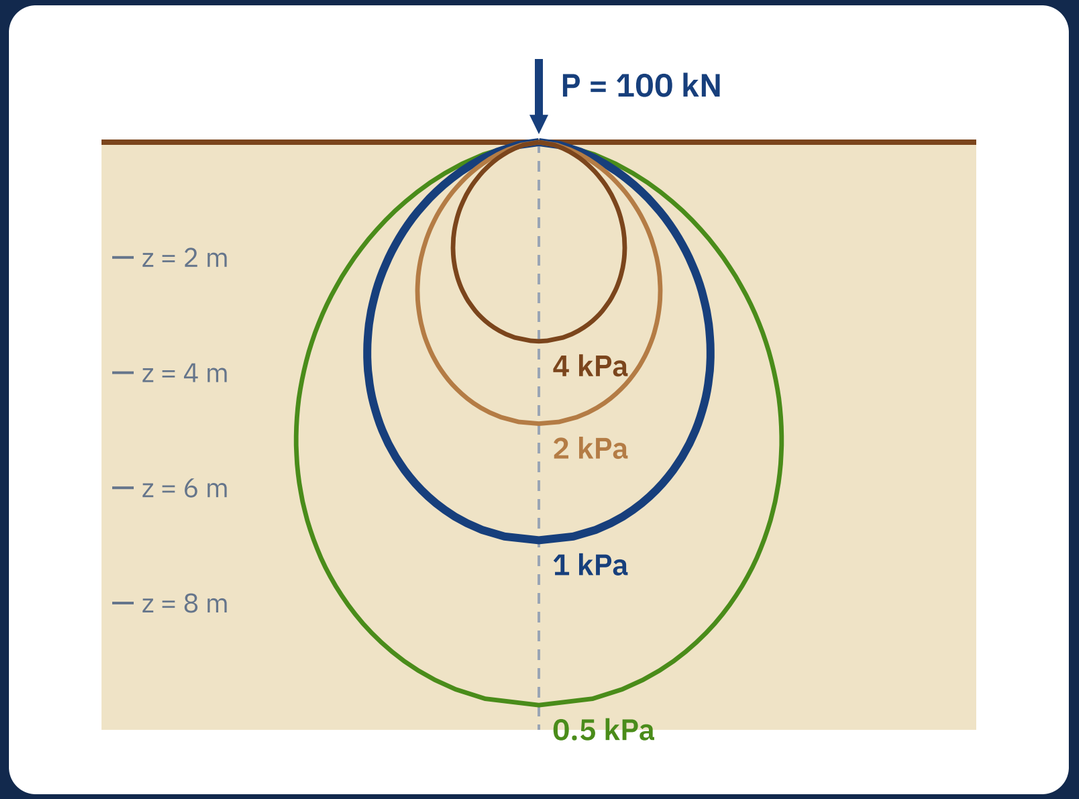
GeoTerva

भू-तकनीकी व्याख्यान स्लाइड · मृदा में प्रतिबल वितरण

# बिंदु भार के नीचे प्रतिबल (Boussinesq)

व्याख्यान: सतह पर स्थित ऊर्ध्वाधर बिंदु भार द्वारा मृदा में उत्पन्न प्रतिबल; प्रारंभिक बिंदु आदि से अंत तक हाथ से हल, गहराई और पार्श्व प्रोफ़ाइल तालिकाओं के साथ।

Boussinesq हल · प्रभाव गुणांक $I_1$ · क्षैतिज प्रतिबल · अध्यारोपण · दाब बल्ब



परिचय

# इस व्याख्यान में हम क्या सीखेंगे?

अर्ध-अनंत, समांगी, समदैशिक और रैखिक प्रत्यास्थ माध्यम में सतह पर **ऊर्ध्वाधर बिंदु भार** से किसी बिंदु पर तीन अभिलंब प्रतिबल: $\Delta\sigma_z$, $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$

ऊर्ध्वाधर प्रतिबल का **$\mu$ और प्रत्यास्थता मापांक पर निर्भर न होना**; क्षैतिज प्रतिबलों का $\mu$ पर निर्भर होना

**प्रभाव गुणांक $I_1$**: $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$ और $I_1$ की केवल $r/z$ पर निर्भरता

**अध्यारोपण**: कई बिंदु भारों के प्रतिबलों को जोड़ना; **समप्रतिबल वक्र** (दाब बल्ब) और भार अक्ष के नीचे $0.4775\ P/z^2$

मॉड्यूल के प्रारंभिक बिंदु को **आरंभ से अंत तक हाथ से** हल करना; गहराई और पार्श्व परिवर्तन तथा क्षैतिज प्रतिबल तालिकाओं में

व्याख्यान प्रवाह

प्रत्येक विषय **तीन चरणों में** पढ़ाया जाता है:

1 · **सिद्धांत**: सूत्र और उसका औचित्य

2 · **प्रश्न**: दिया गया है और ज्ञात करना है

3 · **हल**: चरण-दर-चरण, संख्याओं सहित

उदाहरण: P = 5 kN; बिंदु A: x = 3 m, y = 4 m, z = 6 m (r = 5 m); $\mu = 0.5$।

# Boussinesq अर्ध-अनंत माध्यम

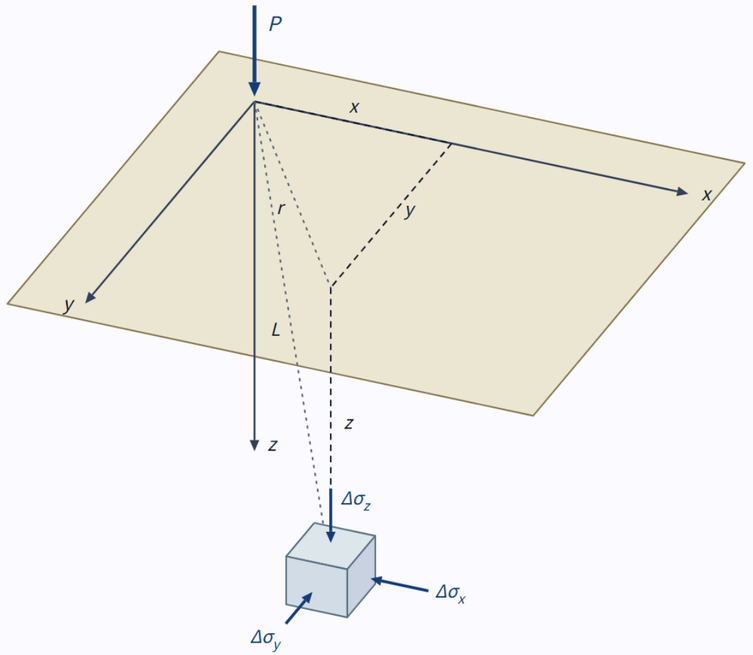
सिद्धांत

**Boussinesq** (1883) ने अनंत विस्तार वाले अर्ध-माध्यम की सतह पर कार्यरत बिंदु भार से समांगी, प्रत्यास्थ और समदैशिक माध्यम में उत्पन्न प्रतिबलों को हल किया।

हल की मान्यताओं के अनुसार मृदा एक **अर्ध-अनंत माध्यम** है: यह समतल सतह के नीचे पार्श्व दिशाओं में और नीचे की ओर असीमित रूप से फैली हुई है।

माध्यम समांगी, समदैशिक और रैखिक प्रत्यास्थ है; यह **पॉइसन अनुपात** μ से परिभाषित होता है, प्रत्यास्थता मापांक प्रतिबलों में नहीं आता।

**P** भार सतह पर कार्यरत एक ऊर्ध्वाधर बिंदु भार है; प्राप्त प्रतिबल भार के कारण हुई वृद्धियाँ हैं, मृदा के स्वयं के भार से आने वाले प्रतिबल इनमें जोड़े जाते हैं।



# एक बिंदु पर तीन अभिलंब प्रतिबल

सिद्धांत

चित्र में दिए गए निर्देशांकों के साथ (**r** = बिंदु की भार अक्ष से क्षैतिज दूरी, **L** = भार से बिंदु की दूरी) बिंदु पर अभिलंब प्रतिबल:

$$\Delta\sigma_x = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3x^2 z}{L^5} - (1-2\mu)\left[\frac{x^2-y^2}{L\,r^2(L+z)} + \frac{y^2 z}{L^3 r^2}\right]\right\}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3y^2 z}{L^5} - (1-2\mu)\left[\frac{y^2-x^2}{L\,r^2(L+z)} + \frac{x^2 z}{L^3 r^2}\right]\right\}$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{L^5} = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{(r^2+z^2)^{5/2}} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\;\; L = \sqrt{r^2+z^2}$$

# पॉइसन अनुपात का प्रभाव

सिद्धांत

**क्षैतिज प्रतिबल** पॉइसन अनुपात μ पर निर्भर करते हैं; जबकि **ऊर्ध्वाधर प्रतिबल** न तो μ पर और न ही प्रत्यास्थता मापांक पर निर्भर करता है।

μ = 0.5 के लिए (आयतन परिवर्तन नहीं, अनपवाहित मृत्तिका) वर्ग कोष्ठक के भीतर के पद शून्य हो जाते हैं और $\Delta\sigma_x = 3P\,x^2z/(2\pi L^5)$, $\Delta\sigma_y = 3P\,y^2z/(2\pi L^5)$ हो जाते हैं।

भार अक्ष पर (r = 0) दोनों क्षैतिज प्रतिबल $-P(1-2\mu)/(4\pi\,z^2)$ मान की ओर अग्रसर होते हैं; यह एक छोटी कमी है।

$$\mu = 0.5: \qquad \Delta\sigma_x = \frac{3P\,x^2 z}{2\pi L^5}, \qquad \Delta\sigma_y = \frac{3P\,y^2 z}{2\pi L^5}$$

$$r = 0: \qquad \Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = -\frac{P\,(1-2\mu)}{4\pi z^2}$$

# $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$

सिद्धांत

चूँकि $L^2 = z^2[(r/z)^2 + 1]$ है, इसलिए समीकरण को केवल r/z पर निर्भर एक गुणांक के साथ लिखा जा सकता है।

प्रभाव गुणांक $I_1$ केवल r/z पर निर्भर करता है; इसलिए एक ही तालिका या वक्र प्रत्येक P और प्रत्येक z के लिए प्रयुक्त होता है।

$$L^2 = z^2\left[(r/z)^2 + 1\right]$$

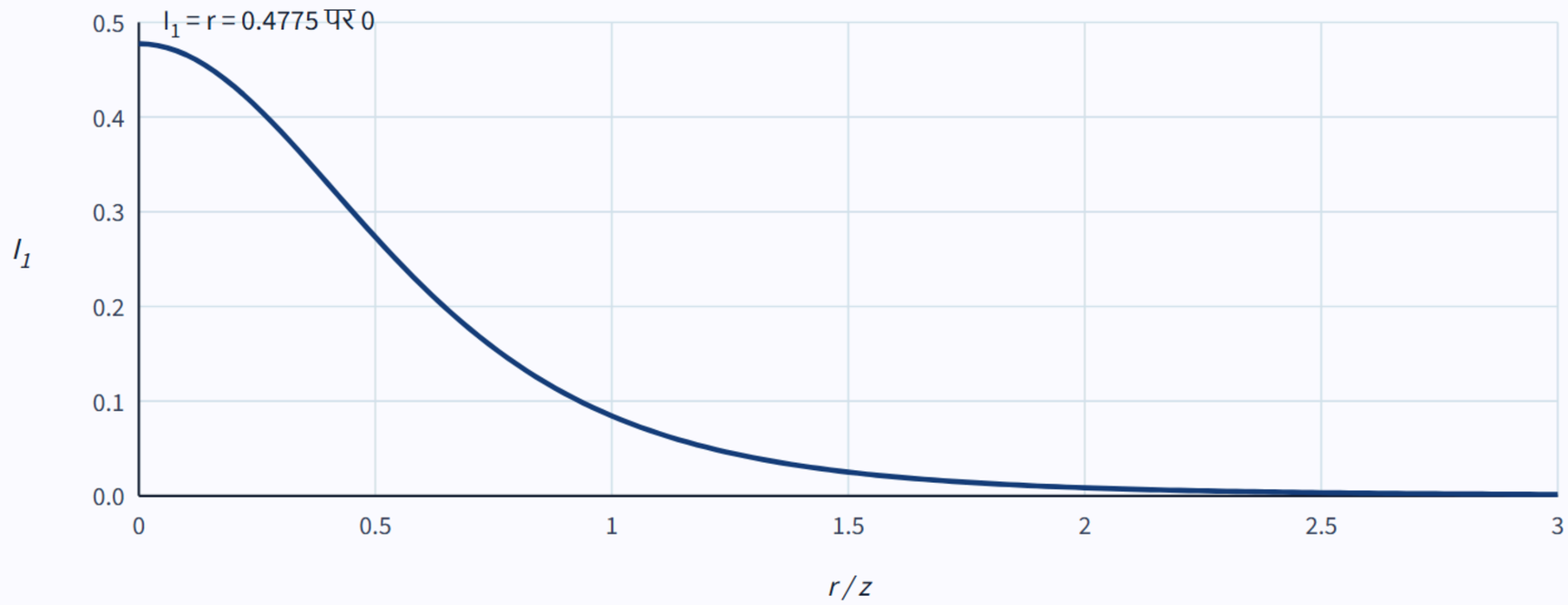
$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 \qquad I_1 = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\left[(r/z)^2 + 1\right]^{5/2}}$$

### $I_1$ के मान (मॉड्यूल)

| r/z | $I_1$ | r/z | $I_1$ |
|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.4775 | 1.0 | 0.0844 |
| 0.1 | 0.4657 | 1.2 | 0.0513 |
| 0.2 | 0.4329 | 1.4 | 0.0317 |
| 0.3 | 0.3849 | 1.6 | 0.0200 |
| 0.4 | 0.3295 | 1.8 | 0.0129 |
| 0.5 | 0.2733 | 2.0 | 0.0085 |
| 0.6 | 0.2214 | 2.5 | 0.0034 |
| 0.7 | 0.1762 | 3.0 | 0.0015 |
| 0.8 | 0.1386 | 4.0 | 0.0004 |
| 0.9 | 0.1083 | 5.0 | 0.0001 |

# $I_1$ और r/z

सिद्धांत




r/z के विरुद्ध प्रभाव गुणांक I1। यह भार अक्ष पर सबसे अधिक, 3/(2π) = 0.4775 होता है, और r/z = 0.0844 पर गिरकर 1 हो जाता है तथा r/z = 0.002 से आगे 3 से कम हो जाता है।

# अध्यारोपण

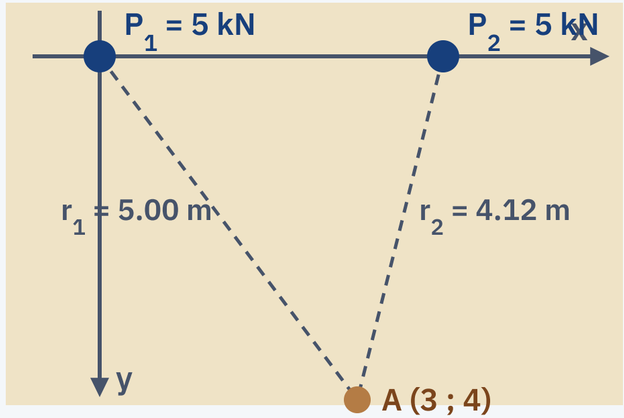
सिद्धांत

एकाधिक बिंदु भारों के लिए रैखिक प्रत्यास्थ मृदा में प्रतिबलों का योग अध्यारोपण से किया जाता है: $\Delta\sigma_z = \Sigma\Delta\sigma_{z,k}$, $\Delta\sigma_x = \Sigma\Delta\sigma_{x,k}$, $\Delta\sigma_y = \Sigma\Delta\sigma_{y,k}$।

प्रत्येक भार को अलग से लिया जाता है और बिंदु उससे $(x - x_{L,k},\ y - y_{L,k})$ दूरी पर लिया जाता है; इस प्रकार $r_k$ और $L_k$ भार के अपने मान हैं।

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{3P_k}{2\pi}\,\frac{z^3}{L_k^5}, \qquad L_k = \sqrt{(x - x_{L,k})^2 + (y - y_{L,k})^2 + z^2}$$

मॉड्यूल अधिकतम आठ भार स्वीकार करता है और किन्हीं दो भारों की स्थिति एक ही नहीं हो सकती; काट दृश्य में समान प्रतिबल रेखाएँ ऊर्ध्वाधर समतल $y = y_A$ में खींची जाती हैं।



# बिंदु भार के प्रतिबल बल्ब

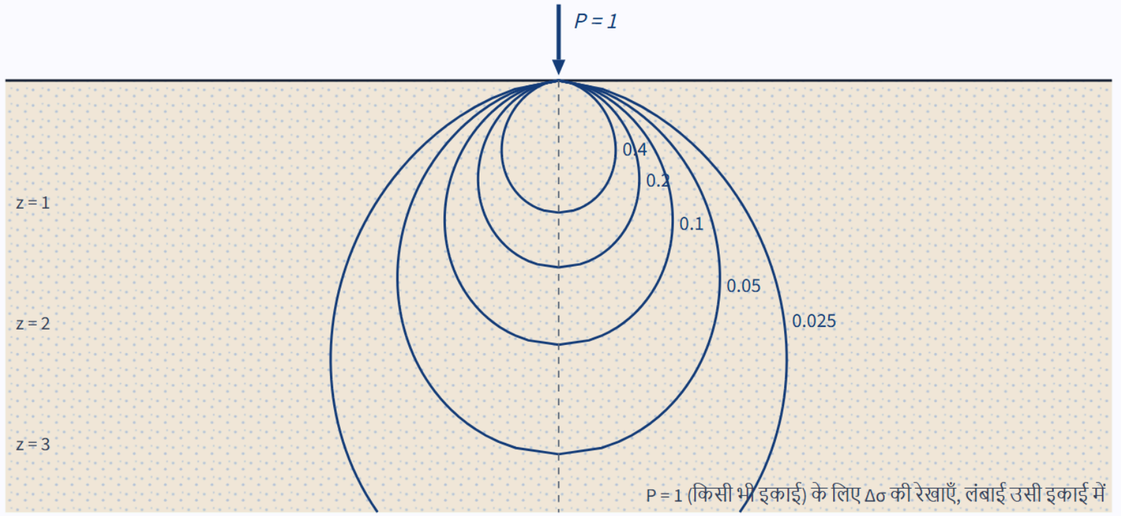
सिद्धांत

$\Delta\sigma_z$ के समान मान वाले बिंदुओं को जोड़ने से प्याज़ के आकार के समप्रतिबल वक्र प्राप्त होते हैं।

भार अक्ष के अनुदिश प्रतिबल गहराई के वर्ग के अनुसार घटता है: $\Delta\sigma_z = 0.4775\ P/z^2$।

भार के बहुत निकट के क्षेत्र में हल बहुत बड़े प्रतिबल देता है: वास्तविक भार कभी बिंदु नहीं होता।

$$r = \sqrt{\left(\frac{3P\,z^3}{2\pi\,\Delta\sigma_z}\right)^{2/5} - z^2}$$



# प्रश्न

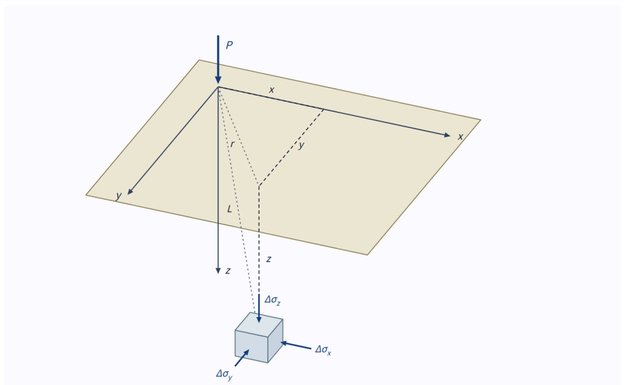
उदाहरण

### दिया गया है

| | |
|---|---|
| भार | **ऊर्ध्वाधर बिंदु भार $P = 5$ kN, सतह पर, निर्देशांक मूलबिंदु पर** |
| बिंदु A | $x = 3$ m, $y = 4$ m, $z = 6$ m |
| मृदा | **समरूप, प्रत्यास्थ अर्ध-अनंत माध्यम;** $\mu = 0.5$ |

### ज्ञात करना है

**r**, **L**, **r/z**, प्रभाव गुणांक $\mathbf{I_1}$ और ऊर्ध्वाधर प्रतिबल वृद्धि $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; परिणाम की समीकरण से सीधी जाँच।



# हल (1/2)

हल

**1** क्षैतिज दूरी r, भार से दूरी L और r/z

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \mathbf{5}\ \text{m} \qquad L = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \mathbf{7.810}\ \text{m}$$

$$r/z = 5/6 = \mathbf{0.8333}$$

**2** प्रभाव गुणांक $I_1$

$$I_1 = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left[(r/z)^2 + 1\right]^{5/2}} = \frac{0.47746}{\left[0.8333^2 + 1\right]^{2.5}}$$

$$I_1 = \frac{0.47746}{1.6944^{2.5}} = \frac{0.47746}{3.7374} = \mathbf{0.12775}$$

बिंदु भार अक्ष से **5 m** दूर और **6 m** गहराई पर है; r/z = 0.8333 होने के कारण $I_1$, भार अक्ष के नीचे के मान (0.4775) का 0.27 गुना है।

# हल (2/2)

हल

**3** ऊर्ध्वाधर प्रतिबल वृद्धि

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2}\, I_1 = \frac{5}{6^2}\,(0.12775) = 0.13889\,(0.12775) = \mathbf{0.01774}\ \text{kPa}$$

**4** जाँच: सीधे Boussinesq समीकरण से

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\,\frac{z^3}{L^5} = \frac{3(5)(6^3)}{2\pi\,(7.810)^5}$$

$$= \frac{3{,}240}{2\pi\,(29{,}062)} = \mathbf{0.01774}\ \text{kPa}$$

**$\Delta\sigma_z$ = 0.01774 kPa** ($I_1$ = 0.12775)। चूँकि भार छोटा है, प्रतिबल भी छोटा है; मॉड्यूल इस बिंदु पर वही मान देता है।

हल की जाँच GeoTerva में करें ↗

# प्रश्न

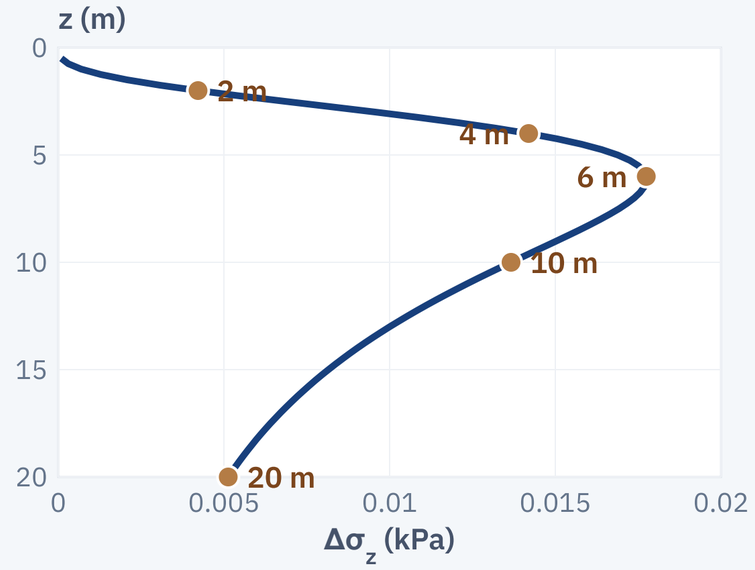
उदाहरण

### दिया गया है

| | |
|---|---|
| भार और बिंदु | $P = 5$ **kN;** $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m, अतः** $r = 5$ **m (प्रत्येक गहराई पर समान)** |
| गहराइयाँ | $z = 2; 4; 6; 10; 20$ **m** |

### ज्ञात करना है

प्रत्येक गहराई के लिए **r/z**, $\mathbf{I_1}$ और $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; भार अक्ष के नीचे $0.4775\ P/z^2$ से तुलना; वह गहराई जहाँ प्रतिबल सबसे अधिक है।



# हल (1/2)

हल

**1** z = 2 m (r = 5 m): r/z = 2.5

$$I_1 = \frac{0.47746}{\left[2.50^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{141.529} = 0.00337$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{2^2}\,(0.00337) = \mathbf{0.00422}\ \text{kPa}$$

**2** z = 4 m (r = 5 m): r/z = 1.25

$$I_1 = \frac{0.47746}{\left[1.25^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{10.511} = 0.04542$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{4^2}\,(0.04542) = \mathbf{0.01419}\ \text{kPa}$$

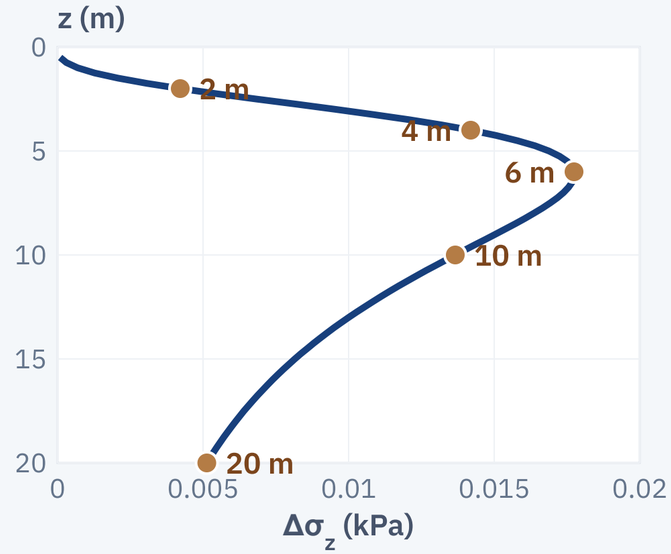
समान r = 5 m के लिए z बढ़ने पर r/z घटता है और $I_1$ बढ़ता है; परंतु P/z² घटता है। गुणनफल पहले बढ़ता है, फिर घटता है: z = 2 m पर 0.00422, z = 4 m पर 0.01419 kPa।

# हल (2/2)

हल

| z (m) | r/z | $I_1$ | $\Delta\sigma_z$ (kPa) | 0.4775 P/z² (kPa) |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2.500 | 0.0034 | 0.00422 | 0.59683 |
| 4 | 1.250 | 0.0454 | 0.01419 | 0.14921 |
| 6 | 0.833 | 0.1278 | **0.01774** | 0.06631 |
| 10 | 0.500 | 0.2733 | 0.01367 | 0.02387 |
| 20 | 0.250 | 0.4103 | 0.00513 | 0.00597 |

अधिकतम प्रतिबल z = r√(3/2) = **6.12 m** गहराई पर है (0.01775 kPa); z = 6 m इस गहराई के बहुत निकट है (मॉड्यूल का प्रारंभिक बिंदु)। अक्ष से 5 m दूर, उथली गहराइयों पर प्रतिबल भार अक्ष के नीचे के प्रतिबल से बहुत छोटा है, गहराई बढ़ने पर उसके निकट आ जाता है (z = 20 m: 0.00513 और 0.00597 kPa)।




हल की जाँच GeoTerva में करें ↗

# प्रश्न

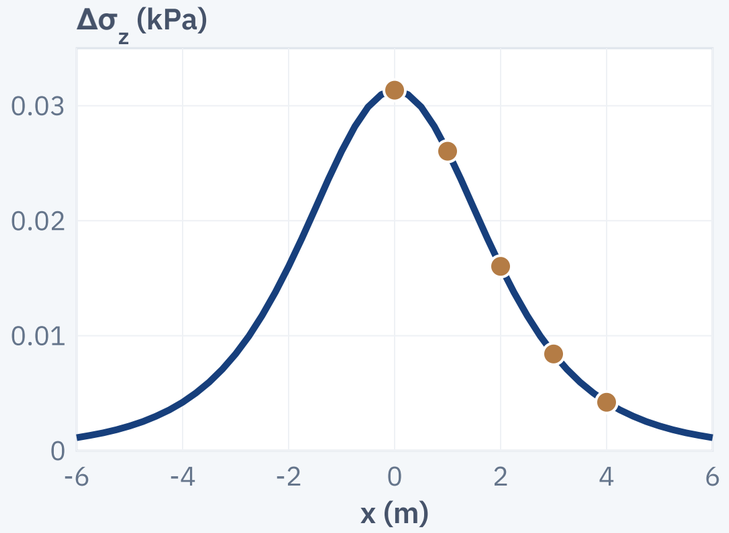
उदाहरण

### ज्ञात करना है

प्रत्येक बिंदु के लिए **r**, **r/z**, $\mathbf{I_1}$ और $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; भार के नीचे (x = 0) और सबसे दूर (x = 4 m) के मान का अनुपात।

### दिया गया है

| | |
|---|---|
| भार | $P = 5$ **kN, निर्देशांक मूल बिंदु पर** |
| बिंदु | $z = 2$ **m,** $y = 3$ **m;** $x = 0, 1, 2, 3, 4$ **m** |
| मृदा | $\mu = 0.5$ **(ऊर्ध्वाधर प्रतिबल** $\mu$ **से स्वतंत्र)** |



# हल (1/2)

हल

**1** क्षैतिज दूरी और r/z (x = 2 m, y = 3 m)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = \mathbf{3.606}\ \text{m}$$

$$\frac{r}{z} = \frac{3.606}{2} = \mathbf{1.8028} \qquad \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1 = 4.250$$

**2** प्रभाव गुणांक और प्रतिबल

$$I_1 = \frac{0.47746}{4.250^{2.5}} = \frac{0.47746}{37.237} = 0.01282$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{2^2}\,(0.01282) = \mathbf{0.01603}\ \text{kPa}$$

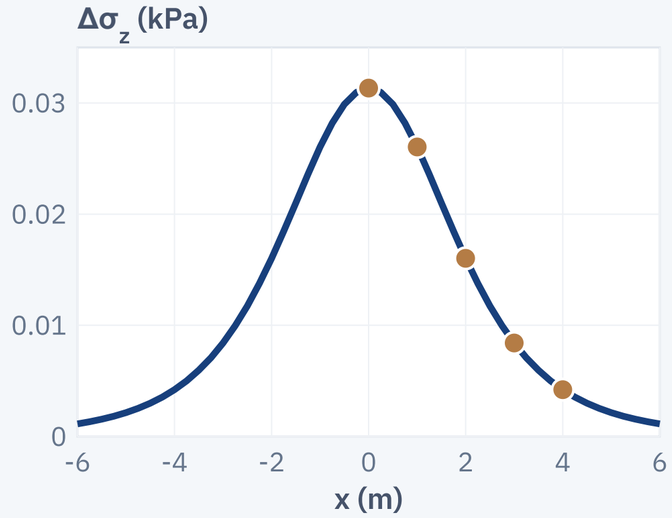
x = 2 m पर r = 3.606 m, r/z = 1.803, **$\Delta\sigma_z$ = 0.01603 kPa** है। अन्य x मान इन्हीं तीन चरणों से ज्ञात किए जाते हैं (तालिका अगले पृष्ठ पर)।

# हल (2/2)

हल

| x (m) | r (m) | r/z | $I_1$ | $\Delta\sigma_z$ (kPa) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3.000 | 1.500 | 0.0251 | 0.03134 |
| 1 | 3.162 | 1.581 | 0.0208 | 0.02604 |
| 2 | 3.606 | 1.803 | 0.0128 | **0.01603** |
| 3 | 4.243 | 2.121 | 0.0067 | 0.00841 |
| 4 | 5.000 | 2.500 | 0.0034 | 0.00422 |

भार के नीचे के बिंदु पर (x = 0, r = 3 m) **0.03134 kPa**; x = 4 m पर (r = 5 m) **0.00422 kPa**: अनुपात 7.4। समान गहराई पर क्षैतिज दूरी बढ़ने के साथ प्रतिबल तेज़ी से घटता है; वक्र x = 0 के आसपास सर्वाधिक है (y = 3 m होने के कारण भार अब भी 3 m दूर है)।




हल की जाँच GeoTerva में करें ↗

# प्रश्न

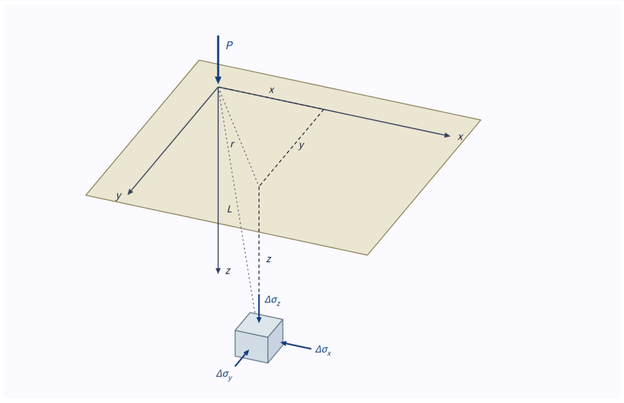
उदाहरण

### दिया गया है

| | |
|---|---|
| भार और बिंदु | $P = 5$ **kN; A:** $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m,** $z = 6$ **m (** $r = 5$ **m,** $L = 7.810$ **m)** |
| पॉइसन अनुपात | $\mu = 0.5; 0.3; 0.2; 0$ |

### ज्ञात करना है

$\Delta\sigma_x$ और $\Delta\sigma_y$ (μ = 0.5 के लिए संक्षिप्त समीकरण से, μ = 0.3 के लिए पूर्ण समीकरण से, हाथ से); ऊर्ध्वाधर प्रतिबल पर μ का प्रभाव।



# हल (1/3)

हल

**1** $L^5$ (L = 7,810 m)

$$L^5 = 61^{2.5} = 29{,}062 \text{ m}^5 \qquad 2\pi L^5 = 182{,}602$$

**2** μ = 0.5: वर्ग कोष्ठक के भीतर के पद शून्य हो जाते हैं

$$\Delta\sigma_x = \frac{3P\,x^2 z}{2\pi L^5} = \frac{3(5)(3^2)(6)}{182{,}602} = \frac{810}{182{,}602} = \mathbf{0.00444}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{3P\,y^2 z}{2\pi L^5} = \frac{3(5)(4^2)(6)}{182{,}602} = \frac{1{,}440}{182{,}602} = \mathbf{0.00789}\ \text{kPa}$$

जाँच: μ = 0.5 के लिए $\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y = 3P\,r^2 z/(2\pi L^5) = 0.00444 + 0.00789 =$ **0.01232 kPa**; दोनों ही मॉड्यूल द्वारा दिए गए मान हैं।

# हल (2/3)

हल

**3** पूर्ण समीकरण के पद (x = 3, y = 4, z = 6, r² = 25, L = 7.810)

$$\frac{3x^2z}{L^5} = \frac{162}{29{,}062} = 0.005574 \qquad \frac{3y^2z}{L^5} = \frac{288}{29{,}062} = 0.009910$$

$$\frac{x^2 - y^2}{L\,r^2(L+z)} = \frac{-7}{2{,}696.5} = -0.002596 \qquad \frac{y^2z}{L^3r^2} = \frac{96}{11{,}910.6} = 0.008060$$

$$\frac{x^2z}{L^3r^2} = \frac{54}{11{,}910.6} = 0.004534$$

**4** μ = 0.3: 1 − 2μ = 0.4

$$\Delta\sigma_x = \frac{5}{2\pi}\left[0.005574 - 0.4\,(-0.002596 + 0.008060)\right] = \mathbf{0.00270}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{5}{2\pi}\left[0.009910 - 0.4\,(0.002596 + 0.004534)\right] = \mathbf{0.00562}\ \text{kPa}$$

# हल (3/3)

हल

| μ | $\Delta\sigma_x$ ($10^{-3}$ kPa) | $\Delta\sigma_y$ ($10^{-3}$ kPa) | $\Delta\sigma_z$ ($10^{-3}$ kPa) |
|---|---|---|---|
| 0.5 | 4.436 | 7.886 | 17.744 |
| 0.3 | 2.697 | 5.617 | 17.744 |
| 0.2 | 1.827 | 4.482 | 17.744 |
| 0.0 | 0.088 | 2.212 | 17.744 |

**$\Delta\sigma_z$, μ पर निर्भर नहीं करता** ($17.744 \cdot 10^{-3}$ kPa प्रत्येक पंक्ति में समान है); μ घटने पर क्षैतिज प्रतिबल घटते हैं: μ = 0.5 पर $\Delta\sigma_x$ = 4.436, μ = 0.3 पर $2.697 \cdot 10^{-3}$ kPa। इस बिंदु पर तीनों प्रतिबल संपीडक हैं।

# प्रश्न

उदाहरण

**दिया गया है**

| | |
|---|---|
| भार | $P = 100$ **kN, ऊर्ध्वाधर बिंदु भार** |
| बिंदु | **भार अक्ष पर,** $z = 1; 2; 3; 5; 10$ **m** |
| मृदा | $\mu = 0.3$ |

**ज्ञात करना है**

प्रत्येक गहराई के लिए $\Delta\sigma_z$ (r = 0 के लिए $I_1 = 3/(2\pi)$) और क्षैतिज प्रतिबल $\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$।

# हल (1/2)

हल

**1** ऊर्ध्वाधर प्रतिबल (r = 0 ⇒ r/z = 0 ⇒ $I_1 = 3/(2\pi) = 0.4775$)

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 = \frac{100}{2^2}(0.4775) = \mathbf{11.937}\ \text{kPa}$$

**2** क्षैतिज प्रतिबल (r = 0 के लिए सीमांत मान, μ = 0.3)

$$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = -\frac{P(1-2\mu)}{4\pi z^2} = -\frac{100\,(0.4)}{4\pi\,(2^2)} = -\mathbf{0.796}\ \text{kPa}$$

z = 2 m पर अक्ष के नीचे **$\Delta\sigma_z$ = 11.937 kPa**; क्षैतिज प्रतिबल **ऋणात्मक** हैं (−0.796 kPa): एक छोटी कमी। यह ऊर्ध्वाधर प्रतिबल से लगभग 15 गुना छोटा है।

# हल (2/2)

हल

| z (m) | $\Delta\sigma_z = 0.4775\ P/z^2$ (kPa) | $\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$ (kPa) | $\Delta\sigma_z$ अनुपात (z = 1 m = 1) |
|---|---|---|---|
| 1 | 47.746 | −3.183 | 1.0000 |
| 2 | 11.937 | −0.796 | 0.2500 |
| 3 | 5.305 | −0.354 | 0.1111 |
| 5 | 1.910 | −0.127 | 0.0400 |
| 10 | 0.477 | −0.032 | 0.0100 |

गहराई **दोगुनी होने पर प्रतिबल घटकर चौथाई** रह जाता है (z = 1 → 2 m: 47.75 → 11.94 kPa)। प्रतिबल वृद्धियाँ होने के कारण वे मृदा के अपने भार से आने वाले प्रतिबल में जोड़े जाते हैं: उदाहरणार्थ $\gamma = 18\ kN/m^3$ हो तो z = 2 m पर $\sigma_{v0} = 36$ kPa और भार के बाद ऊर्ध्वाधर प्रतिबल 47.94 kPa होता है।

हल की जाँच GeoTerva में करें ↗

# प्रश्न

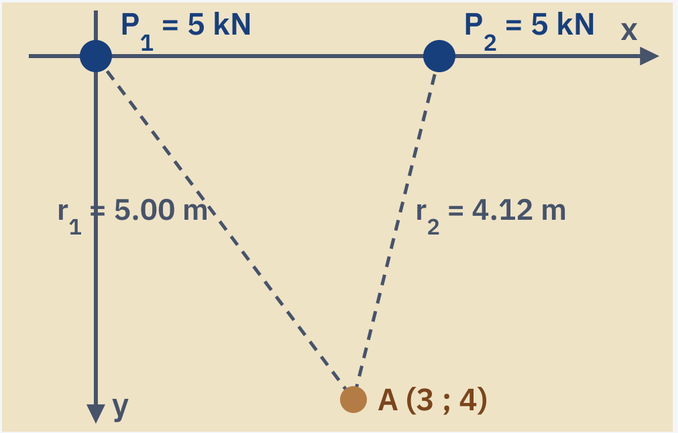
उदाहरण

### दिया गया है

| | |
|---|---|
| भार | $(0;0)$ **बिंदु पर** $P_1 = 5$ **kN;** $(4;0)$ **बिंदु पर** $P_2 = 5$ **kN** |
| बिंदु A | $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m; गहराई** $z = 6$ **m (फिर** $2; 4; 10; 20$ **m)** |
| मृदा | $\mu = 0.5$ |

### ज्ञात करना है

प्रत्येक भार का $\Delta\sigma_z$ मान और उनका योग; कुल $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$; गहराई प्रोफ़ाइल।



# हल (1/3)

हल

**1** भार 1 (प्रारंभ में): उदाहरण 1 के समान

$$r_1 = 5\ \text{m}, \quad \frac{r_1}{z} = 0.8333, \quad I_{1,1} = 0.12775 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z,1} = \frac{5}{36}(0.12775) = \mathbf{0.01774}\ \text{kPa}$$

**2** भार 2 (बिंदु (4 ; 0) पर): A की उससे दूरी (−1 ; 4) m

$$r_2 = \sqrt{(3-4)^2 + 4^2} = \sqrt{17} = 4.123\ \text{m}, \qquad \frac{r_2}{z} = 0.6872$$

$$I_{1,2} = \frac{0.47746}{\left[0.6872^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{2.6299} = 0.18155$$

$$\Delta\sigma_{z,2} = \frac{5}{6^2}\,(0.18155) = \mathbf{0.02522}\ \text{kPa}$$

चूँकि भार 2, भार 1 (5 m) की तुलना में A के अधिक निकट (4.12 m) है, वह अधिक प्रतिबल देता है।

# हल (2/3)

हल

**3** ऊर्ध्वाधर प्रतिबल: अध्यारोपण

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z,1} + \Delta\sigma_{z,2} = 0.01774 + 0.02522 = \mathbf{0.04296}\ \text{kPa}$$

**4** क्षैतिज प्रतिबल (μ = 0.5): भार 2 के लिए x = −1, y = 4 (उसकी अपनी दूरी से)

$$\Delta\sigma_{x,2} = \frac{3(5)(1)(6)}{2\pi\,(53)^{2.5}} = 0.000700 \qquad \Delta\sigma_{y,2} = \frac{3(5)(16)(6)}{2\pi\,(53)^{2.5}} = 0.011207$$

$$\Delta\sigma_x = 0.004436 + 0.000700 = \mathbf{0.00514} \qquad \Delta\sigma_y = 0.007886 + 0.011207 = \mathbf{0.01909}\ \text{kPa}$$

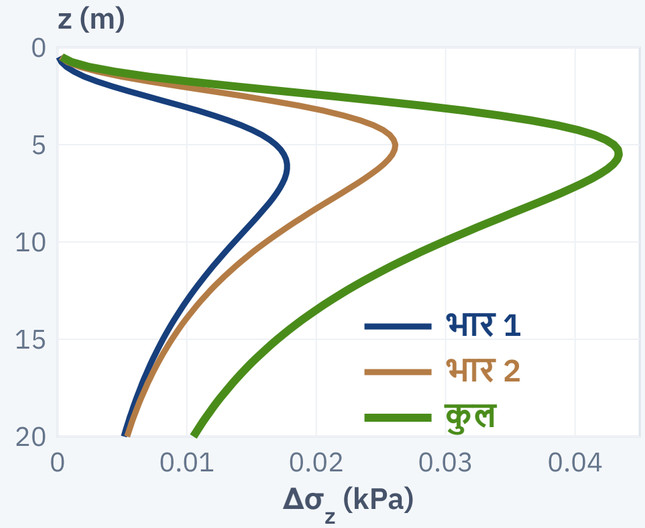
**$\Delta\sigma_z$ = 0.04296 kPa**, $\Delta\sigma_x$ = 0.00514, $\Delta\sigma_y$ = 0.01909 kPa; रैखिक प्रत्यास्थ मृदा में भारों के प्रतिबल जोड़ दिए जाते हैं।

# हल (3/3)

हल

| z (m) | $r_1/z$ | $\Delta\sigma_{z,1}$ | $r_2/z$ | $\Delta\sigma_{z,2}$ | कुल $\Delta\sigma_z$ (kPa) |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2.500 | 0.00422 | 2.062 | 0.00945 | 0.01367 |
| 4 | 1.250 | 0.01419 | 1.031 | 0.02442 | 0.03862 |
| 6 | 0.833 | 0.01774 | 0.687 | 0.02522 | **0.04296** |
| 10 | 0.500 | 0.01367 | 0.412 | 0.01612 | 0.02979 |
| 20 | 0.250 | 0.00513 | 0.206 | 0.00538 | 0.01051 |

प्रत्येक गहराई पर कुल दोनों भारों का योग है; सबसे बड़ा कुल z ≈ 5 m के आसपास है (z = 4 m: 0.03862, z = 6 m: 0.04296 kPa)। भार 2 प्रत्येक गहराई पर भार 1 से अधिक योगदान देता है।




हल की जाँच GeoTerva में करें ↗

# प्रश्न

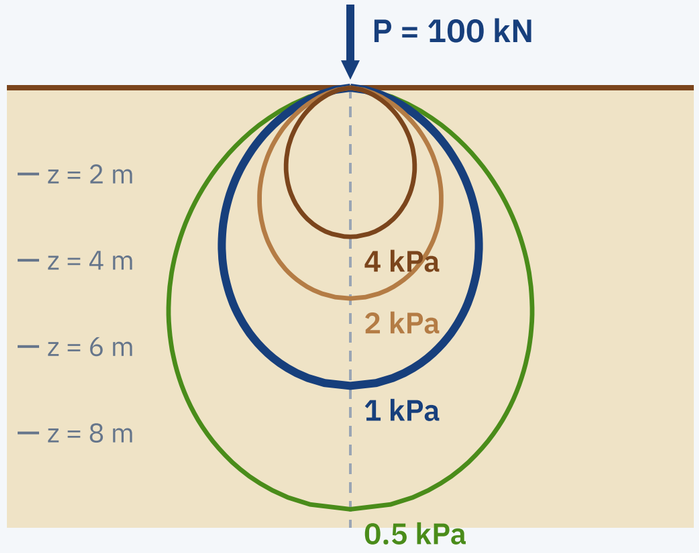
उदाहरण

**दिया गया है**

| | |
|---|---|
| भार | $P = 100$ **kN, ऊर्ध्वाधर बिंदु भार** |
| रेखा | $\Delta\sigma_z = 1$ **kPa के बराबर बिंदु;** $z = 1 - 6$ **m** |
| अतिरिक्त रेखाएँ | $0.5; 2; 4$ **kPa (आकृति)** |

**ज्ञात करना है**

प्रत्येक गहराई पर रेखा की भार अक्ष से दूरी **r**; वह गहराई जहाँ रेखा अक्ष पर बंद होती है; इस बात की जाँच कि r का मान वास्तव में $\Delta\sigma_z$ = 1 kPa देता है।



# हल (1/2)

हल

**1** समीकरण को r के लिए हल करना: $\Delta\sigma_z = 3P\,z^3/[2\pi(r^2 + z^2)^{5/2}] = 1$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3(100)(4^3)}{2\pi\,(1)}\right)^{0.4} - 4^2} = \sqrt{(3{,}055.8)^{0.4} - 16}$$

$$r = \sqrt{24.777 - 16} = \mathbf{2.963}\ \text{m}$$

**2** जाँच: प्राप्त r के साथ Boussinesq समीकरण

$$\Delta\sigma_z = \frac{3(100)}{2\pi}\,\frac{4^3}{(2.963^2 + 4^2)^{5/2}} = \mathbf{1.000}\ \text{kPa}$$

z = 4 m पर 1 kPa की समप्रतिबल रेखा भार अक्ष से **2.963 m** दूर है; प्राप्त r मान को Boussinesq समीकरण में रखने पर $\Delta\sigma_z$ ठीक 1 kPa आता है (अन्य गहराइयाँ अगले पृष्ठ पर)।

# हल (2/2)

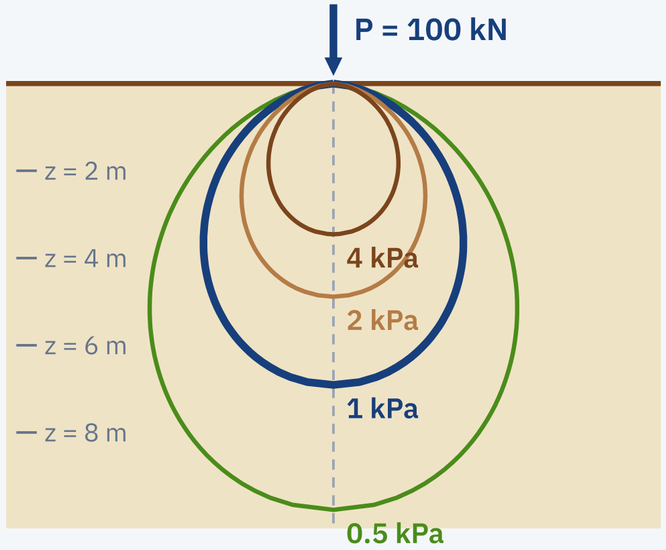
हल

**3** वह गहराई जहाँ रेखा अक्ष पर बंद होती है (r = 0)

$$z_{axis} = \sqrt{\frac{3P}{2\pi\,\Delta\sigma_z}} = \sqrt{\frac{3(100)}{2\pi(1)}} = \sqrt{47.75} = \mathbf{6.91}\ \text{m}$$

| z (m) | r (m) | चौड़ाई 2r (m) | Boussinesq से $\Delta\sigma_z$ (kPa) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.922 | 3.84 | 1.000 |
| 2 | 2.605 | 5.21 | 1.000 |
| 3 | 2.923 | 5.85 | 1.000 |
| 4 | 2.963 | 5.93 | 1.000 |
| 5 | 2.717 | 5.43 | 1.000 |
| 6 | 2.075 | 4.15 | 1.000 |

1 kPa की समप्रतिबल रेखा सतह पर भार बिंदु से आरंभ होती है, z ≈ 3.65 m गहराई पर अपनी अधिकतम चौड़ाई (r ≈ 2.98 m) पर पहुँचती है और 6.91 m गहराई पर अक्ष पर बंद हो जाती है; छोटे प्रतिबलों की रेखाएँ अधिक गहराई तक और अधिक चौड़ी फैलती हैं।




हल की जाँच GeoTerva में करें ↗

सारांश

# याद रखने योग्य बिंदु

**Boussinesq**: $\Delta\sigma_z = 3P\,z^3/(2\pi L^5) = (P/z^2)\,I_1$, $I_1 = (3/2\pi)\,/\,[(r/z)^2+1]^{5/2}$; $\Delta\sigma_z$ न $\mu$ पर निर्भर है न $E$ पर; $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ $\mu$ पर निर्भर हैं

**उदाहरण (P = 5 kN, A (3 ; 4 ; 6))**: r = 5 m; L = 7.810 m; r/z = 0.8333; $I_1 = 0.12775$; **$\Delta\sigma_z = 0.01774$ kPa**; $\mu = 0.5$ के लिए $\Delta\sigma_x = 0.00444$, $\Delta\sigma_y = 0.00789$ kPa

**गहराई**: उसी r = 5 m के लिए सबसे बड़ा प्रतिबल $z = r\sqrt{(3/2)} = 6.12$ m पर होता है; **भार अक्ष के नीचे** $\Delta\sigma_z = 0.4775\,P/z^2$ (z दोगुना होने पर एक-चौथाई)

**अध्यारोपण**: प्रत्येक भार अपने $r_k$ और $L_k$ मानों के साथ अलग से लिया जाता है, प्रतिबल जोड़े जाते हैं (उदाहरण में 0.01774 + 0.02522 = 0.04296 kPa)

**दाब बल्ब**: समान $\Delta\sigma_z$ की रेखाएँ $r = \sqrt{[(3Pz^3/(2\pi\Delta\sigma_z))^{2/5} - z^2]}$; P = 100 kN के लिए 1 kPa की रेखा 6.91 m गहराई पर अक्ष पर बंद हो जाती है

# संदर्भ

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels à l’Étude de l’Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Gauthier-Villars, Paris.

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

**टिप्पणी**

सभी संख्यात्मक उदाहरण मॉड्यूल के अपने गणना इंजन से तैयार किए गए हैं; मॉड्यूल वही मान देता है। मॉड्यूल P = 5 kN भार और बिंदु A (3 ; 4 ; 6) के साथ खुलता है।

GeoTerva

ऑनलाइन भू-तकनीकी गणनाएँ

# सिद्धांत से अनुप्रयोग तक

अपने बिंदु भार, बिंदु और पॉइसन अनुपात GeoTerva में दर्ज करें; मॉड्यूल $\Delta\sigma_z$, $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ के मान, गहराई प्रोफ़ाइल, सम-प्रतिबल वक्र, चरण-दर-चरण हल और रिपोर्ट एक साथ देता है।

मॉड्यूल खोलें →

सिद्धांत पृष्ठ →

**फ़ोन पर खोलें**

नमूना मॉड्यूल के लिए पंजीकरण आवश्यक नहीं है।