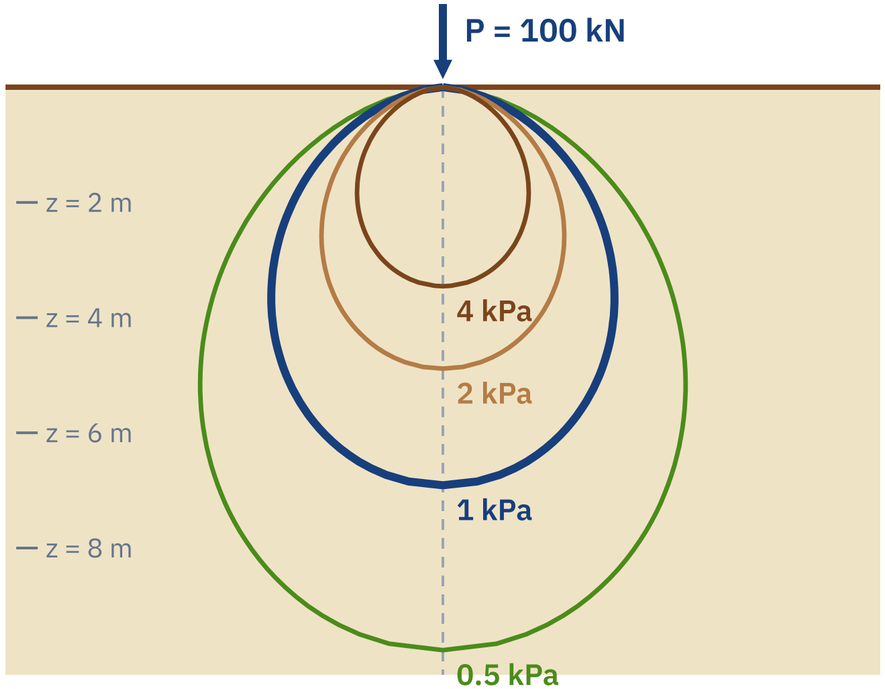
Presentazione didattica di geotecnica · Distribuzione delle tensioni nel terreno

Tensione sotto un carico concentrato (Boussinesq)

Lezione: tensioni indotte nel terreno da un carico concentrato verticale in superficie; il punto di partenza è svolto a mano dall'inizio alla fine, profili in profondità e laterali con tabelle.

- Soluzione di Boussinesq
- Fattore di influenza I_1
- Tensioni orizzontali
- Sovrapposizione
- Bulbi delle pressioni



Introduzione

Che cosa si impara in questa lezione?

Le tre tensioni normali in un punto dovute a un **carico concentrato verticale** in superficie in un mezzo seminfinito, omogeneo, isotropo e linearmente elastico: $\Delta\sigma_z$, $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$

Che la tensione verticale **non dipende da μ né dal modulo di elasticità**; che le tensioni orizzontali dipendono da μ

Fattore di influenza I_1: $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$ e la dipendenza di I_1 dal solo r/z

Sovrapposizione: somma delle tensioni di più carichi puntuali; **curve isobare** (bulbi delle pressioni) e $0.4775\ P/z^2$ sotto l'asse del carico

Il punto di partenza del modulo **dall'inizio alla fine a mano**; variazione con la profondità e laterale, tensioni orizzontali in tabelle

SVOLGIMENTO DELLA LEZIONE

Ogni argomento è trattato in **tre passaggi**:

1 · **Teoria**: formula e relativa motivazione

2 · **Traccia**: dati e richiesto

3 · **Soluzione**: passo per passo, con i numeri

Esempio: P = 5 kN; punto A: x = 3 m, y = 4 m, z = 6 m (r = 5 m); μ = 0.5.

Semispazio di Boussinesq

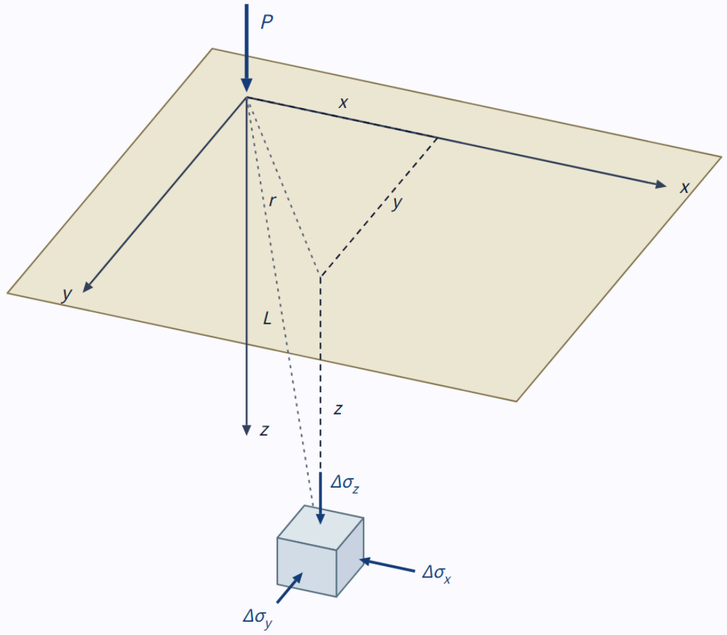
TEORIA

Boussinesq (1883) ha risolto le tensioni prodotte da un carico concentrato agente sulla superficie di un semispazio infinito in un mezzo omogeneo, elastico e isotropo.

Secondo le ipotesi della soluzione il terreno è un **mezzo seminfinito**: si estende illimitatamente in senso laterale e verso il basso al di sotto di una superficie piana.

Il mezzo è omogeneo, isotropo e linearmente elastico; è definito dal **coefficiente di Poisson** μ, mentre il modulo di elasticità non compare nelle tensioni.

P è un carico concentrato verticale agente sulla superficie; le tensioni trovate sono gli incrementi dovuti al carico, ai quali si sommano le tensioni dovute al peso proprio del terreno.



Le tre tensioni normali in un punto

TEORIA

Con le coordinate della figura (**r** = distanza orizzontale del punto dall'asse del carico, **L** = distanza dal carico), le tensioni normali nel punto valgono:

$$\Delta\sigma_x = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3x^2 z}{L^5} - (1-2\mu)\left[\frac{x^2-y^2}{L\,r^2(L+z)} + \frac{y^2 z}{L^3 r^2}\right]\right\}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3y^2 z}{L^5} - (1-2\mu)\left[\frac{y^2-x^2}{L\,r^2(L+z)} + \frac{x^2 z}{L^3 r^2}\right]\right\}$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\,\frac{z^3}{L^5} = \frac{3P}{2\pi}\,\frac{z^3}{(r^2+z^2)^{5/2}} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\;\; L = \sqrt{r^2+z^2}$$

Effetto del coefficiente di Poisson

TEORIA

Le **tensioni orizzontali** dipendono dal coefficiente di Poisson μ; la **tensione verticale** invece non dipende né da μ né dal modulo di elasticità.

Per μ = 0.5 (nessuna variazione di volume, argilla non drenata) i termini tra parentesi quadre si annullano e si ottiene $\Delta\sigma_x = 3P\,x^2z/(2\pi L^5)$, $\Delta\sigma_y = 3P\,y^2z/(2\pi L^5)$.

Sull'asse del carico (r = 0) entrambe le tensioni orizzontali tendono a $-P(1-2\mu)/(4\pi\,z^2)$; si tratta di una lieve riduzione.

$$\mu = 0.5: \qquad \Delta\sigma_x = \frac{3P\,x^2 z}{2\pi L^5}, \qquad \Delta\sigma_y = \frac{3P\,y^2 z}{2\pi L^5}$$

$$r = 0: \qquad \Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = -\frac{P\,(1-2\mu)}{4\pi z^2}$$

$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$

TEORIA

Poiché $L^2 = z^2[(r/z)^2 + 1]$, l'equazione può essere scritta con un coefficiente dipendente solo da r/z.

Il fattore di influenza I_1 dipende solo da r/z; pertanto un'unica tabella o curva si utilizza per ogni P e ogni z.

$$L^2 = z^2\left[(r/z)^2 + 1\right]$$

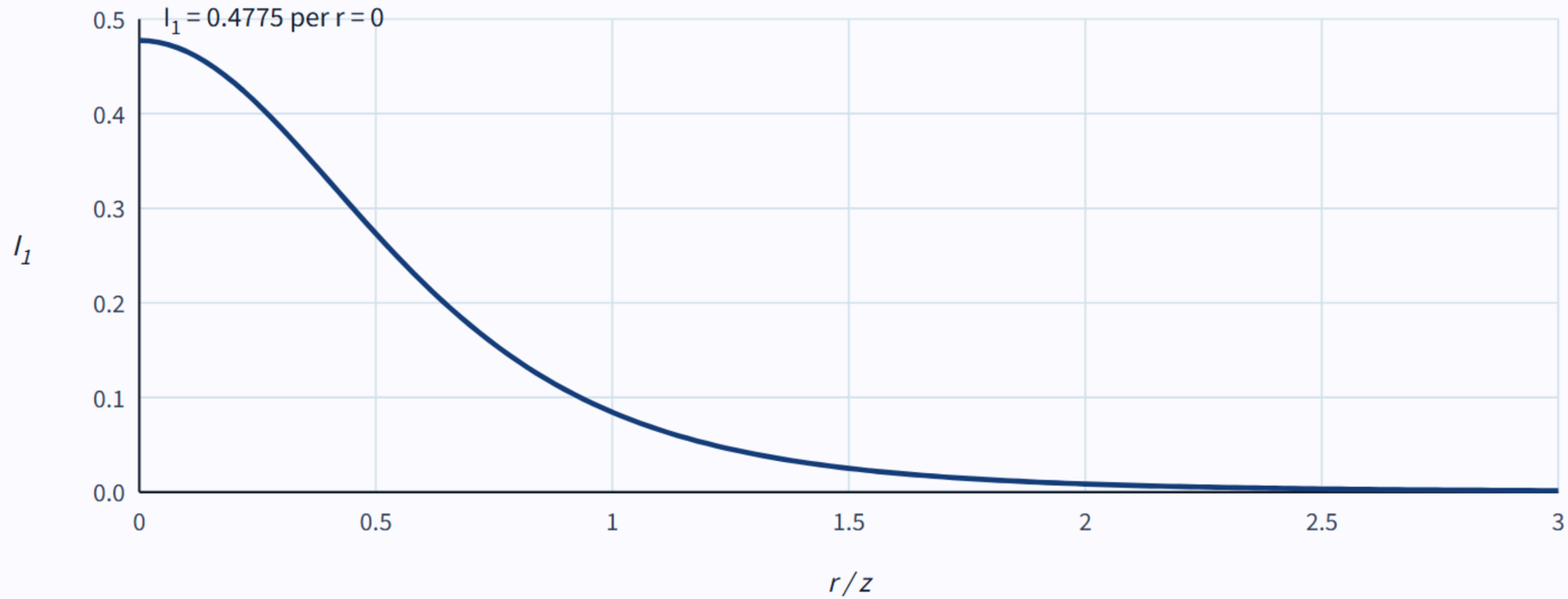
$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 \qquad I_1 = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\left[(r/z)^2 + 1\right]^{5/2}}$$

VALORI DI I_1 (MODULO)

r/z	I_1	r/z	I_1
0.0	0.4775	1.0	0.0844
0.1	0.4657	1.2	0.0513
0.2	0.4329	1.4	0.0317
0.3	0.3849	1.6	0.0200
0.4	0.3295	1.8	0.0129
0.5	0.2733	2.0	0.0085
0.6	0.2214	2.5	0.0034
0.7	0.1762	3.0	0.0015
0.8	0.1386	4.0	0.0004
0.9	0.1083	5.0	0.0001

I_1 e r/z

TEORIA



Fattore d'influenza I1 in funzione di r/z. Raggiunge il valore massimo sull'asse del carico, pari a 3/(2π) = 0.4775, scende a 0.0844 per r/z = 1 ed è inferiore a 0.002 per valori di r/z > 3.

Sovrapposizione

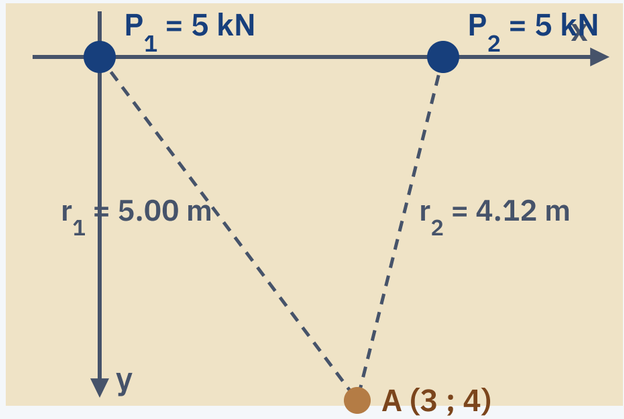
TEORIA

Per più carichi concentrati su terreno elastico lineare le tensioni si sommano per sovrapposizione: $\Delta\sigma_z = \Sigma\Delta\sigma_{z,k}$, $\Delta\sigma_x = \Sigma\Delta\sigma_{x,k}$, $\Delta\sigma_y = \Sigma\Delta\sigma_{y,k}$.

Ogni carico è considerato separatamente e il punto è preso a distanza $(x - x_{L,k}, y - y_{L,k})$ da esso; così r_k e L_k sono i valori propri del carico.

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{3P_k}{2\pi}\,\frac{z^3}{L_k^5}, \qquad L_k = \sqrt{(x - x_{L,k})^2 + (y - y_{L,k})^2 + z^2}$$

Il modulo accetta al massimo otto carichi e nessuno di essi può trovarsi nella stessa posizione; le curve di uguale tensione nella vista in sezione sono tracciate nel piano verticale $y = y_A$.



Bulbi delle tensioni di un carico concentrato

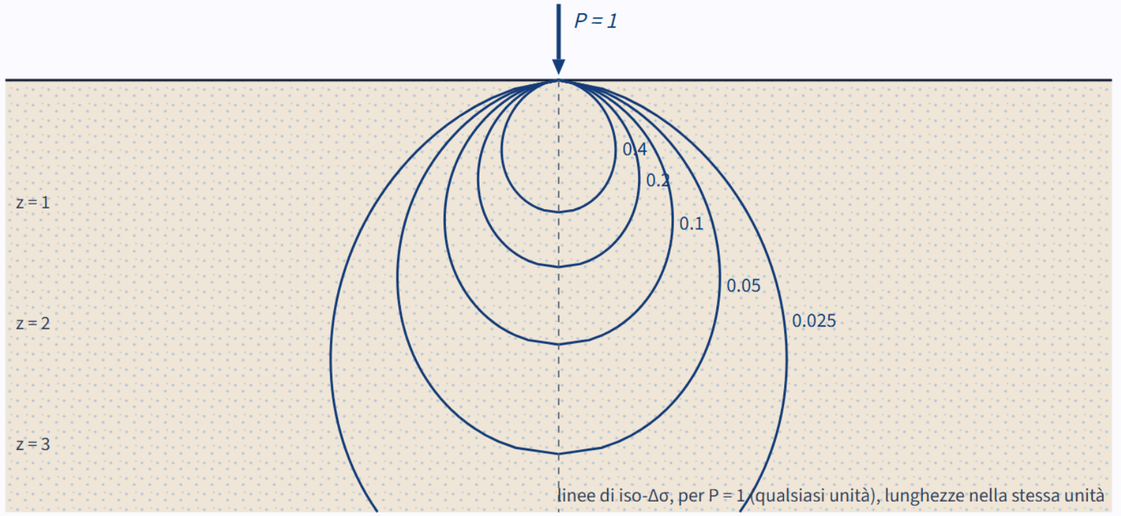
TEORIA

Unendo i punti con uguale valore di $\Delta\sigma_z$ si ottengono curve isobare a forma di bulbo.

Lungo l'asse del carico la tensione diminuisce con il quadrato della profondità: $\Delta\sigma_z = 0.4775\ P/z^2$.

Nella regione molto vicina al carico la soluzione fornisce tensioni molto elevate: un carico reale non è mai un punto.

$$r = \sqrt{\left(\frac{3P\,z^3}{2\pi\,\Delta\sigma_z}\right)^{2/5} - z^2}$$



Traccia

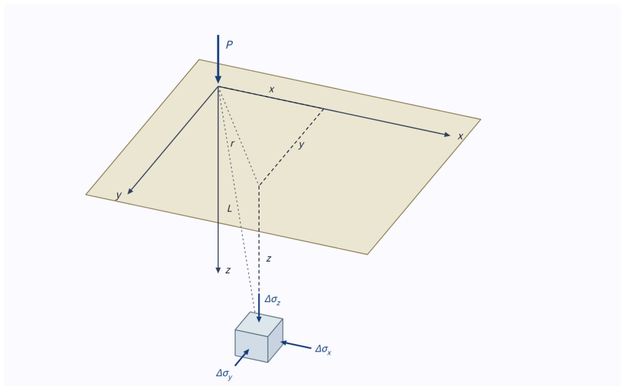
ESEMPIO

Dati

Carico	**carico concentrato verticale $P = 5$ kN, in superficie, nell'origine del sistema di coordinate**
Punto A	$x = 3$ m, $y = 4$ m, $z = 6$ m
Terreno	**mezzo semispazio omogeneo ed elastico;** $\mu = 0.5$

RICHIESTO

r, **L**, **r/z**, il fattore di influenza $\mathbf{I_1}$ e l'incremento di tensione verticale $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; verifica diretta del risultato con l'equazione.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Distanza orizzontale r, distanza dal carico L e r/z

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \mathbf{5}\ \mathrm{m} \qquad L = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \mathbf{7.810}\ \mathrm{m}$$

$$r/z = 5/6 = \mathbf{0.8333}$$

2 Fattore di influenza I_1

$$I_1 = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left[(r/z)^2 + 1\right]^{5/2}} = \frac{0.47746}{\left[0.8333^2 + 1\right]^{2.5}}$$

$$I_1 = \frac{0.47746}{1.6944^{2.5}} = \frac{0.47746}{3.7374} = \mathbf{0.12775}$$

Il punto si trova a **5 m** dall'asse del carico e a **6 m** di profondità; poiché r/z = 0.8333, I_1 vale 0.27 volte il valore sotto l'asse del carico (0.4775).

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

3 Incremento di tensione verticale

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 = \frac{5}{6^2}\,(0.12775) = 0.13889\,(0.12775) = \mathbf{0.01774}\ \mathrm{kPa}$$

4 verifica: equazione di Boussinesq diretta

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{L^5} = \frac{3(5)(6^3)}{2\pi\,(7.810)^5}$$

$$= \frac{3{,}240}{2\pi\,(29{,}062)} = \mathbf{0.01774}\ \mathrm{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.01774 kPa (I_1 = 0.12775). Poiché il carico è modesto, anche la tensione risulta modesta; in questo punto il modulo restituisce lo stesso valore.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

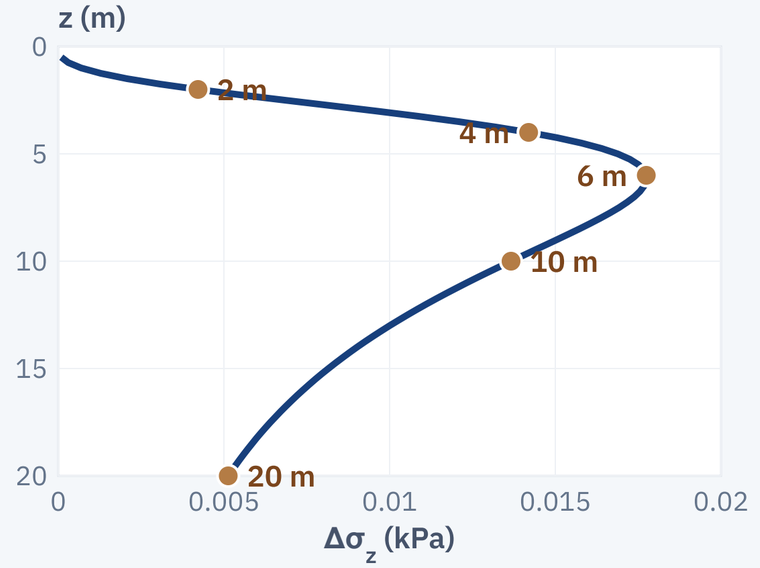
ESEMPIO

Dati

Carico e punto	$P = 5$ **kN;** $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m, quindi** $r = 5$ **m (lo stesso a ogni profondità)**
Profondità	$z = 2; 4; 6; 10; 20$ **m**

RICHIESTO

Per ogni profondità **r/z**, $\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; confronto con 0.4775 P/z² sotto l'asse del carico; la profondità alla quale la tensione è massima.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 z = 2 m (r = 5 m): r/z = 2.5

$$I_1 = \frac{0.47746}{\left[2.50^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{141.529} = 0.00337$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{2^2}\,(0.00337) = \mathbf{0.00422}\ \mathrm{kPa}$$

2 z = 4 m (r = 5 m): r/z = 1.25

$$I_1 = \frac{0.47746}{\left[1.25^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{10.511} = 0.04542$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{4^2}\,(0.04542) = \mathbf{0.01419}\ \mathrm{kPa}$$

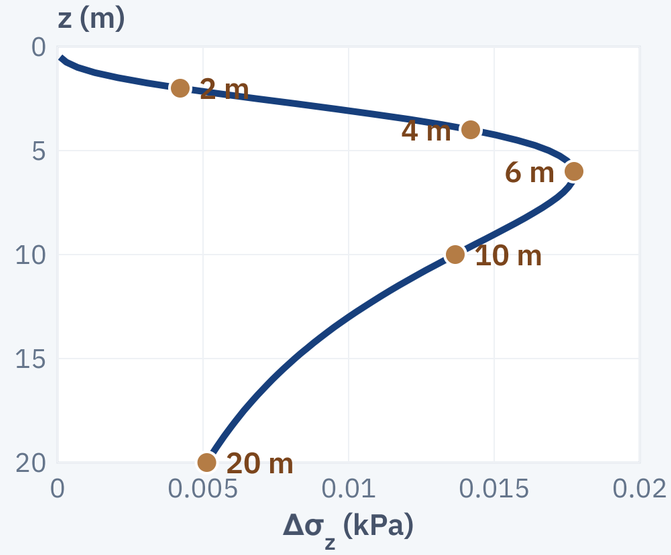
Per lo stesso r = 5 m, al crescere di z il rapporto r/z diminuisce e I_1 aumenta; ma P/z^2 diminuisce. Il prodotto prima aumenta, poi diminuisce: 0.00422 a z = 2 m e 0.01419 kPa a z = 4 m.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

z (m)	r/z	I_1	$\Delta\sigma_z$ (kPa)	0.4775 P/z² (kPa)
2	2.500	0.0034	0.00422	0.59683
4	1.250	0.0454	0.01419	0.14921
6	0.833	0.1278	**0.01774**	0.06631
10	0.500	0.2733	0.01367	0.02387
20	0.250	0.4103	0.00513	0.00597

La tensione massima si ha alla profondità $z = r\sqrt{(3/2)}$ = **6.12 m** (0.01775 kPa); z = 6 m è molto vicino a questa profondità (punto di apertura del modulo). A 5 m dall'asse, la tensione alle modeste profondità è molto minore di quella sotto l'asse del carico e vi si avvicina con l'aumentare della profondità (z = 20 m: 0.00513 e 0.00597 kPa).



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

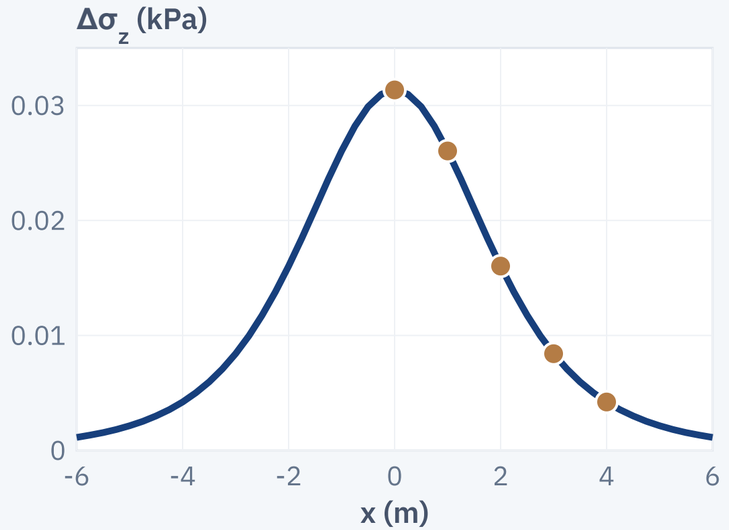
ESEMPIO

Dati

Carico	$P = 5$ **kN, nell'origine delle coordinate**
Punti	$z = 2$ **m,** $y = 3$ **m;** $x = 0, 1, 2, 3, 4$ **m**
Terreno	$\mu = 0.5$ **(tensione verticale indipendente da** μ**)**

RICHIESTO

Per ogni punto **r**, **r/z**, $\mathbf{I_1}$ e $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; il rapporto tra il valore sotto il carico (x = 0) e quello più lontano (x = 4 m).



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Distanza orizzontale e r/z (x = 2 m, y = 3 m)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = \mathbf{3.606}\ \mathrm{m}$$

$$\frac{r}{z} = \frac{3.606}{2} = \mathbf{1.8028} \qquad \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1 = 4.250$$

2 Fattore di influenza e tensione

$$I_1 = \frac{0.47746}{4.250^{2.5}} = \frac{0.47746}{37.237} = 0.01282$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{2^2}\,(0.01282) = \mathbf{0.01603}\ \mathrm{kPa}$$

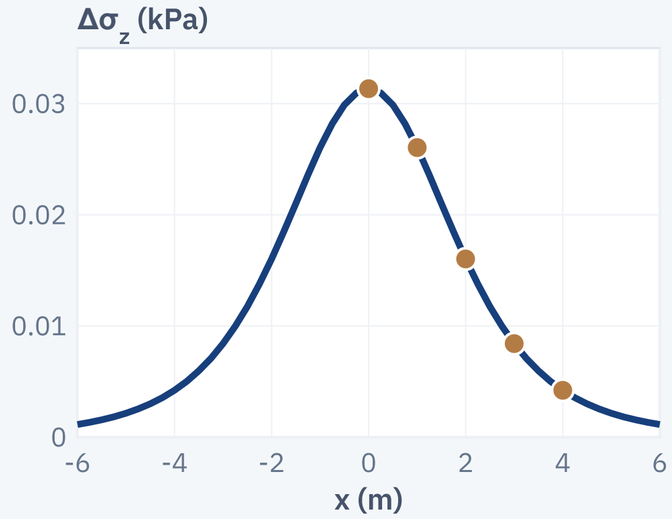
In x = 2 m si ha r = 3.606 m, r/z = 1.803, **$\Delta\sigma_z$ = 0.01603 kPa**. Gli altri valori di x si ottengono con gli stessi tre passaggi (tabella nella pagina successiva).

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

x (m)	r (m)	r/z	I_1	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0	3.000	1.500	0.0251	0.03134
1	3.162	1.581	0.0208	0.02604
2	3.606	1.803	0.0128	**0.01603**
3	4.243	2.121	0.0067	0.00841
4	5.000	2.500	0.0034	0.00422

Nel punto sotto il carico (x = 0, r = 3 m) **0.03134 kPa**; a x = 4 m (r = 5 m) **0.00422 kPa**: rapporto 7.4. A parità di profondità la tensione diminuisce rapidamente all'aumentare della distanza orizzontale; la curva è massima intorno a x = 0 (poiché y = 3 m, il carico dista ancora 3 m).



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

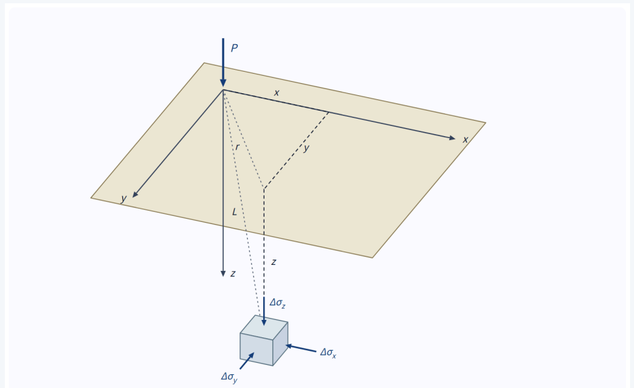
ESEMPIO

Dati

Carico e punto	$P = 5$ **kN; A:** $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m,** $z = 6$ **m (** $r = 5$ **m,** $L = 7.810$ **m)**
Coefficiente di Poisson	$\mu = 0.5; 0.3; 0.2; 0$

RICHIESTO

$\Delta\sigma_x$ e **$\Delta\sigma_y$** (a mano con l'equazione abbreviata per μ = 0.5, con l'equazione completa per μ = 0.3); effetto di μ sulla tensione verticale.



Soluzione (1/3)

SOLUZIONE

1 L^5 (L = 7,810 m)

$$L^5 = 61^{2.5} = 29{,}062\ \text{m}^5 \qquad 2\pi L^5 = 182{,}602$$

2 μ = 0.5: i termini tra parentesi quadre si annullano

$$\Delta\sigma_x = \frac{3P\,x^2 z}{2\pi L^5} = \frac{3(5)(3^2)(6)}{182{,}602} = \frac{810}{182{,}602} = \mathbf{0.00444}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{3P\,y^2 z}{2\pi L^5} = \frac{3(5)(4^2)(6)}{182{,}602} = \frac{1{,}440}{182{,}602} = \mathbf{0.00789}\ \text{kPa}$$

Verifica: per μ = 0.5, $\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y = 3P\,r^2z/(2\pi L^5) = 0.00444 + 0.00789 =$ **0.01232 kPa**; entrambi sono i valori forniti dal modulo.

Soluzione (2/3)

SOLUZIONE

3 Termini dell'equazione completa (x = 3, y = 4, z = 6, r² = 25, L = 7.810)

$$\frac{3x^2 z}{L^5} = \frac{162}{29{,}062} = 0.005574 \qquad \frac{3y^2 z}{L^5} = \frac{288}{29{,}062} = 0.009910$$

$$\frac{x^2 - y^2}{L\,r^2(L+z)} = \frac{-7}{2{,}696.5} = -0.002596 \qquad \frac{y^2 z}{L^3 r^2} = \frac{96}{11{,}910.6} = 0.008060$$

$$\frac{x^2 z}{L^3 r^2} = \frac{54}{11{,}910.6} = 0.004534$$

4 μ = 0.3: 1 − 2μ = 0.4

$$\Delta\sigma_x = \frac{5}{2\pi}\left[0.005574 - 0.4\,(-0.002596 + 0.008060)\right] = \mathbf{0.00270}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{5}{2\pi}\left[0.009910 - 0.4\,(0.002596 + 0.004534)\right] = \mathbf{0.00562}\ \text{kPa}$$

Soluzione (3/3)

SOLUZIONE

μ	$\Delta\sigma_x$ (10^{-3} kPa)	$\Delta\sigma_y$ (10^{-3} kPa)	$\Delta\sigma_z$ (10^{-3} kPa)
0.5	4.436	7.886	17.744
0.3	2.697	5.617	17.744
0.2	1.827	4.482	17.744
0.0	0.088	2.212	17.744

$\Delta\sigma_z$ non dipende da μ ($17.744 \cdot 10^{-3}$ kPa è uguale in ogni riga); le tensioni orizzontali diminuiscono al diminuire di μ: $\Delta\sigma_x = 4.436$ con $\mu = 0.5$, $2.697 \cdot 10^{-3}$ kPa con $\mu = 0.3$. In questo punto tutte e tre le tensioni sono di compressione.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

ESEMPIO

Dati

Carico	$P = 100$ **kN, carico concentrato verticale**
Punti	**sull'asse del carico,** $z = 1; 2; 3; 5; 10$ **m**
Terreno	$\mu = 0.3$

RICHIESTO

Per ogni profondità: $\Delta\sigma_z$ ($I_1 = 3/(2\pi)$ per r = 0) e le tensioni orizzontali $\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$.

Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Tensione verticale (r = 0 ⇒ r/z = 0 ⇒ $I_1 = 3/(2\pi) = 0.4775$)

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 = \frac{100}{2^2}\,(0.4775) = \mathbf{11.937}\ \mathrm{kPa}$$

2 Tensioni orizzontali (valore limite per r = 0, μ = 0.3)

$$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = -\frac{P\,(1-2\mu)}{4\pi z^2} = -\frac{100\,(0.4)}{4\pi\,(2^2)} = \mathbf{-0.796}\ \mathrm{kPa}$$

A z = 2 m sull'asse **$\Delta\sigma_z$ = 11.937 kPa**; le tensioni orizzontali sono **negative** (–0.796 kPa): una lieve riduzione. È circa 15 volte minore della tensione verticale.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

z (m)	$\Delta\sigma_z = 0.4775\ P/z^2$ (kPa)	$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$ (kPa)	rapporto $\Delta\sigma_z$ (z = 1 m = 1)
1	47.746	−3.183	1.0000
2	11.937	−0.796	0.2500
3	5.305	−0.354	0.1111
5	1.910	−0.127	0.0400
10	0.477	−0.032	0.0100

Quando la profondità **raddoppia, la tensione si riduce a un quarto** (z = 1 → 2 m: 47.75 → 11.94 kPa). Poiché le tensioni sono incrementi, si sommano alla tensione dovuta al peso proprio del terreno: ad esempio, se γ = 18 kN/m³, a z = 2 m si ha σ_{v0} = 36 kPa e, dopo il carico, la tensione verticale diventa 47.94 kPa.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

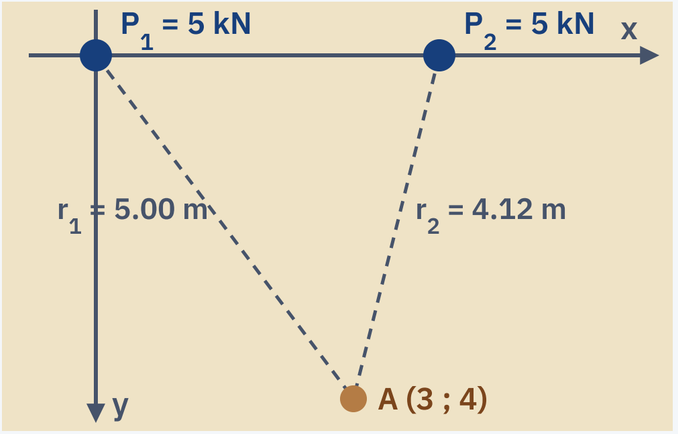
ESEMPIO

Dati

Carichi	$P_1 = 5$ **kN nel punto** $(0;0)$**;** $P_2 = 5$ **kN nel punto** $(4;0)$
Punto A	$x = 3$ **m,** $y = 4$ **m; profondità** $z = 6$ **m (poi** 2**;** 4**;** 10**;** 20 **m)**
Terreno	$\mu = 0.5$

RICHIESTO

Il valore $\Delta\sigma_z$ di ciascun carico e la loro somma; il totale $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$; il profilo con la profondità.



Soluzione (1/3)

SOLUZIONE

1 Carico 1 (all'inizio): identico all'Esempio 1

$$r_1 = 5\ \text{m}, \quad \frac{r_1}{z} = 0.8333, \quad I_{1,1} = 0.12775 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z,1} = \frac{5}{36}(0.12775) = \mathbf{0.01774}\ \text{kPa}$$

2 Carico 2 (nel punto (4 ; 0)): la distanza di A da esso è (−1 ; 4) m

$$r_2 = \sqrt{(3-4)^2 + 4^2} = \sqrt{17} = 4.123\ \text{m}, \qquad \frac{r_2}{z} = 0.6872$$

$$I_{1,2} = \frac{0.47746}{\left[0.6872^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{2.6299} = 0.18155$$

$$\Delta\sigma_{z,2} = \frac{5}{6^2}\,(0.18155) = \mathbf{0.02522}\ \text{kPa}$$

Poiché il carico 2 è più vicino ad A (4.12 m) del carico 1 (5 m), produce una tensione maggiore.

Soluzione (2/3)

SOLUZIONE

3 Tensione verticale: sovrapposizione

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z,1} + \Delta\sigma_{z,2} = 0.01774 + 0.02522 = \mathbf{0.04296}\ \text{kPa}$$

4 Tensioni orizzontali (μ = 0.5): per il carico 2, x = −1, y = 4 (dalla propria distanza)

$$\Delta\sigma_{x,2} = \frac{3(5)(1)(6)}{2\pi\,(53)^{2.5}} = 0.000700 \qquad \Delta\sigma_{y,2} = \frac{3(5)(16)(6)}{2\pi\,(53)^{2.5}} = 0.011207$$

$$\Delta\sigma_x = 0.004436 + 0.000700 = \mathbf{0.00514} \qquad \Delta\sigma_y = 0.007886 + 0.011207 = \mathbf{0.01909}\ \text{kPa}$$

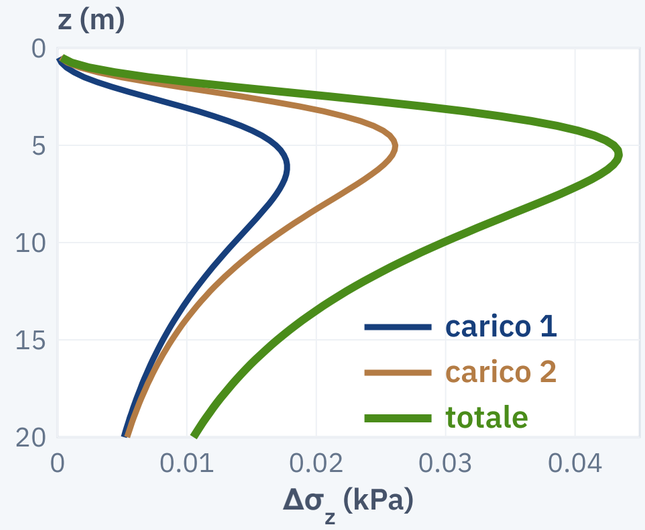
$\Delta\sigma_z$ = 0.04296 kPa, $\Delta\sigma_x$ = 0.00514, $\Delta\sigma_y$ = 0.01909 kPa; in un terreno elastico lineare le tensioni dovute ai carichi si sommano.

Soluzione (3/3)

SOLUZIONE

z (m)	r_1/z	$\Delta\sigma_{z,1}$	r_2/z	$\Delta\sigma_{z,2}$	$\Delta\sigma_z$ totale (kPa)
2	2.500	0.00422	2.062	0.00945	0.01367
4	1.250	0.01419	1.031	0.02442	0.03862
6	0.833	0.01774	0.687	0.02522	**0.04296**
10	0.500	0.01367	0.412	0.01612	0.02979
20	0.250	0.00513	0.206	0.00538	0.01051

A ogni profondità il totale è la somma dei due carichi; il totale massimo si ha intorno a z ≈ 5 m (z = 4 m: 0.03862, z = 6 m: 0.04296 kPa). Il carico 2 dà un contributo maggiore del carico 1 a ogni profondità.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

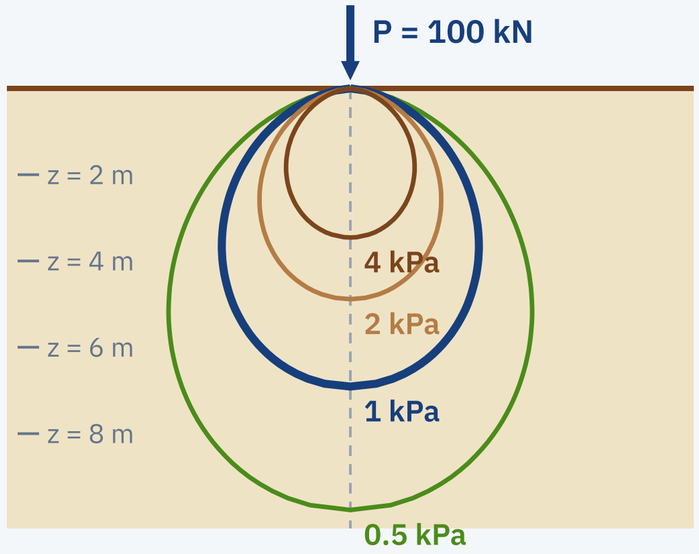
ESEMPIO

Dati

Carico	$P = 100$ **kN, carico concentrato verticale**
Linea	**Punti in cui** $\Delta\sigma_z = 1$ **è pari a kPa;** $z = 1$ **– 6 m**
Linee aggiuntive	0.5; 2; 4 **kPa (figura)**

RICHIESTO

A ogni profondità la distanza della curva dall'asse del carico è **r**; la profondità alla quale la curva si chiude sull'asse; la verifica che il valore di r dia effettivamente $\Delta\sigma_z$ = 1 kPa.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Risolvendo l'equazione rispetto a r: $\Delta\sigma_z = 3P\,z^3/[2\pi(r^2 + z^2)^{5/2}] = 1$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3(100)(4^3)}{2\pi\,(1)}\right)^{0.4} - 4^2} = \sqrt{(3{,}055.8)^{0.4} - 16}$$

$$r = \sqrt{24.777 - 16} = \mathbf{2.963}\ \mathrm{m}$$

2 Verifica: equazione di Boussinesq con il valore di r trovato

$$\Delta\sigma_z = \frac{3(100)}{2\pi}\,\frac{4^3}{(2.963^2 + 4^2)^{5/2}} = \mathbf{1.000}\ \mathrm{kPa}$$

A z = 4 m la curva di livello 1 kPa dista **2.963 m** dall'asse del carico; sostituendo il valore di r trovato nell'equazione di Boussinesq si ottiene esattamente $\Delta\sigma_z$ = 1 kPa (le altre profondità nella pagina successiva).

Soluzione (2/2)

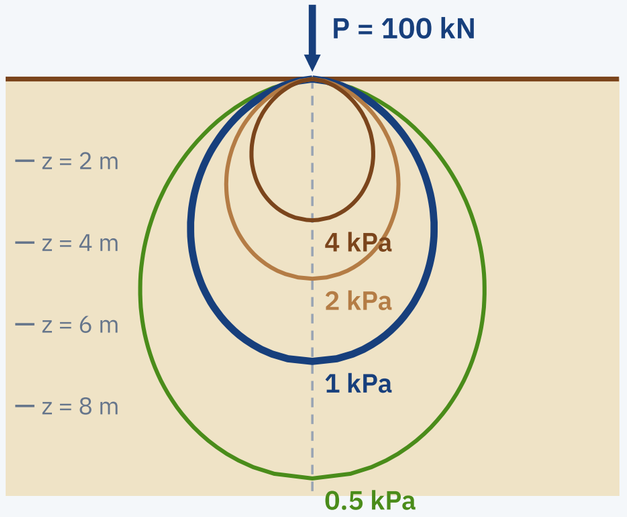
SOLUZIONE

3 Profondità alla quale la linea si chiude sull'asse (r = 0)

$$z_{axis} = \sqrt{\frac{3P}{2\pi\,\Delta\sigma_z}} = \sqrt{\frac{3(100)}{2\pi(1)}} = \sqrt{47.75} = \mathbf{6.91}\ \text{m}$$

z (m)	r (m)	Larghezza 2r (m)	$\Delta\sigma_z$ secondo Boussinesq (kPa)
1	1.922	3.84	1.000
2	2.605	5.21	1.000
3	2.923	5.85	1.000
4	2.963	5.93	1.000
5	2.717	5.43	1.000
6	2.075	4.15	1.000

La curva di livello 1 kPa inizia in superficie nel punto di applicazione del carico, raggiunge la sua massima estensione (r ≈ 2.98 m) alla profondità z ≈ 3.65 m e si chiude sull'asse alla profondità di 6.91 m; le curve delle tensioni minori si estendono più in profondità e più ampiamente.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Sintesi

Punti chiave

Boussinesq: $\Delta\sigma_z = 3P\,z^3/(2\pi L^5) = (P/z^2)\,I_1$, $I_1 = (3/2\pi) / [(r/z)^2 + 1]^{5/2}$; $\Delta\sigma_z$ non dipende né da μ né da E; $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ dipendono da μ

Esempio (P = 5 kN, A (3 ; 4 ; 6)): r = 5 m; L = 7.810 m; r/z = 0.8333; $I_1 = 0.12775$; **$\Delta\sigma_z = 0.01774$ kPa**; per $\mu = 0.5$, $\Delta\sigma_x = 0.00444$, $\Delta\sigma_y = 0.00789$ kPa

Profondità: per lo stesso r = 5 m la tensione massima si ha a $z = r\sqrt{(3/2)} = 6.12$ m; **sotto l'asse del carico** $\Delta\sigma_z = 0.4775\,P/z^2$ (quando z raddoppia, diventa un quarto)

Sovrapposizione: ogni carico è considerato singolarmente con i propri valori r_k e L_k, e le tensioni si sommano (nell'esempio 0.01774 + 0.02522 = 0.04296 kPa)

Bulbo delle pressioni: linee di uguale $\Delta\sigma_z$, $r = \sqrt{[(3Pz^3/(2\pi\Delta\sigma_z))^{2/5} - z^2]}$; per P = 100 kN la linea di 1 kPa si chiude sull'asse alla profondità di 6.91 m

Bibliografia

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels à l’Étude de l’Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Gauthier-Villars, Paris.

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

NOTA

Tutti gli esempi numerici sono stati prodotti con il motore di calcolo del modulo stesso; il modulo restituisce gli stessi valori. Il modulo si apre con il carico P = 5 kN e il punto A (3 ; 4 ; 6).

GeoTerva

Calcoli geotecnici online

Dalla teoria alla pratica

Inserire in GeoTerva i propri carichi singoli, il punto di interesse e il coefficiente di Poisson; il modulo fornisce insieme i valori di $\Delta\sigma_z$, $\Delta\sigma_x$ e $\Delta\sigma_y$, il profilo con la profondità, le isobare, la soluzione passo per passo e la relazione.

Aprire il modulo → **Pagina di teoria →**

Aprire dallo smartphone
I moduli di prova non richiedono registrazione.

Se si desidera utilizzarli nelle proprie lezioni: info@geoterva.com