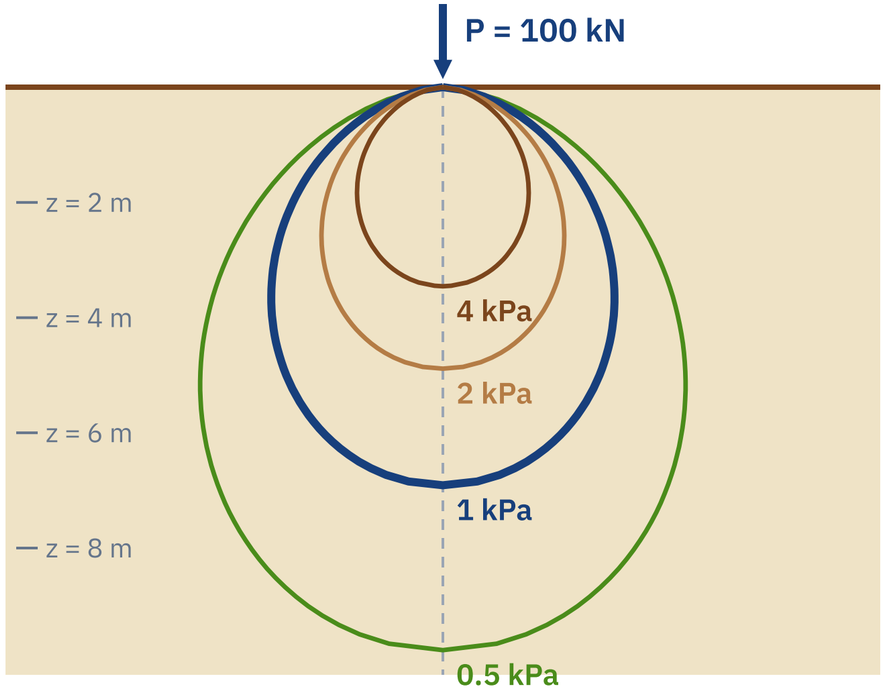
Geotechnisch college · spanningsspreiding in de ondergrond

Spanning onder een puntbelasting (Boussinesq)

College: de spanningen die een verticale puntlast aan het oppervlak in de grond veroorzaakt; het uitgangspunt wordt van begin tot eind met de hand uitgewerkt, diepte- en laterale profielen met tabellen.

- Oplossing van Boussinesq
- Invloedsfactor I_1
- Horizontale spanningen
- Superpositie
- Spanningsbollen



Inleiding

Wat leren we in dit college?

De drie normaalspanningen in een punt ten gevolge van een **verticale puntlast** aan het oppervlak van een halfoneindig, homogeen, isotroop en lineair elastisch medium: $\Delta\sigma_z$, $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$

Dat de verticale spanning **niet afhangt van μ of de elasticiteitsmodulus**; dat de horizontale spanningen wel van μ afhangen

Invloedsfactor I_1: $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$ en de afhankelijkheid van I_1 van alleen r/z

Superpositie: het sommeren van de spanningen van meerdere afzonderlijke belastingen; **iso-spanningslijnen** (spanningsbollen) en $0.4775\ P/z^2$ onder de belastingsas

Het vertrekpunt van de module **volledig met de hand**; diepte en laterale variatie, horizontale spanningen in tabellen

COLLEGESTRUCTUUR

Elk onderwerp wordt in **drie stappen** behandeld:

1 · **Theorie**: formule en onderbouwing

2 · **Opgave**: gegeven en gevraagd

3 · **Oplossing**: stap voor stap, met getallen

Voorbeeld: P = 5 kN; punt A: x = 3 m, y = 4 m, z = 6 m (r = 5 m); μ = 0.5.

Boussinesq half-oneindig medium

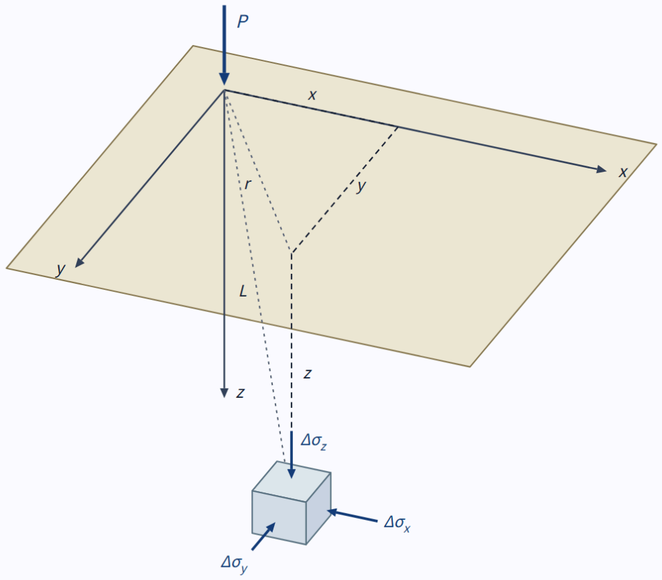
THEORIE

Boussinesq (1883) heeft de spanningen opgelost die een puntlast op het oppervlak van een halfoneindig medium in een homogeen, elastisch en isotroop medium veroorzaakt.

Volgens de uitgangspunten van de oplossing is de grond een **halfoneindig medium**: onder een vlak oppervlak strekt zij zich zijwaarts en neerwaarts onbegrensd uit.

Het medium is homogeen, isotroop en lineair elastisch; het wordt gekenmerkt door de **dwarscontractiecoëfficiënt** μ, de elasticiteitsmodulus komt niet voor in de spanningen.

P is een verticale puntbelasting die op het oppervlak aangrijpt; de gevonden spanningen zijn de toenamen ten gevolge van de belasting, waarop de spanningen uit het eigen gewicht van de grond worden gesuperponeerd.



Drie normaalspanningen in een punt

THEORIE

Met de coördinaten in de figuur (**r** = horizontale afstand van het punt tot de belastingsas, **L** = afstand tot de belasting) zijn de normaalspanningen in het punt:

$$\Delta\sigma_x = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3x^2 z}{L^5} - (1-2\mu)\left[\frac{x^2-y^2}{L\,r^2(L+z)} + \frac{y^2 z}{L^3 r^2}\right]\right\}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3y^2 z}{L^5} - (1-2\mu)\left[\frac{y^2-x^2}{L\,r^2(L+z)} + \frac{x^2 z}{L^3 r^2}\right]\right\}$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\,\frac{z^3}{L^5} = \frac{3P}{2\pi}\,\frac{z^3}{(r^2+z^2)^{5/2}} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\;\; L = \sqrt{r^2+z^2}$$

Invloed van de dwarscontractiecoëfficiënt

THEORIE

Horizontale spanningen hangen af van de dwarscontractiecoëfficiënt μ; de **verticale spanning** hangt echter noch van μ noch van de elasticiteitsmodulus af.

Voor μ = 0.5 (geen volumeverandering, ongedraineerde klei) vervallen de termen tussen de haken en geldt $\Delta\sigma_x = 3P\,x^2z/(2\pi L^5)$, $\Delta\sigma_y = 3P\,y^2z/(2\pi L^5)$.

Op de belastingsas (r = 0) naderen beide horizontale spanningen de waarde $-P(1-2\mu)/(4\pi\,z^2)$; dit is een kleine afname.

$$\mu = 0.5: \qquad \Delta\sigma_x = \frac{3P\,x^2 z}{2\pi L^5}, \qquad \Delta\sigma_y = \frac{3P\,y^2 z}{2\pi L^5}$$

$$r = 0: \qquad \Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = -\frac{P\,(1-2\mu)}{4\pi z^2}$$

$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$

THEORIE

Omdat $L^2 = z^2[(r/z)^2 + 1]$, kan de vergelijking worden geschreven met een coëfficiënt die alleen van r/z afhangt.

De invloedsfactor I_1 hangt alleen af van r/z; daarom wordt één tabel of curve gebruikt voor elke P en elke z.

$$L^2 = z^2\left[(r/z)^2 + 1\right]$$

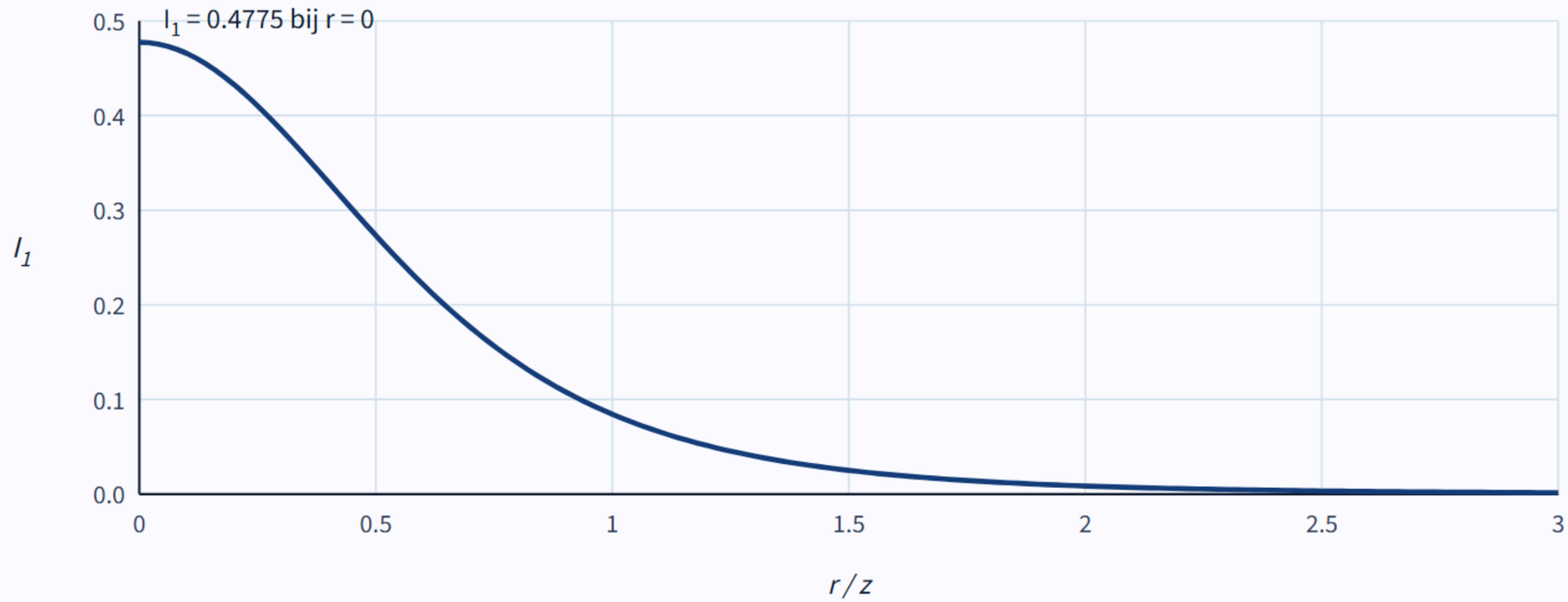
$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 \qquad I_1 = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\left[(r/z)^2 + 1\right]^{5/2}}$$

I_1-WAARDEN (MODULE)

r/z	I_1	r/z	I_1
0.0	0.4775	1.0	0.0844
0.1	0.4657	1.2	0.0513
0.2	0.4329	1.4	0.0317
0.3	0.3849	1.6	0.0200
0.4	0.3295	1.8	0.0129
0.5	0.2733	2.0	0.0085
0.6	0.2214	2.5	0.0034
0.7	0.1762	3.0	0.0015
0.8	0.1386	4.0	0.0004
0.9	0.1083	5.0	0.0001

I_1 en r/z

THEORIE



De invloedsfactor I1 uitgezet tegen r/z. Deze is het grootst op de belastingsas, 3/(2π) = 0.4775, neemt af tot 0.0844 bij r/z = 1 en is kleiner dan 0.002 voorbij r/z = 3.

Superpositie

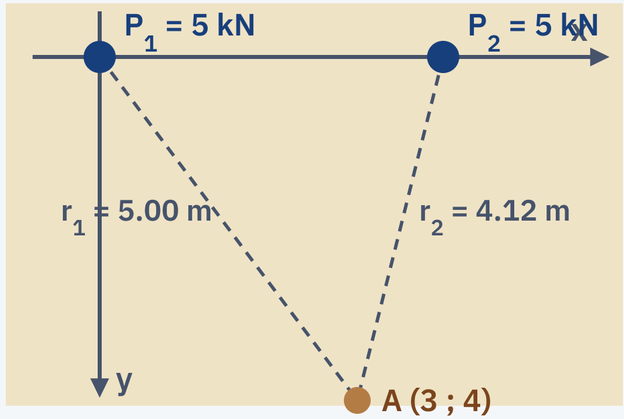
THEORIE

Voor meerdere puntlasten in een lineair elastische grond worden de spanningen door superpositie gesommeerd: $\Delta\sigma_z = \Sigma\Delta\sigma_{z,k}$, $\Delta\sigma_x = \Sigma\Delta\sigma_{x,k}$, $\Delta\sigma_y = \Sigma\Delta\sigma_{y,k}$.

Elke belasting wordt afzonderlijk beschouwd en het punt wordt op een afstand $(x - x_{L,k}, y - y_{L,k})$ ervan genomen; zo zijn r_k en L_k de eigen waarden van die belasting.

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{3P_k}{2\pi}\,\frac{z^3}{L_k^5}, \qquad L_k = \sqrt{(x - x_{L,k})^2 + (y - y_{L,k})^2 + z^2}$$

De module aanvaardt maximaal acht belastingen en geen twee mogen op dezelfde locatie liggen; de lijnen van gelijke spanning in de doorsnedeweergave worden getekend in het verticale vlak $y = y_A$.



Spanningsbollen van een puntbelasting

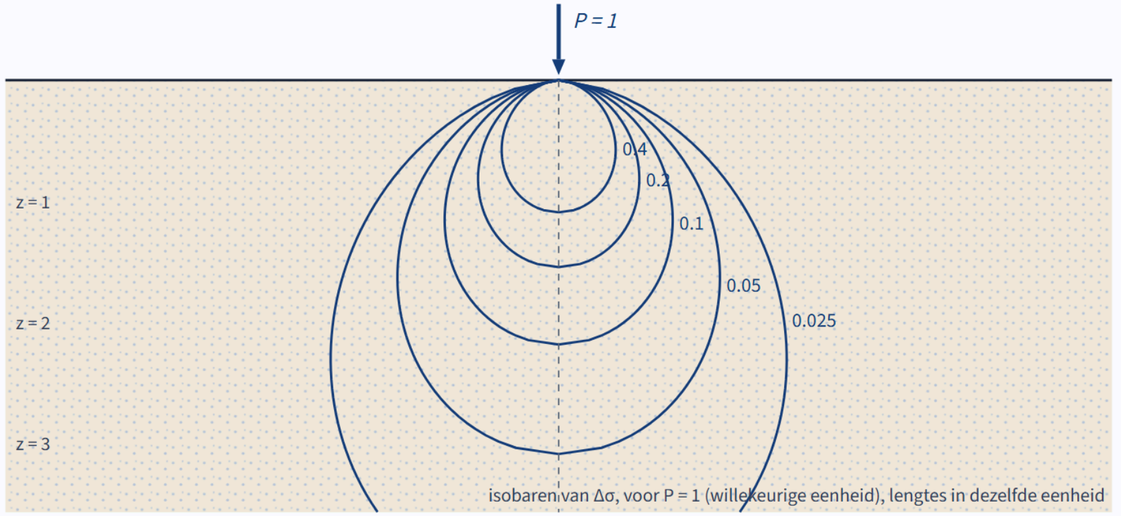
THEORIE

Door de punten met gelijke waarden van $\Delta\sigma_z$ met elkaar te verbinden, ontstaan uiervormige iso-spanningscontouren.

Langs de belastingsas neemt de spanning af met het kwadraat van de diepte: $\Delta\sigma_z = 0.4775\ P/z^2$.

In het gebied zeer dicht bij de belasting geeft de oplossing zeer grote spanningen: een werkelijke belasting is nooit een punt.

$$r = \sqrt{\left(\frac{3P\,z^3}{2\pi\,\Delta\sigma_z}\right)^{2/5} - z^2}$$



Opgave

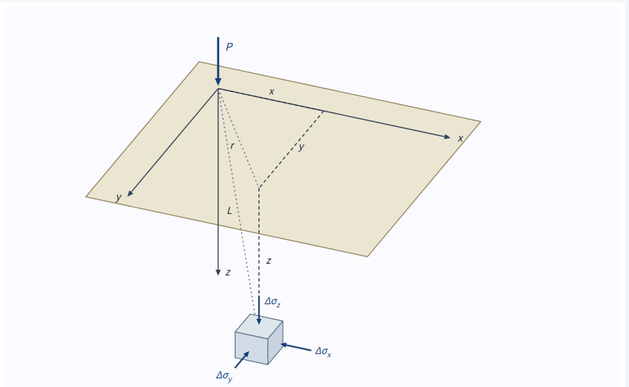
VOORBEELD

Gegeven

Belasting	**verticale puntbelasting $P = 5$ kN, aan het maaiveld, in de oorsprong van het coördinatenstelsel**
Punt A	$x = 3$ m, $y = 4$ m, $z = 6$ m
Grond	**homogeen, elastisch half-oneindig medium;** $\mu = 0.5$

GEVRAAGD

r, **L**, **r/z**, invloedsfactor $\mathbf{I_1}$ en spanningstoename $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; directe controle van het resultaat met de vergelijking.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Horizontale afstand r, afstand tot de last L en r/z

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \mathbf{5}\ \mathrm{m} \qquad L = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \mathbf{7.810}\ \mathrm{m}$$

$$r/z = 5/6 = \mathbf{0.8333}$$

2 Invloedsfactor I_1

$$I_1 = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left[(r/z)^2 + 1\right]^{5/2}} = \frac{0.47746}{\left[0.8333^2 + 1\right]^{2.5}}$$

$$I_1 = \frac{0.47746}{1.6944^{2.5}} = \frac{0.47746}{3.7374} = \mathbf{0.12775}$$

Het punt ligt **5 m** van de belastingsas en **6 m** diep; omdat r/z = 0.8333, is I_1 gelijk aan 0.27 maal de waarde onder de belastingsas (0.4775).

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

3 Verticale spanningstoename

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 = \frac{5}{6^2}\,(0.12775) = 0.13889\,(0.12775) = \mathbf{0.01774}\ \mathrm{kPa}$$

4 Toets: directe vergelijking van Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{L^5} = \frac{3(5)(6^3)}{2\pi\,(7.810)^5}$$

$$= \frac{3{,}240}{2\pi\,(29{,}062)} = \mathbf{0.01774}\ \mathrm{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.01774 kPa (I_1 = 0.12775). Omdat de belasting klein is, is de spanning ook klein; de module geeft op dit punt dezelfde waarde.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

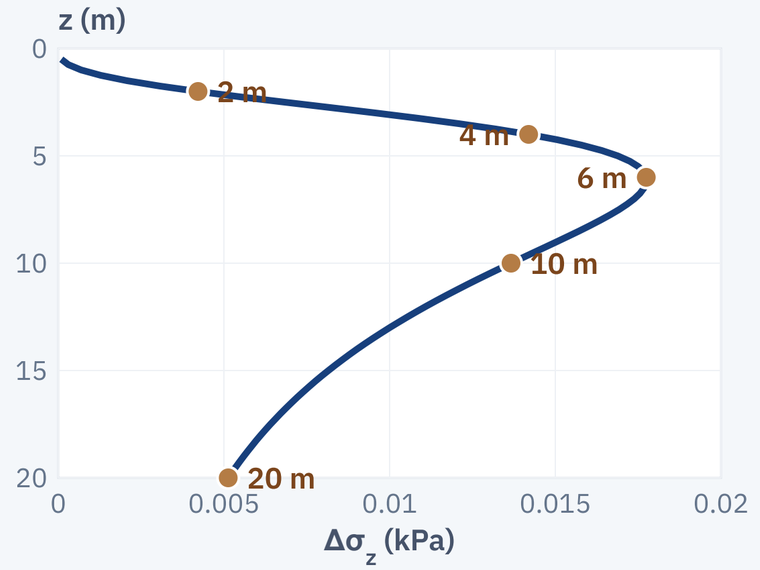
VOORBEELD

Gegeven

Belasting en punt	$P = 5$ **kN;** $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m, dus** $r = 5$ **m (op elke diepte gelijk)**
Diepten	$z = 2; 4; 6; 10; 20$ **m**

GEVRAAGD

Voor elke diepte **r/z**, $\mathbf{I_1}$ en $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; vergelijking met $0.4775\ P/z^2$ onder de belastingsas; de diepte waarop de spanning het grootst is.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 z = 2 m (r = 5 m): r/z = 2.5

$$I_1 = \frac{0.47746}{\left[2.50^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{141.529} = 0.00337$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{2^2}\,(0.00337) = \mathbf{0.00422}\ \mathrm{kPa}$$

2 z = 4 m (r = 5 m): r/z = 1.25

$$I_1 = \frac{0.47746}{\left[1.25^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{10.511} = 0.04542$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{4^2}\,(0.04542) = \mathbf{0.01419}\ \mathrm{kPa}$$

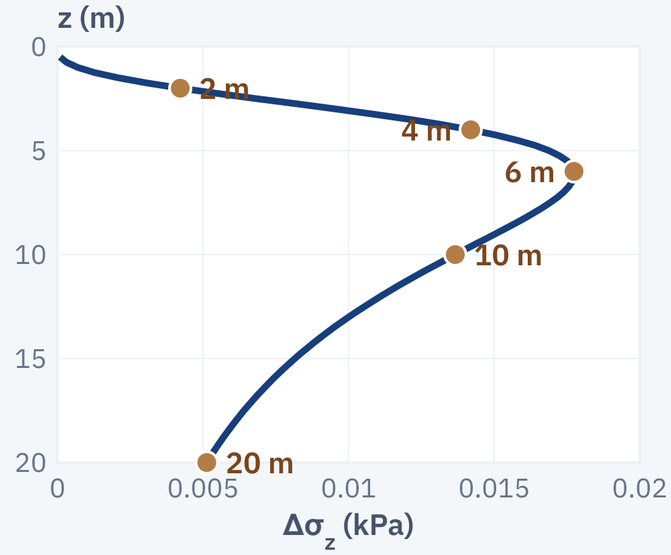
Voor dezelfde r = 5 m wordt r/z kleiner en I_1 groter naarmate z toeneemt; maar P/z² neemt af. Het product stijgt eerst en daalt daarna: 0.00422 bij z = 2 m en 0.01419 kPa bij z = 4 m.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

z (m)	r/z	I_1	$\Delta\sigma_z$ (kPa)	0.4775 P/z² (kPa)
2	2.500	0.0034	0.00422	0.59683
4	1.250	0.0454	0.01419	0.14921
6	0.833	0.1278	**0.01774**	0.06631
10	0.500	0.2733	0.01367	0.02387
20	0.250	0.4103	0.00513	0.00597

De grootste spanning treedt op op diepte z = r√(3/2) = **6.12 m** (0.01775 kPa); z = 6 m ligt zeer dicht bij deze diepte (het openingspunt van de module). Op 5 m van de as is de spanning op geringe diepte veel kleiner dan onder de belastingsas en nadert ze die met toenemende diepte (z = 20 m: 0.00513 en 0.00597 kPa).



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

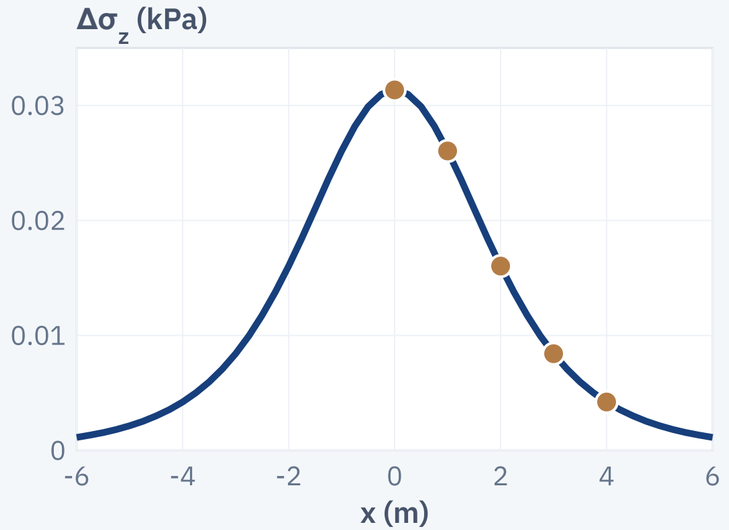
VOORBEELD

Gegeven

Belasting	$P = 5$ **kN, in de oorsprong van het coördinatenstelsel**
Punten	$z = 2$ **m,** $y = 3$ **m;** $x = 0, 1, 2, 3, 4$ **m**
Grond	$\mu = 0.5$ **(verticale spanning onafhankelijk van** μ**)**

GEVRAAGD

Voor elk punt **r**, **r/z**, $\mathbf{I_1}$ en $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; de verhouding van de waarde onder de belasting (x = 0) tot de verst gelegen waarde (x = 4 m).



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Horizontale afstand en r/z (x = 2 m, y = 3 m)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = \mathbf{3.606}\ \mathrm{m}$$

$$\frac{r}{z} = \frac{3.606}{2} = \mathbf{1.8028} \qquad \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1 = 4.250$$

2 Invloedsfactor en spanning

$$I_1 = \frac{0.47746}{4.250^{2.5}} = \frac{0.47746}{37.237} = 0.01282$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{2^2}\,(0.01282) = \mathbf{0.01603}\ \mathrm{kPa}$$

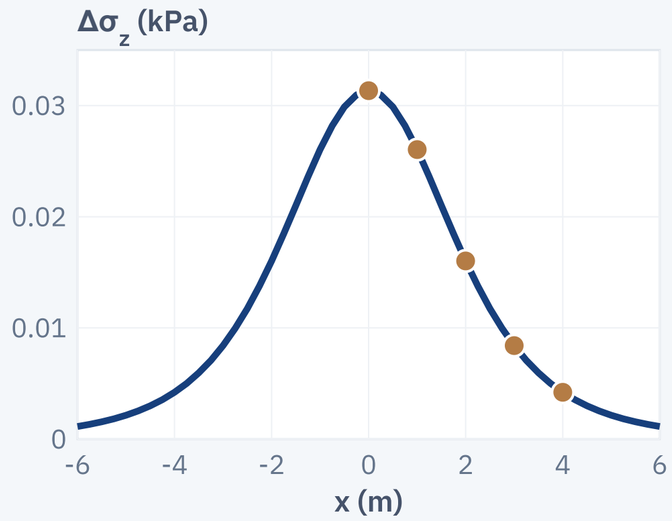
Op x = 2 m geldt r = 3.606 m, r/z = 1.803, **$\Delta\sigma_z$ = 0.01603 kPa**. De overige x-waarden worden met dezelfde drie stappen gevonden (tabel op de volgende pagina).

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

x (m)	r (m)	r/z	I_1	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0	3.000	1.500	0.0251	0.03134
1	3.162	1.581	0.0208	0.02604
2	3.606	1.803	0.0128	**0.01603**
3	4.243	2.121	0.0067	0.00841
4	5.000	2.500	0.0034	0.00422

Op het punt onder de belasting (x = 0, r = 3 m) **0.03134 kPa**; op x = 4 m (r = 5 m) **0.00422 kPa**: verhouding 7.4. Op dezelfde diepte neemt de spanning snel af naarmate de horizontale afstand toeneemt; de curve is het hoogst rond x = 0 (omdat y = 3 m is, ligt de belasting nog steeds 3 m verder).



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

VOORBEELD

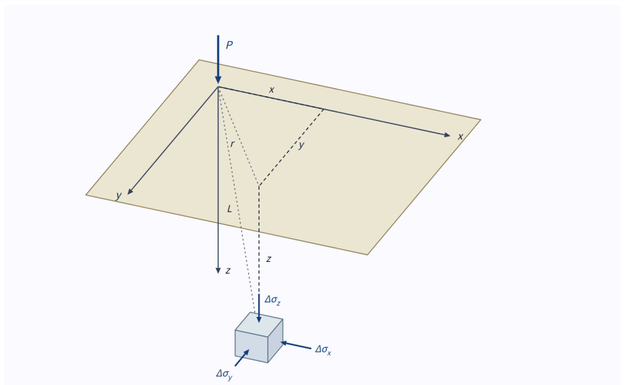
Gegeven

Belasting en punt $P = 5$ **kN; A:** $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m,** $z = 6$ **m** **(**$r = 5$ **m,** $L = 7.810$ **m)**

dwarscontractiecoëfficiënt $\mu = 0.5; 0.3; 0.2; 0$

GEVRAAGD

Δσ$_x$ en **Δσ$_y$** (handmatig met de korte vergelijking voor μ = 0.5, met de volledige vergelijking voor μ = 0.3); de invloed van μ op de verticale spanning.



Oplossing (1/3)

OPLOSSING

1 L^5 (L = 7,810 m)

$$L^5 = 61^{2.5} = 29{,}062\ \text{m}^5 \qquad 2\pi L^5 = 182{,}602$$

2 μ = 0.5: de termen tussen de vierkante haken vallen weg

$$\Delta\sigma_x = \frac{3P\,x^2 z}{2\pi L^5} = \frac{3(5)(3^2)(6)}{182{,}602} = \frac{810}{182{,}602} = \mathbf{0.00444}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{3P\,y^2 z}{2\pi L^5} = \frac{3(5)(4^2)(6)}{182{,}602} = \frac{1{,}440}{182{,}602} = \mathbf{0.00789}\ \text{kPa}$$

Toets: voor μ = 0.5 geldt $\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y = 3P\ r^2 z/(2\pi L^5)$ = 0.00444 + 0.00789 = **0.01232 kPa**; beide zijn de waarden die de module geeft.

Oplossing (2/3)

OPLOSSING

3 Termen van de volledige vergelijking (x = 3, y = 4, z = 6, r² = 25, L = 7,810)

$$\frac{3x^2z}{L^5} = \frac{162}{29{,}062} = 0.005574 \qquad \frac{3y^2z}{L^5} = \frac{288}{29{,}062} = 0.009910$$

$$\frac{x^2 - y^2}{L\,r^2(L+z)} = \frac{-7}{2{,}696.5} = -0.002596 \qquad \frac{y^2z}{L^3r^2} = \frac{96}{11{,}910.6} = 0.008060$$

$$\frac{x^2z}{L^3r^2} = \frac{54}{11{,}910.6} = 0.004534$$

4 μ = 0.3: 1 − 2μ = 0.4

$$\Delta\sigma_x = \frac{5}{2\pi}\left[0.005574 - 0.4\,(-0.002596 + 0.008060)\right] = \mathbf{0.00270}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{5}{2\pi}\left[0.009910 - 0.4\,(0.002596 + 0.004534)\right] = \mathbf{0.00562}\ \text{kPa}$$

Oplossing (3/3)

OPLOSSING

μ	$\Delta\sigma_x$ (10^{-3} kPa)	$\Delta\sigma_y$ (10^{-3} kPa)	$\Delta\sigma_z$ (10^{-3} kPa)
0.5	4.436	7.886	17.744
0.3	2.697	5.617	17.744
0.2	1.827	4.482	17.744
0.0	0.088	2.212	17.744

$\Delta\sigma_z$ is niet afhankelijk van μ ($17.744 \cdot 10^{-3}$ kPa is in elke regel gelijk); de horizontale spanningen nemen af naarmate μ kleiner wordt: $\Delta\sigma_x$ = 4.436 bij μ = 0.5, $2.697 \cdot 10^{-3}$ kPa bij μ = 0.3. In dit punt zijn alle drie de spanningen drukspanningen.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Belasting	$P = 100$ **kN, verticale puntbelasting**
Punten	**op de belastingsas,** $z = 1; 2; 3; 5; 10$ **m**
Grond	$\mu = 0.3$

GEVRAAGD

Voor elke diepte $\Delta\sigma_z$ ($I_1 = 3/(2\pi)$ voor r = 0) en de horizontale spanningen $\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$.

Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Verticale spanning (r = 0 ⇒ r/z = 0 ⇒ $I_1 = 3/(2\pi) = 0.4775$)

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 = \frac{100}{2^2}\,(0.4775) = \mathbf{11.937}\ \mathrm{kPa}$$

2 Horizontale spanningen (grenswaarde voor r = 0, μ = 0.3)

$$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = -\frac{P\,(1-2\mu)}{4\pi z^2} = -\frac{100\,(0.4)}{4\pi\,(2^2)} = \mathbf{-0.796}\ \mathrm{kPa}$$

op z = 2 m onder de as geldt **$\Delta\sigma_z$ = 11.937 kPa**; de horizontale spanningen zijn **negatief** (–0.796 kPa): een kleine afname. Deze is ongeveer 15 keer kleiner dan de verticale spanning.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

z (m)	$\Delta\sigma_z = 0.4775\ P/z^2$ (kPa)	$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$-verhouding (z = 1 m = 1)
1	47.746	−3.183	1.0000
2	11.937	−0.796	0.2500
3	5.305	−0.354	0.1111
5	1.910	−0.127	0.0400
10	0.477	−0.032	0.0100

Wordt de diepte **tweemaal zo groot, dan daalt de spanning tot een kwart** (z = 1 → 2 m: 47.75 → 11.94 kPa). Omdat de spanningen toenames zijn, worden ze opgeteld bij de spanning uit het eigen gewicht van de grond: bij bijvoorbeeld $\gamma = 18$ kN/m³ is bij z = 2 m $\sigma_{v0} = 36$ kPa en wordt de verticale spanning na belasting 47.94 kPa.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

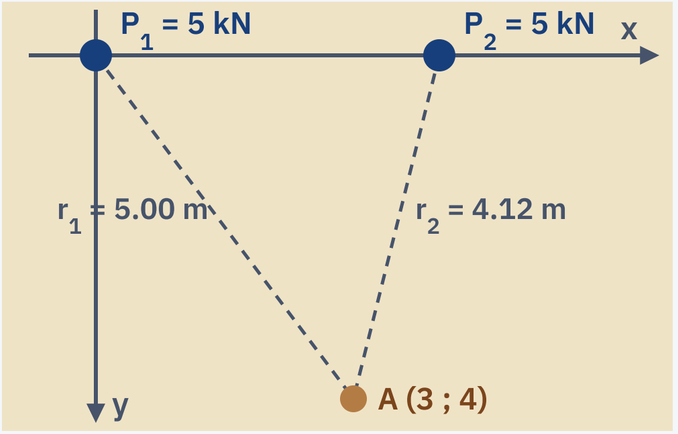
VOORBEELD

Gegeven

Belastingen	$P_1 = 5$ **kN in punt** $(0; 0)$**;** $P_2 = 5$ **kN in punt** $(4; 0)$
Punt A	$x = 3$ **m,** $y = 4$ **m; diepte** $z = 6$ **m (daarna** 2**;** 4**;** 10**;** 20 **m)**
Grond	$\mu = 0.5$

GEVRAAGD

De waarde $\Delta\sigma_z$ van elke belasting en hun som; de totale $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$; het diepteprofiel.



Oplossing (1/3)

OPLOSSING

1 Belasting 1 (bij de start): identiek aan voorbeeld 1

$$r_1 = 5\ \text{m}, \quad \frac{r_1}{z} = 0.8333, \quad I_{1,1} = 0.12775 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z,1} = \frac{5}{36}(0.12775) = \mathbf{0.01774}\ \text{kPa}$$

2 Belasting 2 (in punt (4 ; 0)): de afstand van A tot dat punt is (–1 ; 4) m

$$r_2 = \sqrt{(3-4)^2 + 4^2} = \sqrt{17} = 4.123\ \text{m}, \qquad \frac{r_2}{z} = 0.6872$$

$$I_{1,2} = \frac{0.47746}{\left[0.6872^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{2.6299} = 0.18155$$

$$\Delta\sigma_{z,2} = \frac{5}{6^2}\,(0.18155) = \mathbf{0.02522}\ \text{kPa}$$

Omdat belasting 2 dichter bij A ligt (4.12 m) dan belasting 1 (5 m), geeft zij een grotere spanning.

Oplossing (2/3)

OPLOSSING

3 Verticale spanning: superpositie

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z,1} + \Delta\sigma_{z,2} = 0.01774 + 0.02522 = \mathbf{0.04296}\ \text{kPa}$$

4 Horizontale spanningen (μ = 0.5): voor belasting 2, x = −1, y = 4 (vanaf de eigen afstand)

$$\Delta\sigma_{x,2} = \frac{3(5)(1)(6)}{2\pi\,(53)^{2.5}} = 0.000700 \qquad \Delta\sigma_{y,2} = \frac{3(5)(16)(6)}{2\pi\,(53)^{2.5}} = 0.011207$$

$$\Delta\sigma_x = 0.004436 + 0.000700 = \mathbf{0.00514} \qquad \Delta\sigma_y = 0.007886 + 0.011207 = \mathbf{0.01909}\ \text{kPa}$$

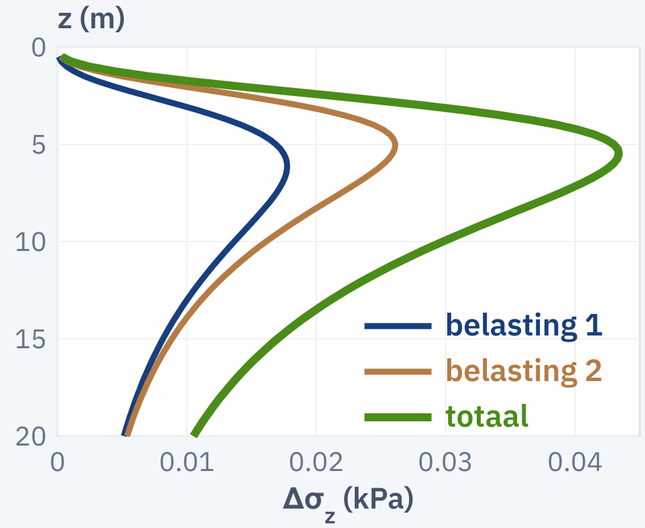
$\Delta\sigma_z$ = 0.04296 kPa, $\Delta\sigma_x$ = 0.00514, $\Delta\sigma_y$ = 0.01909 kPa; in een lineair elastische grond worden de spanningen van de belastingen gesommeerd.

Oplossing (3/3)

OPLOSSING

z (m)	r_1/z	$\Delta\sigma_{z,1}$	r_2/z	$\Delta\sigma_{z,2}$	Totaal $\Delta\sigma_z$ (kPa)
2	2.500	0.00422	2.062	0.00945	0.01367
4	1.250	0.01419	1.031	0.02442	0.03862
6	0.833	0.01774	0.687	0.02522	**0.04296**
10	0.500	0.01367	0.412	0.01612	0.02979
20	0.250	0.00513	0.206	0.00538	0.01051

Op elke diepte is het totaal de som van de twee belastingen; het grootste totaal ligt rond z ≈ 5 m (z = 4 m: 0.03862, z = 6 m: 0.04296 kPa). Belasting 2 levert op elke diepte een grotere bijdrage dan belasting 1.



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

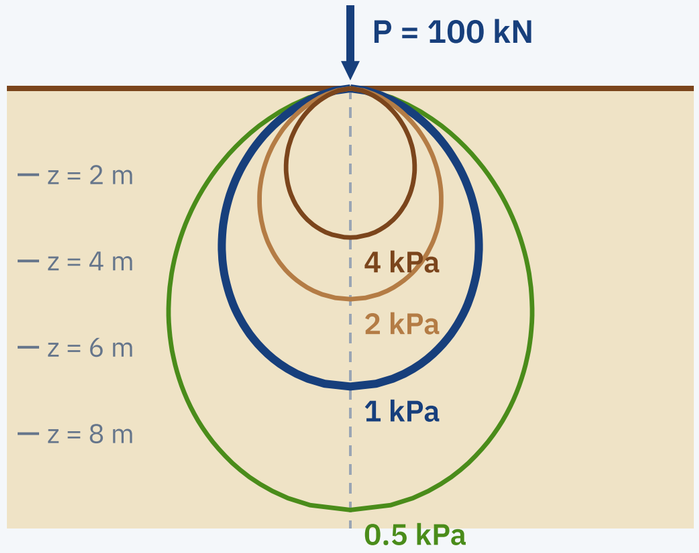
VOORBEELD

Gegeven

Belasting	$P = 100$ **kN, verticale puntbelasting**
Lijn	**Punten waar $\Delta\sigma_z = 1$ gelijk is aan kPa; $z = 1$ – 6 m**
Extra lijnen	0.5; 2; 4 **kPa (figuur)**

GEVRAAGD

Op elke diepte is de afstand van de contour tot de belastingsas **r**; de diepte waarop de contour zich op de as sluit; de toets dat de waarde van r inderdaad $\Delta\sigma_z$ = 1 kPa geeft.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 De vergelijking oplossen naar r: $\Delta\sigma_z = 3P\,z^3/[2\pi(r^2 + z^2)^{5/2}] = 1$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3(100)(4^3)}{2\pi\,(1)}\right)^{0.4} - 4^2} = \sqrt{(3{,}055.8)^{0.4} - 16}$$

$$r = \sqrt{24.777 - 16} = \mathbf{2.963}\ \mathrm{m}$$

2 Toets: Boussinesq-vergelijking met de gevonden r

$$\Delta\sigma_z = \frac{3(100)}{2\pi}\,\frac{4^3}{(2.963^2 + 4^2)^{5/2}} = \mathbf{1.000}\ \mathrm{kPa}$$

Op z = 4 m ligt de 1 kPa-contour **2.963 m** van de belastingsas; invulling van de gevonden r-waarde in de vergelijking van Boussinesq geeft precies $\Delta\sigma_z$ = 1 kPa (overige diepten op de volgende pagina).

Oplossing (2/2)

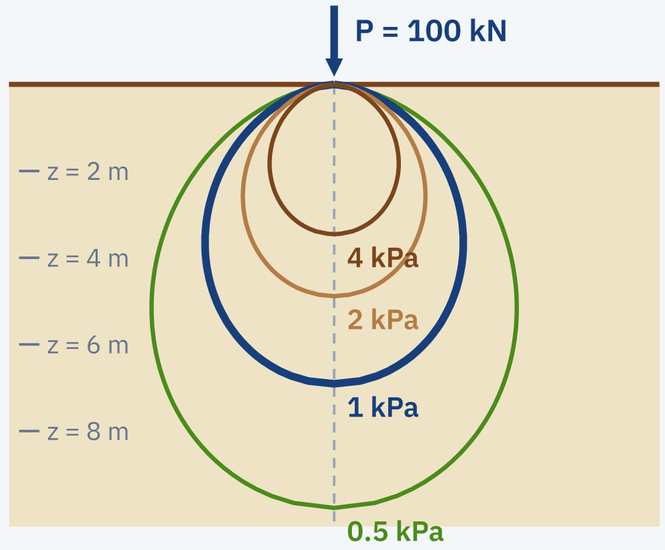
OPLOSSING

3 Diepte waarop de lijn de as sluit (r = 0)

$$z_{axis} = \sqrt{\frac{3P}{2\pi\,\Delta\sigma_z}} = \sqrt{\frac{3(100)}{2\pi(1)}} = \sqrt{47.75} = \mathbf{6.91}\ \text{m}$$

z (m)	r (m)	Breedte 2r (m)	$\Delta\sigma_z$ volgens Boussinesq (kPa)
1	1.922	3.84	1.000
2	2.605	5.21	1.000
3	2.923	5.85	1.000
4	2.963	5.93	1.000
5	2.717	5.43	1.000
6	2.075	4.15	1.000

De 1 kPa-contour begint aan het maaiveld in het lastpunt, bereikt op een diepte van z ≈ 3.65 m haar grootste omvang (r ≈ 2.98 m) en sluit op de as op een diepte van 6.91 m; de contouren van kleinere spanningen strekken zich dieper en breder uit.



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Samenvatting

Belangrijkste punten

Boussinesq: $\Delta\sigma_z = 3P\,z^3/(2\pi L^5) = (P/z^2)\,I_1$, $I_1 = (3/2\pi) / [(r/z)^2 + 1]^{5/2}$; $\Delta\sigma_z$ is afhankelijk van noch μ noch E; $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ zijn afhankelijk van μ

Voorbeeld (P = 5 kN, A (3 ; 4 ; 6)): r = 5 m; L = 7.810 m; r/z = 0.8333; $I_1 = 0.12775$; **$\Delta\sigma_z = 0.01774$ kPa**; voor μ = 0.5: $\Delta\sigma_x = 0.00444$, $\Delta\sigma_y = 0.00789$ kPa

Diepte: voor dezelfde r = 5 m treedt de grootste spanning op bij $z = r\sqrt{(3/2)} = 6.12$ m; **onder de lastas** geldt $\Delta\sigma_z = 0.4775\,P/z^2$ (wanneer z verdubbelt, wordt dit een kwart)

Superpositie: elke belasting wordt afzonderlijk genomen met haar eigen r_k- en L_k-waarden, en de spanningen worden gesommeerd (in het voorbeeld 0.01774 + 0.02522 = 0.04296 kPa)

Spanningsbol: lijnen van gelijke $\Delta\sigma_z$, $r = \sqrt{[(3Pz^3/(2\pi\Delta\sigma_z))^{2/5} - z^2]}$; voor P = 100 kN sluit de 1 kPa-lijn zich op de as op een diepte van 6.91 m

Literatuur

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels à l’Étude de l’Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Gauthier-Villars, Paris.

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

OPMERKING

Alle numerieke voorbeelden zijn geproduceerd met de eigen berekeningsmodule van de module; de module geeft dezelfde waarden. De module opent met een belasting P = 5 kN en punt A (3 ; 4 ; 6).

GeoTerva

Online geotechnische berekeningen

Van theorie naar praktijk

Voer uw eigen afzonderlijke belastingen, het beschouwde punt en de dwarscontractiecoëfficiënt in GeoTerva in; de module levert tegelijk de waarden $\Delta\sigma_z$, $\Delta\sigma_x$ en $\Delta\sigma_y$, het diepteprofiel, de isospanningslijnen, de stapsgewijze oplossing en het rapport.

Module openen → | **Theoriepagina →**

Openen op de smartphone
Proefmodules vereisen geen registratie.

Wilt u ze in uw colleges gebruiken: info@geoterva.com