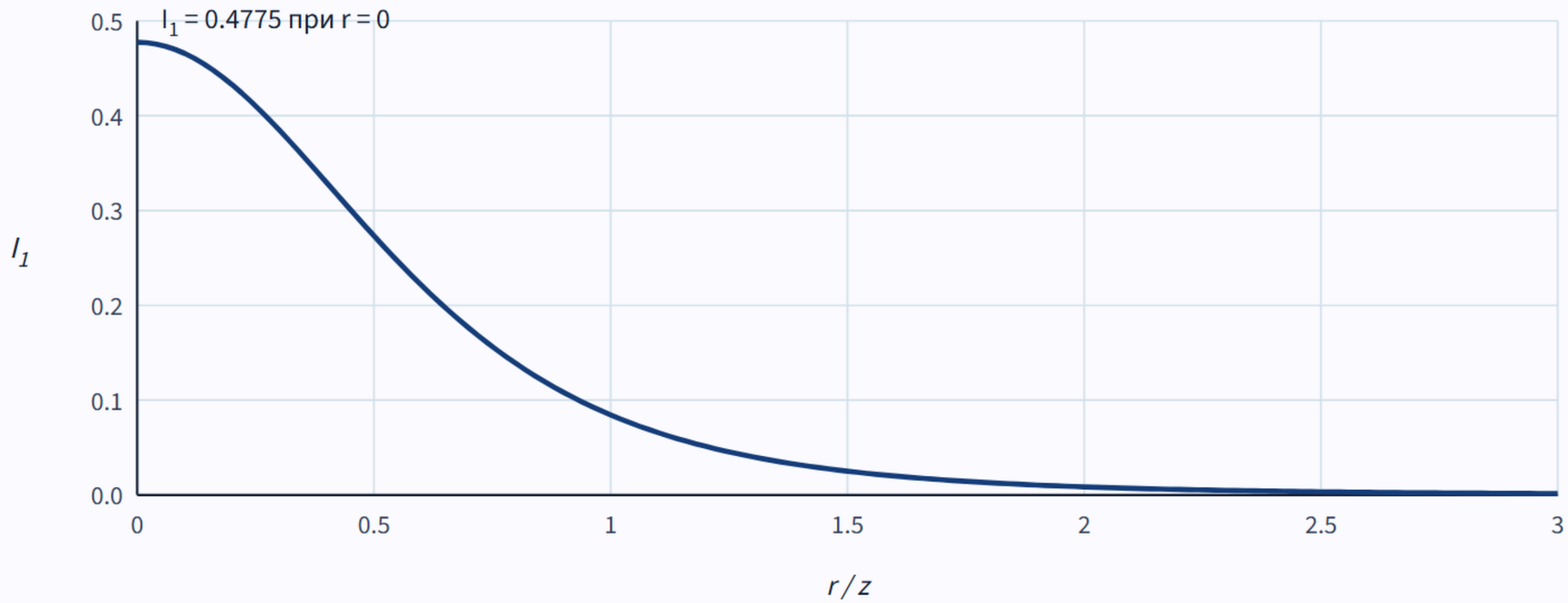
$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 \qquad I_1 = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\left[(r/z)^2 + 1\right]^{5/2}}$$

ЗНАЧЕНИЯ I_1 (В МОДУЛЕ)

r/z	I_1	r/z	I_1
0.0	0.4775	1.0	0.0844
0.1	0.4657	1.2	0.0513
0.2	0.4329	1.4	0.0317
0.3	0.3849	1.6	0.0200
0.4	0.3295	1.8	0.0129
0.5	0.2733	2.0	0.0085
0.6	0.2214	2.5	0.0034
0.7	0.1762	3.0	0.0015
0.8	0.1386	4.0	0.0004
0.9	0.1083	5.0	0.0001

I_1 и r/z

ТЕОРИЯ



Зависимость коэффициента влияния I1 от r/z. Он максимален на оси нагрузки, 3/(2π) = 0.4775, и уменьшается до 0.0844 при r/z = 1 и далее ниже 0.002 при r/z = 3.

Суперпозиция

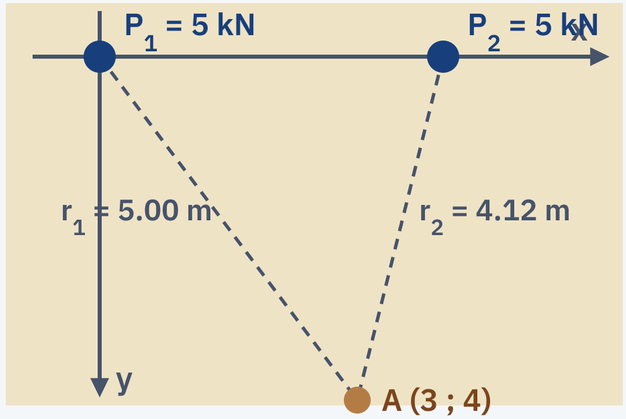
ТЕОРИЯ

Для нескольких сосредоточенных нагрузок в линейно-упругом грунте напряжения суммируются по принципу суперпозиции: $\Delta\sigma_z = \Sigma\Delta\sigma_{z,k}$, $\Delta\sigma_x = \Sigma\Delta\sigma_{x,k}$, $\Delta\sigma_y = \Sigma\Delta\sigma_{y,k}$.

Каждая нагрузка рассматривается отдельно, и точка берётся на расстоянии $(x - x_{L,k}, y - y_{L,k})$ от неё; таким образом, r_k и L_k — собственные величины нагрузки.

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{3P_k}{2\pi}\,\frac{z^3}{L_k^5}, \qquad L_k = \sqrt{(x - x_{L,k})^2 + (y - y_{L,k})^2 + z^2}$$

Модуль принимает не более восьми нагрузок, и никакие две из них не могут находиться в одном положении; изолинии равных напряжений на виде в разрезе строятся в вертикальной плоскости $y = y_A$.



Луковицы напряжений от сосредоточенной нагрузки

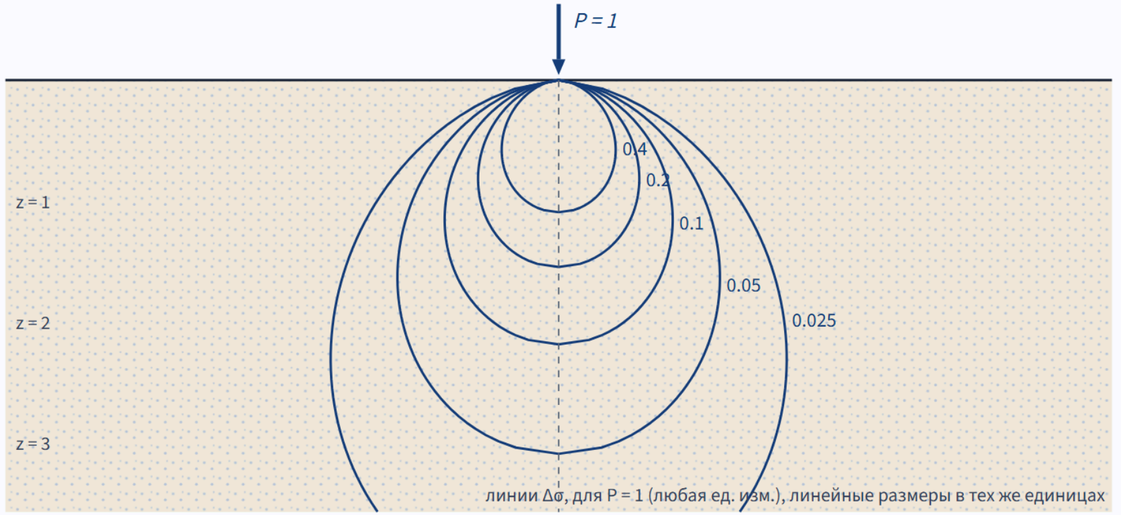
ТЕОРИЯ

Соединением точек с равными значениями $\Delta\sigma_z$ получают изолинии напряжений луковичной формы.

Вдоль оси нагрузки напряжение убывает обратно пропорционально квадрату глубины: $\Delta\sigma_z = 0.4775\ P/z^2$.

В области, очень близкой к нагрузке, решение даёт очень большие напряжения: реальная нагрузка никогда не является точкой.

$$r = \sqrt{\left(\frac{3P\,z^3}{2\pi\,\Delta\sigma_z}\right)^{2/5} - z^2}$$



Условие

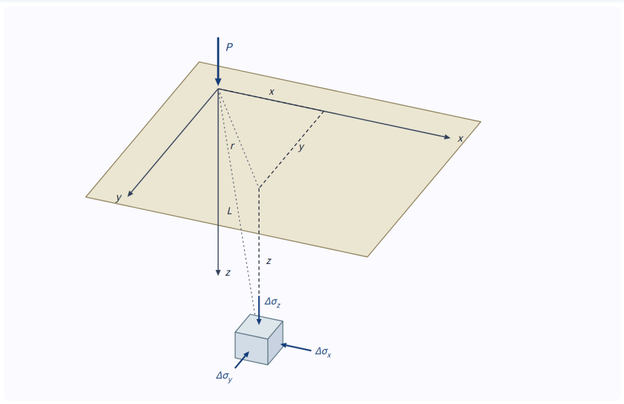
ПРИМЕР

Дано

Нагрузка	**вертикальная сосредоточенная сила $P = 5$ kN на поверхности, в начале координат**
Точка A	$x = 3$ **m,** $y = 4$ **m,** $z = 6$ **m**
Грунт	**однородная упругая полубесконечная среда;** $\mu = 0.5$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

r, **L**, **r/z**, коэффициент влияния $\mathbf{I_1}$ и приращение вертикального напряжения $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; прямая проверка результата по уравнению.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Горизонтальное расстояние r, расстояние до нагрузки L и r/z

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \mathbf{5}\ \text{m} \qquad L = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \mathbf{7.810}\ \text{m}$$

$$r/z = 5/6 = \mathbf{0.8333}$$

2 Коэффициент влияния I_1

$$I_1 = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left[(r/z)^2 + 1\right]^{5/2}} = \frac{0.47746}{\left[0.8333^2 + 1\right]^{2.5}}$$

$$I_1 = \frac{0.47746}{1.6944^{2.5}} = \frac{0.47746}{3.7374} = \mathbf{0.12775}$$

Точка находится на расстоянии **5 m** от оси нагрузки и на глубине **6 m**; так как r/z = 0.8333, I_1 составляет 0.27 от значения под осью нагрузки (0.4775).

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

3 Приращение вертикального напряжения

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 = \frac{5}{6^2}\,(0.12775) = 0.13889\,(0.12775) = \mathbf{0.01774}\ \text{kPa}$$

4 Проверка: прямое уравнение Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{L^5} = \frac{3(5)(6^3)}{2\pi\,(7.810)^5}$$

$$= \frac{3{,}240}{2\pi\,(29{,}062)} = \mathbf{0.01774}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.01774 kPa (I_1 = 0.12775). Поскольку нагрузка мала, напряжение также мало; модуль в этой точке даёт то же значение.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

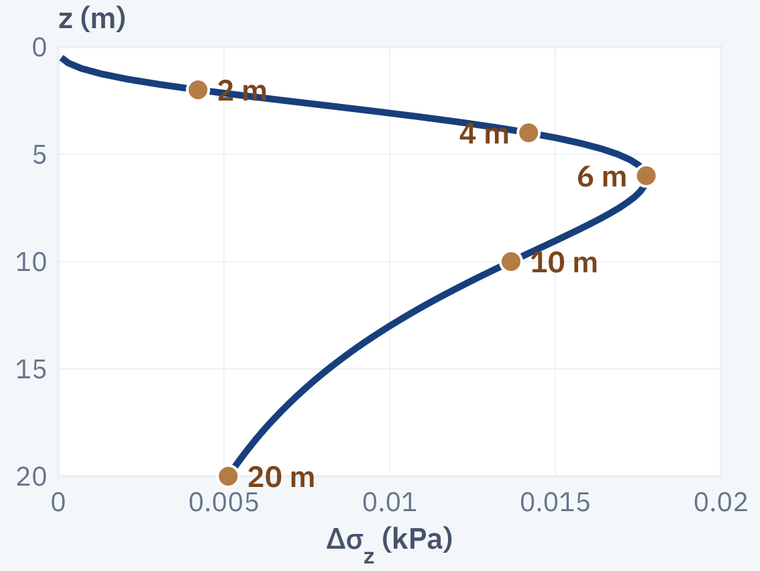
ПРИМЕР

Дано

Нагрузка и точка	$P = 5$ **kN;** $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m, следовательно** $r = 5$ **m (на любой глубине одно и то же)**
Глубины	$z = 2; 4; 6; 10; 20$ **m**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Для каждой глубины: **r/z**, $\mathbf{I_1}$ и $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; сравнение с $0.4775\ P/z^2$ под осью нагрузки; глубина, на которой напряжение наибольшее.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 z = 2 m (r = 5 m): r/z = 2.5

$$I_1 = \frac{0.47746}{\left[2.50^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{141.529} = 0.00337$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{2^2}\,(0.00337) = \mathbf{0.00422}\ \text{kPa}$$

2 z = 4 m (r = 5 m): r/z = 1.25

$$I_1 = \frac{0.47746}{\left[1.25^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{10.511} = 0.04542$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{4^2}\,(0.04542) = \mathbf{0.01419}\ \text{kPa}$$

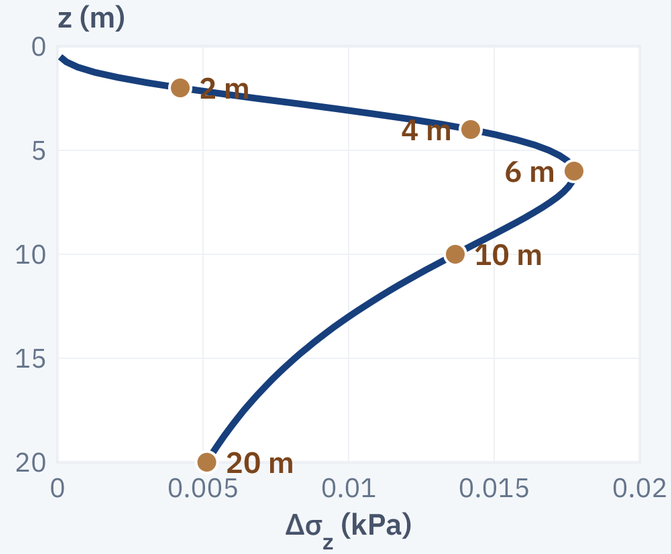
Для одного и того же r = 5 m при увеличении z отношение r/z уменьшается, а I_1 возрастает, но P/z² убывает. Произведение сначала возрастает, затем убывает: 0.00422 при z = 2 m и 0.01419 kPa при z = 4 m.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

z (m)	r/z	I_1	$\Delta\sigma_z$ (kPa)	0.4775 P/z² (kPa)
2	2.500	0.0034	0.00422	0.59683
4	1.250	0.0454	0.01419	0.14921
6	0.833	0.1278	**0.01774**	0.06631
10	0.500	0.2733	0.01367	0.02387
20	0.250	0.4103	0.00513	0.00597

Наибольшее напряжение находится на глубине z = r√(3/2) = **6.12 m** (0.01775 kPa); z = 6 m очень близка к этой глубине (начальная точка модуля). На расстоянии 5 m от оси на малых глубинах напряжение гораздо меньше, чем под осью нагрузки, и с глубиной приближается к нему (z = 20 m: 0.00513 и 0.00597 kPa).



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

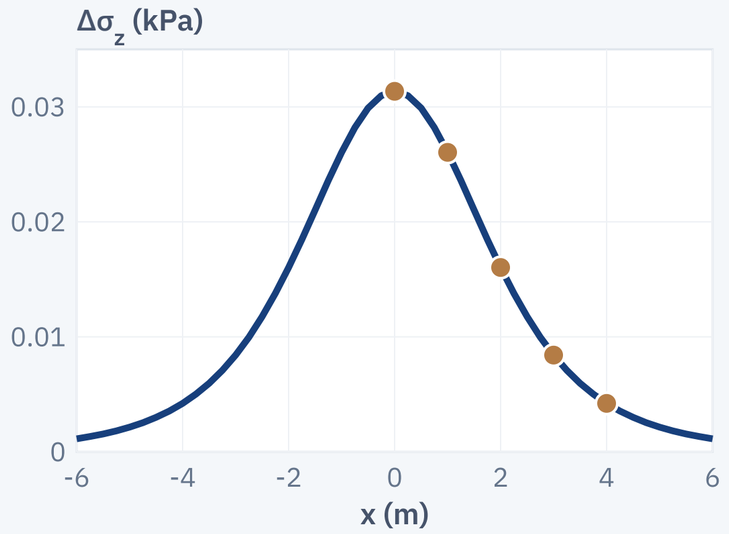
ПРИМЕР

Дано

Нагрузка	$P = 5$ **kN, в начале координат**
Точки	$z = 2$ **m,** $y = 3$ **m;** $x = 0, 1, 2, 3, 4$ **m**
Грунт	$\mu = 0.5$ **(вертикальное напряжение не зависит от** μ**)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Для каждой точки — **r**, **r/z**, $\mathbf{I_1}$ и $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; отношение значения под нагрузкой (x = 0) к значению в самой дальней точке (x = 4 m).



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Горизонтальное расстояние и r/z (x = 2 m, y = 3 m)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = \mathbf{3.606}\ \text{m}$$

$$\frac{r}{z} = \frac{3.606}{2} = \mathbf{1.8028} \qquad \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1 = 4.250$$

2 Коэффициент влияния и напряжение

$$I_1 = \frac{0.47746}{4.250^{2.5}} = \frac{0.47746}{37.237} = 0.01282$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{2^2}\,(0.01282) = \mathbf{0.01603}\ \text{kPa}$$

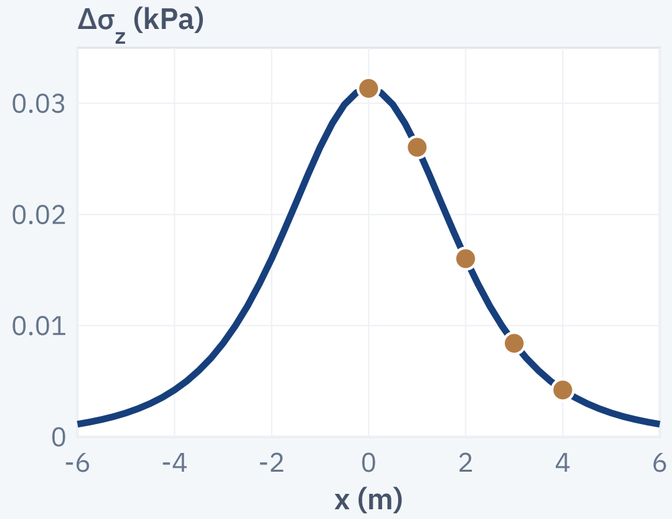
При x = 2 m получаем r = 3.606 m, r/z = 1.803, **$\Delta\sigma_z$ = 0.01603 kPa**. Остальные значения x находятся теми же тремя шагами (таблица на следующей странице).

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

x (m)	r (m)	r/z	I_1	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0	3.000	1.500	0.0251	0.03134
1	3.162	1.581	0.0208	0.02604
2	3.606	1.803	0.0128	**0.01603**
3	4.243	2.121	0.0067	0.00841
4	5.000	2.500	0.0034	0.00422

В точке под нагрузкой (x = 0, r = 3 m) — **0.03134 kPa**; при x = 4 m (r = 5 m) — **0.00422 kPa**: отношение 7.4. На той же глубине с ростом горизонтального расстояния напряжение быстро уменьшается; кривая достигает максимума около x = 0 (поскольку y = 3 m, нагрузка всё ещё находится на расстоянии 3 m).



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

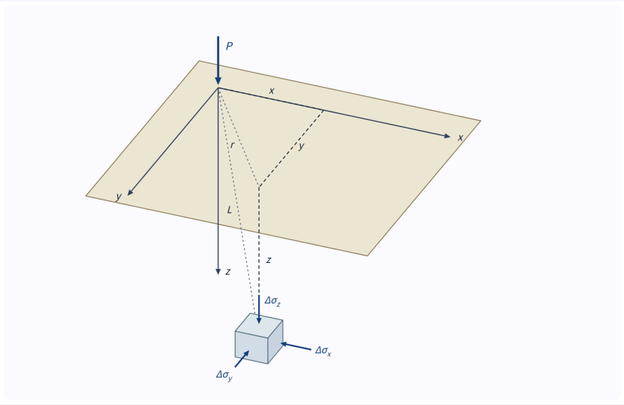
ПРИМЕР

Дано

Нагрузка и точка	$P = 5$ **kN; A:** $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m,** $z = 6$ **m (** $r = 5$ **m,** $L = 7.810$ **m)**
Коэффициент Пуассона	$\mu = 0.5; 0.3; 0.2; 0$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

$\Delta\sigma_x$ и **$\Delta\sigma_y$** (вручную: по краткому уравнению для μ = 0.5, по полному уравнению для μ = 0.3); влияние μ на вертикальное напряжение.



Решение (1/3)

РЕШЕНИЕ

1 L^5 (L = 7,810 m)

$$L^5 = 61^{2.5} = 29{,}062 \text{ m}^5 \qquad 2\pi L^5 = 182{,}602$$

2 μ = 0.5: слагаемые в квадратных скобках обращаются в нуль

$$\Delta\sigma_x = \frac{3P\,x^2 z}{2\pi L^5} = \frac{3(5)(3^2)(6)}{182{,}602} = \frac{810}{182{,}602} = \mathbf{0.00444}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{3P\,y^2 z}{2\pi L^5} = \frac{3(5)(4^2)(6)}{182{,}602} = \frac{1{,}440}{182{,}602} = \mathbf{0.00789}\ \text{kPa}$$

Проверка: для μ = 0.5 $\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y = 3P\ r^2 z/(2\pi L^5)$ = 0.00444 + 0.00789 = **0.01232 kPa**; обе величины — значения, выдаваемые модулем.

Решение (2/3)

РЕШЕНИЕ

3 Слагаемые полного уравнения (x = 3, y = 4, z = 6, r² = 25, L = 7.810)

$$\frac{3x^2 z}{L^5} = \frac{162}{29{,}062} = 0.005574 \qquad \frac{3y^2 z}{L^5} = \frac{288}{29{,}062} = 0.009910$$

$$\frac{x^2 - y^2}{L\,r^2(L+z)} = \frac{-7}{2{,}696.5} = -0.002596 \qquad \frac{y^2 z}{L^3 r^2} = \frac{96}{11{,}910.6} = 0.008060$$

$$\frac{x^2 z}{L^3 r^2} = \frac{54}{11{,}910.6} = 0.004534$$

4 μ = 0.3: 1 − 2μ = 0.4

$$\Delta\sigma_x = \frac{5}{2\pi}\left[0.005574 - 0.4\,(-0.002596 + 0.008060)\right] = \mathbf{0.00270}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{5}{2\pi}\left[0.009910 - 0.4\,(0.002596 + 0.004534)\right] = \mathbf{0.00562}\ \text{kPa}$$

Решение (3/3)

РЕШЕНИЕ

μ	$\Delta\sigma_x$ (10^{-3} kPa)	$\Delta\sigma_y$ (10^{-3} kPa)	$\Delta\sigma_z$ (10^{-3} kPa)
0.5	4.436	7.886	17.744
0.3	2.697	5.617	17.744
0.2	1.827	4.482	17.744
0.0	0.088	2.212	17.744

$\Delta\sigma_z$ не зависит от μ ($17.744 \cdot 10^{-3}$ kPa одинаково в каждой строке); горизонтальные напряжения уменьшаются с уменьшением μ: при μ = 0.5 $\Delta\sigma_x$ = 4.436, при μ = 0.3 — $2.697 \cdot 10^{-3}$ kPa. В этой точке все три напряжения сжимающие.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

ПРИМЕР

Дано

Нагрузка	$P = 100$ **kN, вертикальная сосредоточенная нагрузка**
Точки	**на оси нагрузки,** $z = 1; 2; 3; 5; 10$ **m**
Грунт	$\mu = 0.3$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Для каждой глубины — $\Delta\sigma_z$ ($I_1 = 3/(2\pi)$ при r = 0) и горизонтальные напряжения $\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$.

Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Вертикальное напряжение (r = 0 ⇒ r/z = 0 ⇒ I_1 = 3/(2π) = 0.4775)

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 = \frac{100}{2^2} (0.4775) = \mathbf{11.937}\ \text{kPa}$$

2 Горизонтальные напряжения (предельное значение при r = 0, μ = 0.3)

$$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = -\frac{P(1-2\mu)}{4\pi z^2} = -\frac{100\,(0.4)}{4\pi\,(2^2)} = -\mathbf{0.796}\ \text{kPa}$$

на глубине z = 2 m под осью **$\Delta\sigma_z$ = 11.937 kPa**; горизонтальные напряжения **отрицательны** (–0.796 kPa): небольшое уменьшение. Они примерно в 15 раз меньше вертикального напряжения.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

z (m)	$\Delta\sigma_z$ = 0.4775 P/z² (kPa)	$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$ (kPa)	Отношение $\Delta\sigma_z$ (z = 1 m = 1)
1	47.746	−3.183	1.0000
2	11.937	−0.796	0.2500
3	5.305	−0.354	0.1111
5	1.910	−0.127	0.0400
10	0.477	−0.032	0.0100

При **удвоении глубины напряжение уменьшается в четыре раза** (z = 1 → 2 m: 47.75 → 11.94 kPa). Поскольку напряжения являются приращениями, они добавляются к напряжению от собственного веса грунта: например, при γ = 18 kN/m³ на глубине z = 2 m σ_{v0} = 36 kPa, а вертикальное напряжение после нагружения становится 47.94 kPa.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

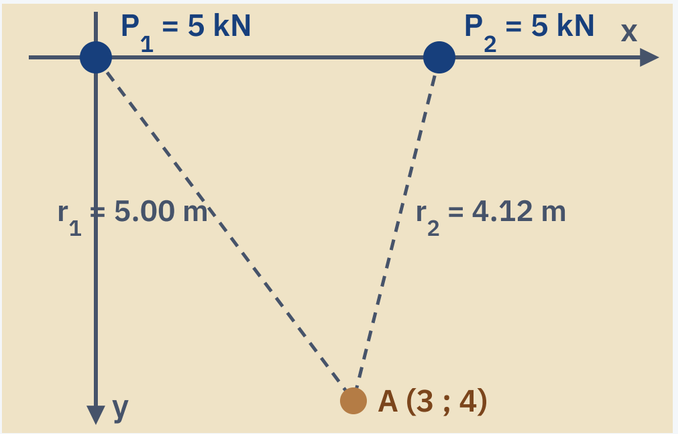
ПРИМЕР

Дано

Нагрузки	$P_1 = 5$ **kN в точке** $(0; 0)$**;** $P_2 = 5$ **kN в точке** $(4; 0)$
Точка A	$x = 3$ **m,** $y = 4$ **m; глубина** $z = 6$ **m (затем** $2; 4; 10; 20$ **m)**
Грунт	$\mu = 0.5$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Значение $\Delta\sigma_z$ от каждой нагрузки и их сумма; суммарные $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$; профиль по глубине.



Решение (1/3)

РЕШЕНИЕ

1 Нагрузка 1 (исходно): такая же, как в примере 1

$$r_1 = 5 \text{ m}, \quad \frac{r_1}{z} = 0.8333, \quad I_{1,1} = 0.12775 \;\Rightarrow\; \Delta\sigma_{z,1} = \frac{5}{36}(0.12775) = \mathbf{0.01774} \text{ kPa}$$

2 Нагрузка 2 (в точке (4 ; 0)): расстояние A от неё (−1 ; 4) m

$$r_2 = \sqrt{(3-4)^2 + 4^2} = \sqrt{17} = 4.123 \text{ m}, \qquad \frac{r_2}{z} = 0.6872$$

$$I_{1,2} = \frac{0.47746}{\left[0.6872^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{2.6299} = 0.18155$$

$$\Delta\sigma_{z,2} = \frac{5}{6^2}\,(0.18155) = \mathbf{0.02522} \text{ kPa}$$

Нагрузка 2 ближе к A (4.12 m), чем нагрузка 1 (5 m), поэтому создаёт большее напряжение.

Решение (2/3)

РЕШЕНИЕ

3 Вертикальное напряжение: суперпозиция

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z,1} + \Delta\sigma_{z,2} = 0.01774 + 0.02522 = \mathbf{0.04296}\ \text{kPa}$$

4 Горизонтальные напряжения (μ = 0.5): для нагрузки 2 при x = −1, y = 4 (по её собственному расстоянию)

$$\Delta\sigma_{x,2} = \frac{3(5)(1)(6)}{2\pi\,(53)^{2.5}} = 0.000700 \qquad \Delta\sigma_{y,2} = \frac{3(5)(16)(6)}{2\pi\,(53)^{2.5}} = 0.011207$$

$$\Delta\sigma_x = 0.004436 + 0.000700 = \mathbf{0.00514} \qquad \Delta\sigma_y = 0.007886 + 0.011207 = \mathbf{0.01909}\ \text{kPa}$$

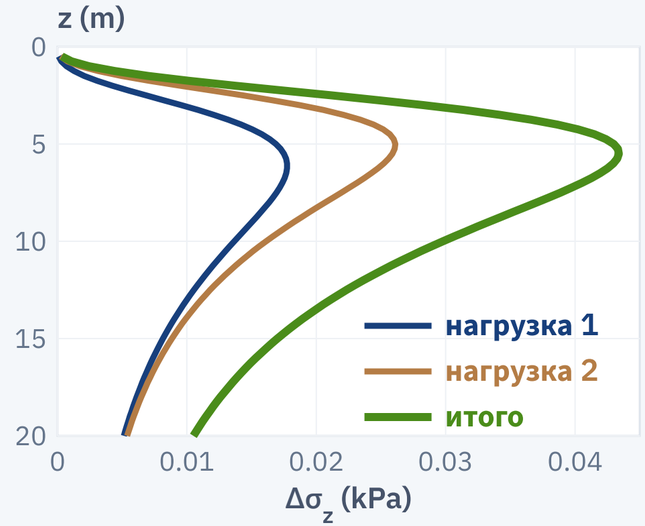
$\Delta\sigma_z$ = 0.04296 kPa, $\Delta\sigma_x$ = 0.00514, $\Delta\sigma_y$ = 0.01909 kPa; в линейно-упругом грунте напряжения от нагрузок суммируются.

Решение (3/3)

РЕШЕНИЕ

z (m)	r_1/z	$\Delta\sigma_{z,1}$	r_2/z	$\Delta\sigma_{z,2}$	Суммарное $\Delta\sigma_z$ (kPa)
2	2.500	0.00422	2.062	0.00945	0.01367
4	1.250	0.01419	1.031	0.02442	0.03862
6	0.833	0.01774	0.687	0.02522	**0.04296**
10	0.500	0.01367	0.412	0.01612	0.02979
20	0.250	0.00513	0.206	0.00538	0.01051

На каждой глубине итог равен сумме двух нагрузок; наибольшая сумма наблюдается около z ≈ 5 m (z = 4 m: 0.03862, z = 6 m: 0.04296 kPa). Нагрузка 2 на каждой глубине вносит больший вклад, чем нагрузка 1.



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

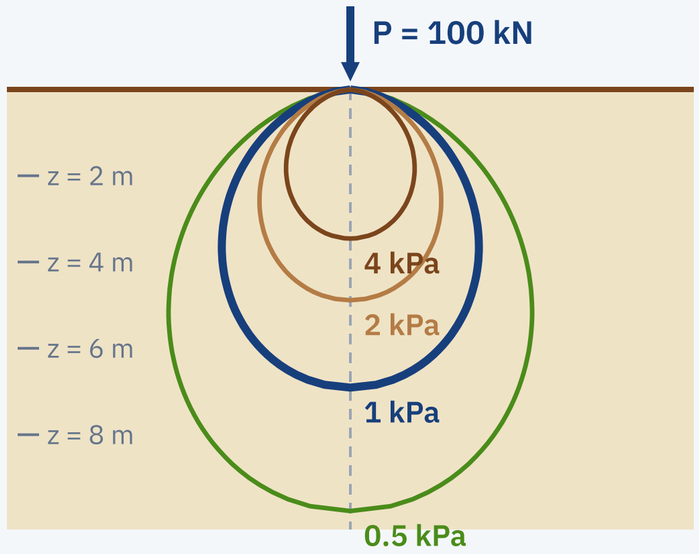
ПРИМЕР

Дано

Нагрузка	$P = 100$ **kN, вертикальная сосредоточенная нагрузка**
Линия	**Точки со значением, равным** $\Delta\sigma_z = 1$ **kPa;** $z = 1$ **–** 6 **m**
Дополнительные линии	0.5; 2; 4 **kPa (рисунок)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

На каждой глубине — расстояние **r** изолинии от оси нагрузки; глубина, на которой изолиния замыкается на оси; проверка того, что значение r действительно даёт $\Delta\sigma_z$ = 1 kPa.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Решение уравнения относительно r: $\Delta\sigma_z = 3P\,z^3/[2\pi(r^2 + z^2)^{5/2}] = 1$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3(100)(4^3)}{2\pi\,(1)}\right)^{0.4} - 4^2} = \sqrt{(3{,}055.8)^{0.4} - 16}$$

$$r = \sqrt{24.777 - 16} = \mathbf{2.963}\ \text{m}$$

2 Проверка: уравнение Boussinesq при найденном r

$$\Delta\sigma_z = \frac{3(100)}{2\pi}\,\frac{4^3}{(2.963^2 + 4^2)^{5/2}} = \mathbf{1.000}\ \text{kPa}$$

При z = 4 m изолиния 1 kPa удалена от оси нагрузки на **2.963 m**; при подстановке найденного значения r в уравнение Boussinesq получается ровно $\Delta\sigma_z$ = 1 kPa (другие глубины — на следующей странице).

Решение (2/2)

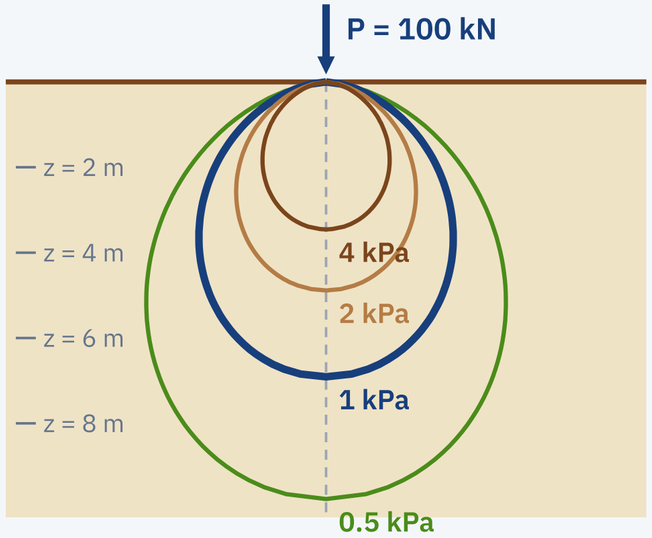
РЕШЕНИЕ

3 Глубина, на которой линия замыкается на оси (r = 0)

$$z_{axis} = \sqrt{\frac{3P}{2\pi\,\Delta\sigma_z}} = \sqrt{\frac{3(100)}{2\pi(1)}} = \sqrt{47.75} = \mathbf{6.91}\ \text{m}$$

z (m)	r (m)	Ширина 2r (m)	$\Delta\sigma_z$ по Boussinesq (kPa)
1	1.922	3.84	1.000
2	2.605	5.21	1.000
3	2.923	5.85	1.000
4	2.963	5.93	1.000
5	2.717	5.43	1.000
6	2.075	4.15	1.000

Изолиния 1 kPa начинается на поверхности в точке приложения нагрузки, достигает наибольшей ширины (r ≈ 2.98 m) на глубине z ≈ 3.65 m и замыкается на оси на глубине 6.91 m; изолинии меньших напряжений простираются глубже и шире.



Проверить решение в GeoTerva ↗

Резюме

Главное

Boussinesq: $\Delta\sigma_z = 3P\,z^3/(2\pi L^5) = (P/z^2)\,I_1$, $I_1 = (3/2\pi) / [(r/z)^2 + 1]^{5/2}$; $\Delta\sigma_z$ не зависит ни от μ, ни от E; $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ зависят от μ

Пример (P = 5 kN, A (3 ; 4 ; 6)): r = 5 m; L = 7.810 m; r/z = 0.8333; $I_1 = 0.12775$; **$\Delta\sigma_z = 0.01774$ kPa**; при μ = 0.5 $\Delta\sigma_x = 0.00444$, $\Delta\sigma_y = 0.00789$ kPa

Глубина: при том же r = 5 m наибольшее напряжение возникает на $z = r\sqrt{(3/2)} = 6.12$ m; **под осью нагрузки** $\Delta\sigma_z = 0.4775\,P/z^2$ (при удвоении z оно уменьшается в четыре раза)

Суперпозиция: каждая нагрузка рассматривается отдельно со своими значениями r_k и L_k, напряжения суммируются (в примере 0.01774 + 0.02522 = 0.04296 kPa)

Луковица давления: линии равных $\Delta\sigma_z$, $r = \sqrt{[(3Pz^3/(2\pi\Delta\sigma_z))^{2/5} - z^2]}$; при P = 100 kN линия 1 kPa замыкается на оси на глубине 6.91 m

Список литературы

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels à l’Étude de l’Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Gauthier-Villars, Paris.

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

ПРИМЕЧАНИЕ

Все числовые примеры получены с помощью собственного расчётного ядра модуля; модуль даёт те же значения. Модуль открывается с нагрузки P = 5 kN и точки A (3 ; 4 ; 6).

GeoTerva

Геотехнические расчёты онлайн

От теории к практике

В GeoTerva вводятся собственные сосредоточенные нагрузки, расчётная точка и коэффициент Пуассона; модуль выдаёт значения $\Delta\sigma_z$, $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$, профиль по глубине, изолинии напряжений, пошаговое решение и отчёт вместе.

Открыть модуль →

Страница теории →

Открыть на телефоне
Для пробных модулей регистрация не требуется.

Для использования на лекциях: info@geoterva.com