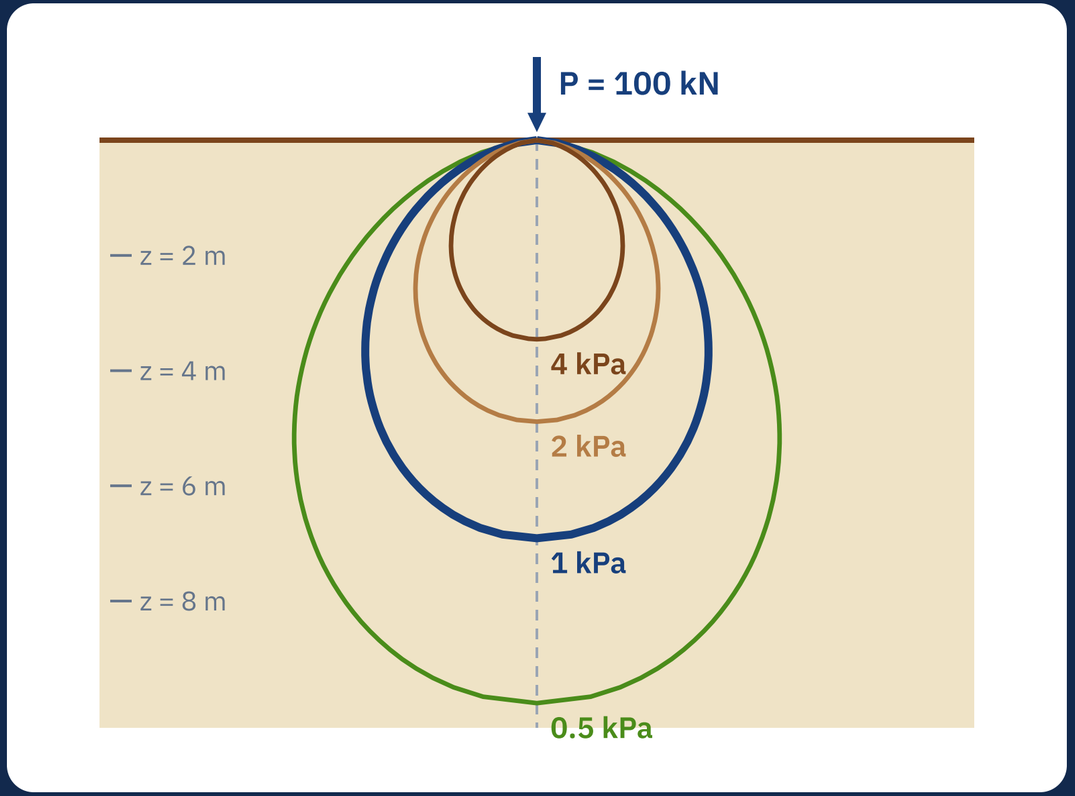
Présentation de cours de géotechnique · Diffusion des contraintes dans le sol

Contrainte sous une charge ponctuelle (Boussinesq)

Cours : contraintes produites dans le sol par une charge ponctuelle verticale en surface ; le point initial est résolu à la main de bout en bout, les profils en profondeur et latéraux étant présentés par des tableaux.



- Solution de Boussinesq
- Coefficient d'influence I_1
- Contraintes horizontales
- Superposition
- Bulbes de pression

Introduction

Que verrons-nous dans ce cours ?

Les trois contraintes normales en un point sous l'effet d'une **charge ponctuelle verticale** en surface d'un milieu semi-infini, homogène, isotrope et élastique linéaire : $\Delta\sigma_z$, $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$

Que la contrainte verticale **ne dépend ni de μ ni du module d'élasticité** ; que les contraintes horizontales dépendent de μ

Coefficient d'influence I_1 : $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$ et dépendance de I_1 au seul rapport r/z

Superposition : sommation des contraintes de plusieurs charges ponctuelles ; **courbes d'égale contrainte** (bulbes de pression) et $0.4775\ P/z^2$ sous l'axe de la charge

Le point d'ouverture du module **de bout en bout à la main** ; variation en profondeur et latérale, contraintes horizontales dans des tableaux

DÉROULÉ DU COURS

Chaque thème est traité en **trois étapes** :

1 · **Théorie** : formule et justification

2 · **Énoncé** : données et à déterminer

3 · **Solution** : étape par étape, avec les valeurs numériques

Exemple : P = 5 kN ; point A : x = 3 m, y = 4 m, z = 6 m (r = 5 m) ; μ = 0.5.

Milieu semi-infini de Boussinesq

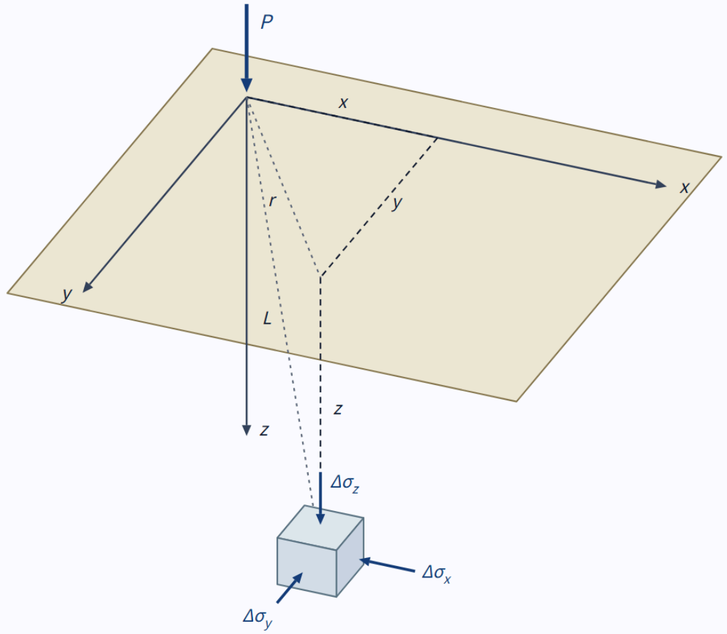
THÉORIE

Boussinesq (1883) a résolu les contraintes engendrées, dans un milieu homogène, élastique et isotrope, par une charge ponctuelle agissant à la surface d'un demi-espace infini.

Selon les hypothèses de la solution, le sol est **un milieu semi-infini** : il s'étend sans limite latéralement et vers le bas sous une surface plane.

Le milieu est homogène, isotrope et élastique linéaire ; il est défini par le **coefficient de Poisson** μ, le module d'élasticité n'intervenant pas dans les contraintes.

P est une charge ponctuelle verticale agissant sur la surface ; les contraintes obtenues sont les accroissements dus à la charge, auxquels s'ajoutent les contraintes dues au poids propre du sol.



Trois contraintes normales en un point

THÉORIE

Avec les coordonnées de la figure (**r** = distance horizontale du point à l'axe de la charge, **L** = distance du point à la charge), les contraintes normales au point sont :

$$\Delta\sigma_x = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3x^2 z}{L^5} - (1-2\mu)\left[\frac{x^2-y^2}{L\,r^2(L+z)} + \frac{y^2 z}{L^3 r^2}\right]\right\}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3y^2 z}{L^5} - (1-2\mu)\left[\frac{y^2-x^2}{L\,r^2(L+z)} + \frac{x^2 z}{L^3 r^2}\right]\right\}$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\,\frac{z^3}{L^5} = \frac{3P}{2\pi}\,\frac{z^3}{(r^2+z^2)^{5/2}} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\;\; L = \sqrt{r^2+z^2}$$

Effet du coefficient de Poisson

THÉORIE

Les **contraintes horizontales** dépendent du coefficient de Poisson μ ; la **contrainte verticale**, en revanche, ne dépend ni de μ ni du module d'Young.

Pour μ = 0.5 (pas de variation de volume, argile non drainée), les termes entre crochets s'annulent et $\Delta\sigma_x = 3P\,x^2z/(2\pi L^5)$, $\Delta\sigma_y = 3P\,y^2z/(2\pi L^5)$.

Sur l'axe de la charge (r = 0), les deux contraintes horizontales tendent vers $-P(1-2\mu)/(4\pi z^2)$; il s'agit d'une faible diminution.

$$\mu = 0.5 : \qquad \Delta\sigma_x = \frac{3P\,x^2 z}{2\pi L^5}, \qquad \Delta\sigma_y = \frac{3P\,y^2 z}{2\pi L^5}$$

$$r = 0 : \qquad \Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = -\frac{P\,(1-2\mu)}{4\pi z^2}$$

$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$

THÉORIE

Comme $L^2 = z^2[(r/z)^2 + 1]$, l'équation peut s'écrire avec un coefficient ne dépendant que de r/z.

Le facteur d'influence I_1 ne dépend que de r/z ; c'est pourquoi une seule table ou une seule courbe sert pour tout P et tout z.

$$L^2 = z^2\left[(r/z)^2 + 1\right]$$

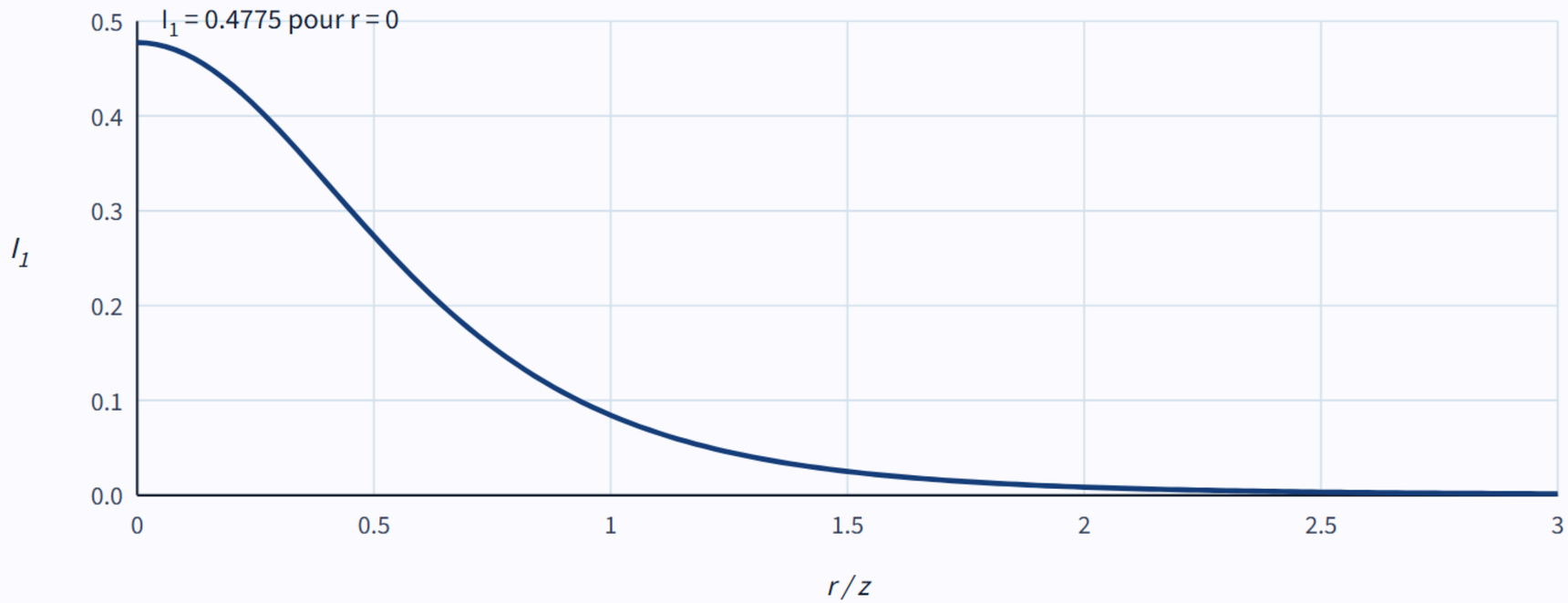
$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2}\, I_1 \qquad I_1 = \frac{3}{2\pi}\,\frac{1}{\left[(r/z)^2 + 1\right]^{5/2}}$$

VALEURS DE I_1 (MODULE)

r/z	I_1	r/z	I_1
0.0	0.4775	1.0	0.0844
0.1	0.4657	1.2	0.0513
0.2	0.4329	1.4	0.0317
0.3	0.3849	1.6	0.0200
0.4	0.3295	1.8	0.0129
0.5	0.2733	2.0	0.0085
0.6	0.2214	2.5	0.0034
0.7	0.1762	3.0	0.0015
0.8	0.1386	4.0	0.0004
0.9	0.1083	5.0	0.0001

I_1 et r/z

THÉORIE



Le coefficient d'influence I1 en fonction de r/z. Il est maximal sur l'axe de la charge, 3/(2π) = 0.4775, et décroît jusqu'à 0.0844 pour r/z = 1 et reste inférieur à 0.002 au-delà de r/z = 3.

Superposition

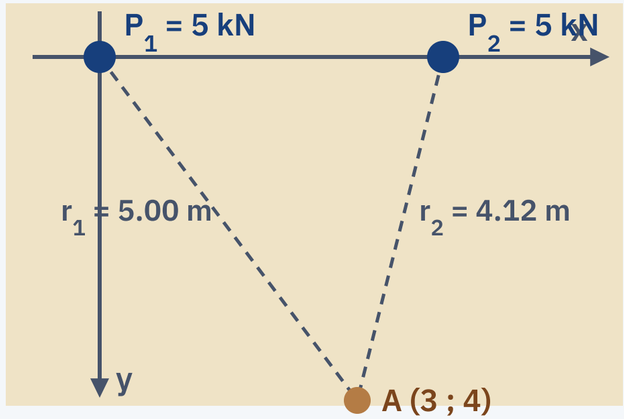
THÉORIE

Pour plusieurs charges ponctuelles sur un sol élastique linéaire, les contraintes se somment par superposition : $\Delta\sigma_z = \Sigma\Delta\sigma_{z,k}$, $\Delta\sigma_x = \Sigma\Delta\sigma_{x,k}$, $\Delta\sigma_y = \Sigma\Delta\sigma_{y,k}$.

Chaque charge est considérée séparément et le point est repéré par le décalage $(x - x_{L,k}, y - y_{L,k})$ par rapport à elle ; r_k et L_k sont ainsi les valeurs propres de la charge.

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{3P_k}{2\pi}\,\frac{z^3}{L_k^5}, \qquad L_k = \sqrt{(x - x_{L,k})^2 + (y - y_{L,k})^2 + z^2}$$

Le module accepte au plus huit charges, et deux charges ne peuvent occuper la même position ; les courbes d'égale contrainte de la vue en coupe sont tracées dans le plan vertical $y = y_A$.



Bulbes de contraintes d'une charge ponctuelle

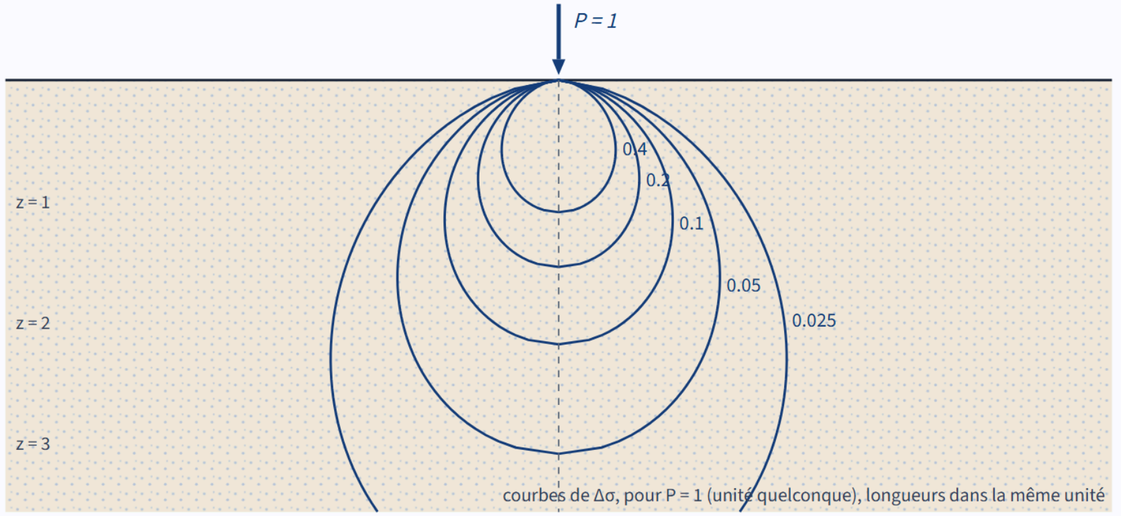
THÉORIE

En reliant les points de même valeur de $\Delta\sigma_z$, on obtient des courbes d'isocontraintes en forme de bulbe.

Le long de l'axe de la charge, la contrainte décroît avec le carré de la profondeur : $\Delta\sigma_z = 0.4775\ P/z^2$.

Dans la zone très proche de la charge, la solution donne des contraintes très élevées : une charge réelle n'est jamais ponctuelle.

$$r = \sqrt{\left(\frac{3P\,z^3}{2\pi\,\Delta\sigma_z}\right)^{2/5} - z^2}$$



Énoncé

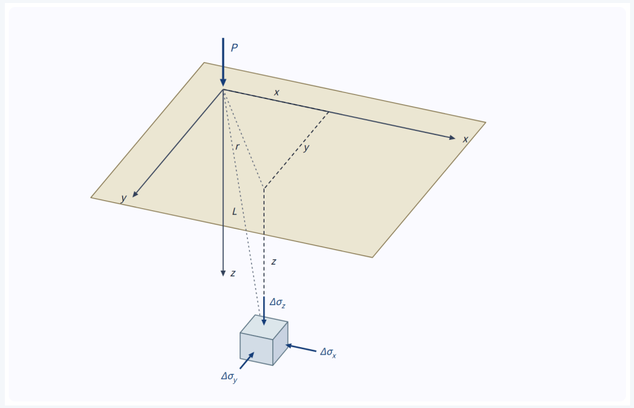
EXEMPLE

Données

Charge	**charge ponctuelle verticale $P = 5$ kN, en surface, à l'origine des coordonnées**
Point A	$x = 3$ m, $y = 4$ m, $z = 6$ m
Sol	**milieu homogène, élastique et semi-infini ; $\mu = 0.5$**

À DÉTERMINER

r, **L**, **r/z**, coefficient d'influence $\mathbf{I_1}$ et accroissement de contrainte verticale $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; vérification directe du résultat par l'équation.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Distance horizontale r, distance à la charge L et r/z

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \mathbf{5}\ \mathrm{m} \qquad L = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \mathbf{7.810}\ \mathrm{m}$$

$$r/z = 5/6 = \mathbf{0.8333}$$

2 Coefficient d'influence I_1

$$I_1 = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left[(r/z)^2 + 1\right]^{5/2}} = \frac{0.47746}{\left[0.8333^2 + 1\right]^{2.5}}$$

$$I_1 = \frac{0.47746}{1.6944^{2.5}} = \frac{0.47746}{3.7374} = \mathbf{0.12775}$$

Le point se trouve à **5 m** de l'axe de la charge et à **6 m** de profondeur ; comme r/z = 0.8333, I_1 vaut 0.27 fois la valeur sous l'axe de la charge (0.4775).

Solution (2/2)

SOLUTION

3 Accroissement de contrainte verticale

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 = \frac{5}{6^2}\,(0.12775) = 0.13889\,(0.12775) = \mathbf{0.01774}\ \mathrm{kPa}$$

4 Vérification : équation de Boussinesq directe

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{L^5} = \frac{3(5)(6^3)}{2\pi\,(7.810)^5}$$

$$= \frac{3{,}240}{2\pi\,(29{,}062)} = \mathbf{0.01774}\ \mathrm{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.01774 kPa (I_1 = 0.12775). La charge étant faible, la contrainte l'est aussi ; le module donne la même valeur en ce point.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

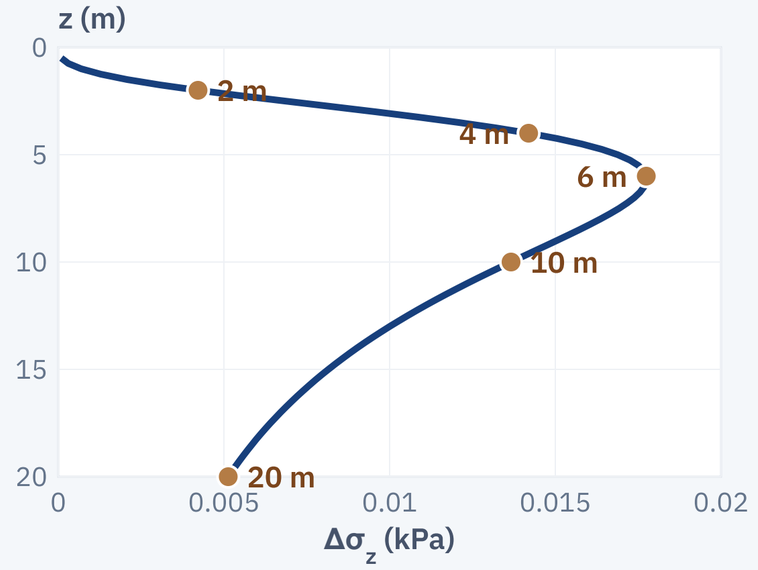
EXEMPLE

Données

Charge et point	$P = 5$ **kN ;** $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m, donc** $r = 5$ **m (identique à toute profondeur)**
Profondeurs	$z = 2; 4; 6; 10; 20$ **m**

À DÉTERMINER

Pour chaque profondeur, **r/z**, $\mathbf{I_1}$ et $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; comparaison avec 0.4775 P/z² sous l'axe de la charge ; profondeur où la contrainte est maximale.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 z = 2 m (r = 5 m): r/z = 2.5

$$I_1 = \frac{0.47746}{\left[2.50^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{141.529} = 0.00337$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{2^2}\,(0.00337) = \mathbf{0.00422}\ \mathrm{kPa}$$

2 z = 4 m (r = 5 m): r/z = 1.25

$$I_1 = \frac{0.47746}{\left[1.25^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{10.511} = 0.04542$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{4^2}\,(0.04542) = \mathbf{0.01419}\ \mathrm{kPa}$$

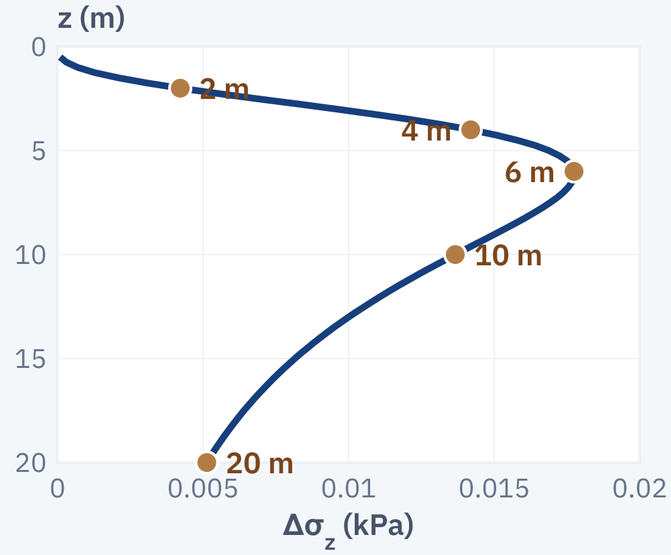
Pour un même r = 5 m, lorsque z croît, r/z diminue et I_1 augmente, mais P/z² diminue. Le produit croît d'abord, puis décroît : 0.00422 pour z = 2 m et 0.01419 kPa pour z = 4 m.

Solution (2/2)

SOLUTION

z (m)	r/z	I_1	$\Delta\sigma_z$ (kPa)	0.4775 P/z² (kPa)
2	2.500	0.0034	0.00422	0.59683
4	1.250	0.0454	0.01419	0.14921
6	0.833	0.1278	**0.01774**	0.06631
10	0.500	0.2733	0.01367	0.02387
20	0.250	0.4103	0.00513	0.00597

La contrainte maximale se situe à la profondeur z = r√(3/2) = **6.12 m** (0.01775 kPa) ; z = 6 m est très proche de cette profondeur (point affiché à l'ouverture du module). À 5 m de l'axe, la contrainte aux faibles profondeurs est bien plus petite que sous l'axe de la charge et s'en rapproche à mesure que la profondeur augmente (z = 20 m : 0.00513 et 0.00597 kPa).



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

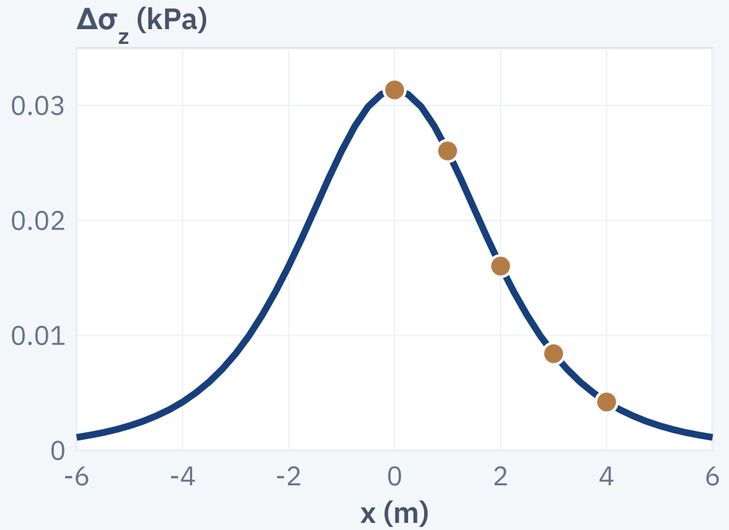
EXEMPLE

Données

Charge	$P = 5$ **kN, à l'origine des coordonnées**
Points	$z = 2$ **m,** $y = 3$ **m;** $x = 0, 1, 2, 3, 4$ **m**
Sol	$\mu = 0.5$ **(contrainte verticale indépendante de** μ**)**

À DÉTERMINER

Pour chaque point, **r**, **r/z**, $\mathbf{I_1}$ et $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; rapport entre la valeur sous la charge (x = 0) et la valeur la plus éloignée (x = 4 m).



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Distance horizontale et r/z (x = 2 m, y = 3 m)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = \mathbf{3.606}\ \text{m}$$

$$\frac{r}{z} = \frac{3.606}{2} = \mathbf{1.8028} \qquad \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1 = 4.250$$

2 Coefficient d'influence et contrainte

$$I_1 = \frac{0.47746}{4.250^{2.5}} = \frac{0.47746}{37.237} = 0.01282$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{2^2}\,(0.01282) = \mathbf{0.01603}\ \text{kPa}$$

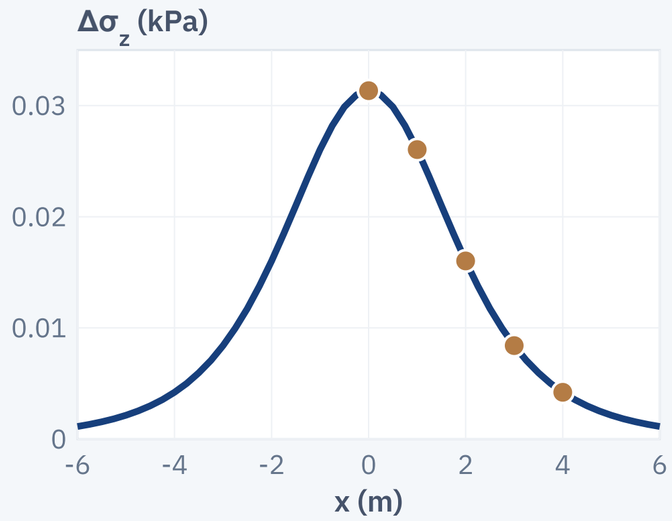
En x = 2 m, r = 3.606 m, r/z = 1.803, **$\Delta\sigma_z$ = 0.01603 kPa**. Les autres valeurs de x s'obtiennent par les trois mêmes étapes (tableau à la page suivante).

Solution (2/2)

SOLUTION

x (m)	r (m)	r/z	I_1	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0	3.000	1.500	0.0251	0.03134
1	3.162	1.581	0.0208	0.02604
2	3.606	1.803	0.0128	**0.01603**
3	4.243	2.121	0.0067	0.00841
4	5.000	2.500	0.0034	0.00422

Au point situé sous la charge (x = 0, r = 3 m) : **0.03134 kPa** ; à x = 4 m (r = 5 m) : **0.00422 kPa** ; rapport 7.4. À profondeur égale, la contrainte diminue rapidement lorsque la distance horizontale augmente ; la courbe est maximale autour de x = 0 (comme y = 3 m, la charge reste à 3 m de distance).



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

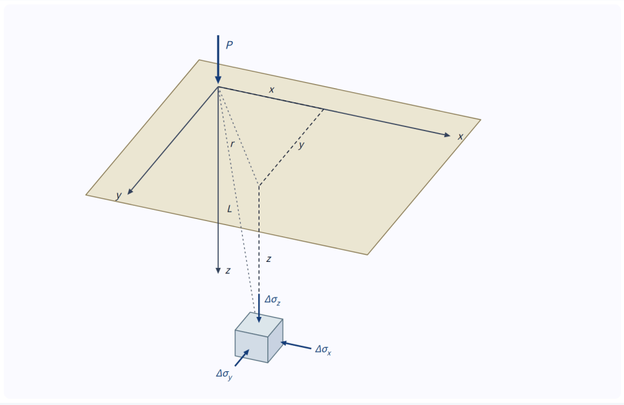
EXEMPLE

Données

Charge et point	$P = 5$ **kN; A:** $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m,** $z = 6$ **m (** $r = 5$ **m,** $L = 7.810$ **m)**
Coefficient de Poisson	$\mu = 0.5; 0.3; 0.2; 0$

À DÉTERMINER

$\Delta\sigma_x$ et **$\Delta\sigma_y$** (à la main, avec l'équation abrégée pour μ = 0.5 et avec l'équation complète pour μ = 0.3) ; effet de μ sur la contrainte verticale.



Solution (1/3)

SOLUTION

1 L^5 (L = 7,810 m)

$$L^5 = 61^{2.5} = 29{,}062\ \text{m}^5 \qquad 2\pi L^5 = 182{,}602$$

2 μ = 0.5 : les termes entre crochets s'annulent

$$\Delta\sigma_x = \frac{3P\,x^2 z}{2\pi L^5} = \frac{3(5)(3^2)(6)}{182{,}602} = \frac{810}{182{,}602} = \mathbf{0.00444}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{3P\,y^2 z}{2\pi L^5} = \frac{3(5)(4^2)(6)}{182{,}602} = \frac{1{,}440}{182{,}602} = \mathbf{0.00789}\ \text{kPa}$$

Vérification : pour μ = 0.5, $\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y = 3P\ r^2 z/(2\pi L^5) = 0.00444 + 0.00789 =$ **0.01232 kPa** ; ces deux valeurs sont celles que donne le module.

Solution (2/3)

SOLUTION

3 Termes de l'équation complète (x = 3, y = 4, z = 6, r² = 25, L = 7,810)

$$\frac{3x^2z}{L^5} = \frac{162}{29{,}062} = 0.005574 \qquad \frac{3y^2z}{L^5} = \frac{288}{29{,}062} = 0.009910$$

$$\frac{x^2 - y^2}{L\,r^2(L+z)} = \frac{-7}{2{,}696.5} = -0.002596 \qquad \frac{y^2z}{L^3r^2} = \frac{96}{11{,}910.6} = 0.008060$$

$$\frac{x^2z}{L^3r^2} = \frac{54}{11{,}910.6} = 0.004534$$

4 μ = 0.3: 1 − 2μ = 0.4

$$\Delta\sigma_x = \frac{5}{2\pi}\left[0.005574 - 0.4\left(-0.002596 + 0.008060\right)\right] = \mathbf{0.00270}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{5}{2\pi}\left[0.009910 - 0.4\left(0.002596 + 0.004534\right)\right] = \mathbf{0.00562}\ \text{kPa}$$

Solution (3/3)

SOLUTION

μ	$\Delta\sigma_x$ (10^{-3} kPa)	$\Delta\sigma_y$ (10^{-3} kPa)	$\Delta\sigma_z$ (10^{-3} kPa)
0.5	4.436	7.886	17.744
0.3	2.697	5.617	17.744
0.2	1.827	4.482	17.744
0.0	0.088	2.212	17.744

$\Delta\sigma_z$ ne dépend pas de μ ($17.744 \cdot 10^{-3}$ kPa est identique dans chaque ligne) ; les contraintes horizontales diminuent lorsque μ diminue : $\Delta\sigma_x = 4.436$ pour $\mu = 0.5$, $2.697 \cdot 10^{-3}$ kPa pour $\mu = 0.3$. En ce point, les trois contraintes sont des compressions.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

EXEMPLE

Données

Charge	$P = 100$ **kN, charge ponctuelle verticale**
Points	**sur l'axe de la charge,** $z = 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 10$ **m**
Sol	$\mu = 0.3$

À DÉTERMINER

Pour chaque profondeur : $\Delta\sigma_z$ (I_1 = 3/(2π) pour r = 0) et les contraintes horizontales $\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$.

Solution (1/2)

SOLUTION

1 Contrainte verticale (r = 0 ⇒ r/z = 0 ⇒ $I_1 = 3/(2\pi) = 0.4775$)

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 = \frac{100}{2^2}(0.4775) = \mathbf{11.937}\ \text{kPa}$$

2 Contraintes horizontales (valeur limite pour r = 0, μ = 0.3)

$$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = -\frac{P(1-2\mu)}{4\pi z^2} = -\frac{100\,(0.4)}{4\pi\,(2^2)} = -\mathbf{0.796}\ \text{kPa}$$

À z = 2 m sous l'axe, **$\Delta\sigma_z$ = 11.937 kPa** ; les contraintes horizontales sont **négatives** (–0.796 kPa) : une légère diminution. Elles sont environ 15 fois plus petites que la contrainte verticale.

Solution (2/2)

SOLUTION

z (m)	$\Delta\sigma_z = 0.4775\ P/z^2$ (kPa)	$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$ (kPa)	rapport $\Delta\sigma_z$ (z = 1 m = 1)
1	47.746	−3.183	1.0000
2	11.937	−0.796	0.2500
3	5.305	−0.354	0.1111
5	1.910	−0.127	0.0400
10	0.477	−0.032	0.0100

Lorsque la profondeur **double, la contrainte tombe au quart** (z = 1 → 2 m : 47.75 → 11.94 kPa). Ces contraintes étant des accroissements, elles s'ajoutent à la contrainte due au poids propre du sol : par exemple, pour γ = 18 kN/m³, σ_{v0} = 36 kPa à z = 2 m et la contrainte verticale après chargement vaut 47.94 kPa.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

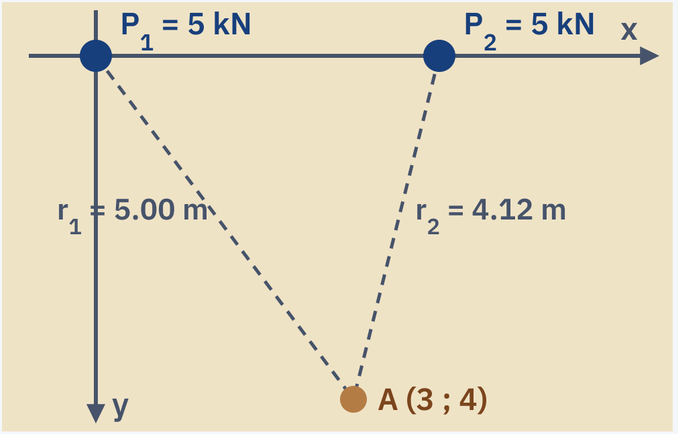
EXEMPLE

Données

Charges	$P_1 = 5$ **kN au point** $(0;0)$ **;** $P_2 = 5$ **kN au point** $(4;0)$
Point A	$x = 3$ **m,** $y = 4$ **m ; profondeur** $z = 6$ **m (puis** 2 **;** 4 **;** 10 **;** 20 **m)**
Sol	$\mu = 0.5$

À DÉTERMINER

La valeur de $\Delta\sigma_z$ de chaque charge et leur somme ; $\Delta\sigma_x$ et $\Delta\sigma_y$ totaux ; profil en fonction de la profondeur.



Solution (1/3)

SOLUTION

1 Charge 1 (au départ) : identique à l'exemple 1

$$r_1 = 5\ \text{m}, \quad \frac{r_1}{z} = 0.8333, \quad I_{1,1} = 0.12775 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z,1} = \frac{5}{36}(0.12775) = \mathbf{0.01774}\ \text{kPa}$$

2 Charge 2 (au point (4 ; 0)) : distance de A à cette charge (−1 ; 4) m

$$r_2 = \sqrt{(3-4)^2 + 4^2} = \sqrt{17} = 4.123\ \text{m}, \qquad \frac{r_2}{z} = 0.6872$$

$$I_{1,2} = \frac{0.47746}{\left[0.6872^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{2.6299} = 0.18155$$

$$\Delta\sigma_{z,2} = \frac{5}{6^2}\,(0.18155) = \mathbf{0.02522}\ \text{kPa}$$

Comme la charge 2 est plus proche de A (4.12 m) que la charge 1 (5 m), elle produit une contrainte plus grande.

Solution (2/3)

SOLUTION

3 Contrainte verticale : superposition

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z,1} + \Delta\sigma_{z,2} = 0.01774 + 0.02522 = \mathbf{0.04296}\ \text{kPa}$$

4 Contraintes horizontales (μ = 0.5) : pour la charge 2, x = −1, y = 4 (à partir de sa propre distance)

$$\Delta\sigma_{x,2} = \frac{3(5)(1)(6)}{2\pi\,(53)^{2.5}} = 0.000700 \qquad \Delta\sigma_{y,2} = \frac{3(5)(16)(6)}{2\pi\,(53)^{2.5}} = 0.011207$$

$$\Delta\sigma_x = 0.004436 + 0.000700 = \mathbf{0.00514} \qquad \Delta\sigma_y = 0.007886 + 0.011207 = \mathbf{0.01909}\ \text{kPa}$$

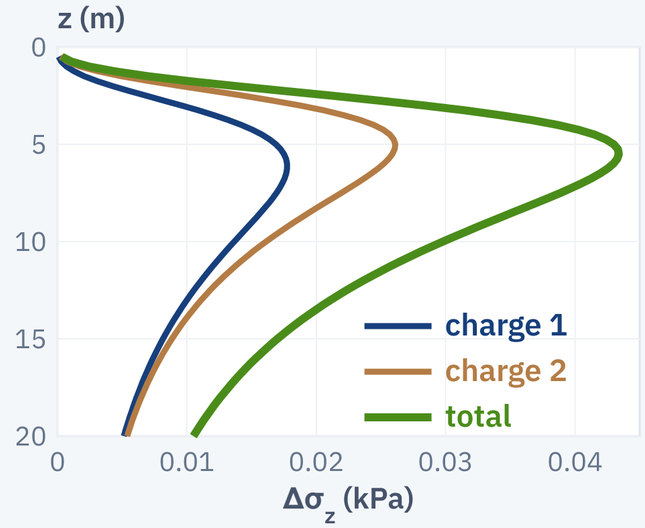
$\Delta\sigma_z$ = 0.04296 kPa, $\Delta\sigma_x$ = 0.00514, $\Delta\sigma_y$ = 0.01909 kPa ; dans un sol élastique linéaire, les contraintes dues aux charges se somment.

Solution (3/3)

SOLUTION

z (m)	r_1/z	$\Delta\sigma_{z,1}$	r_2/z	$\Delta\sigma_{z,2}$	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
2	2.500	0.00422	2.062	0.00945	0.01367
4	1.250	0.01419	1.031	0.02442	0.03862
6	0.833	0.01774	0.687	0.02522	**0.04296**
10	0.500	0.01367	0.412	0.01612	0.02979
20	0.250	0.00513	0.206	0.00538	0.01051

À chaque profondeur, le total est la somme des deux charges ; le total maximal se situe autour de z ≈ 5 m (z = 4 m : 0.03862, z = 6 m : 0.04296 kPa). La charge 2 apporte, à toute profondeur, une contribution supérieure à celle de la charge 1.



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

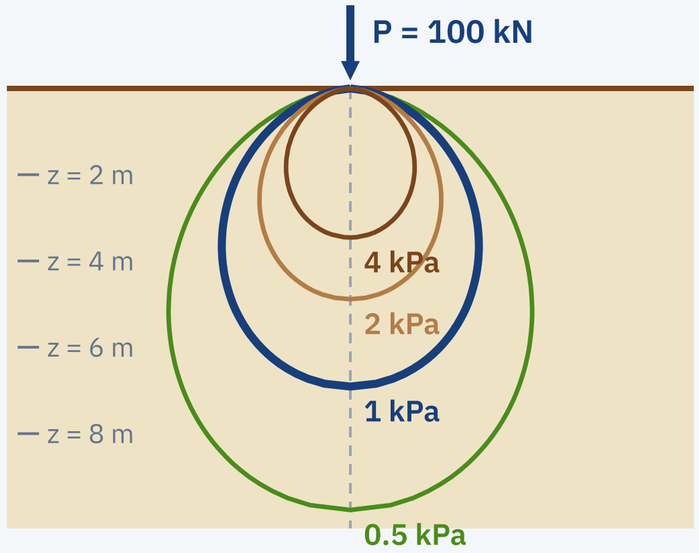
EXEMPLE

Données

Charge	$P = 100$ **kN, charge ponctuelle verticale**
Ligne	**Points où** $\Delta\sigma_z = 1$ **est égal à kPa ;** $z = 1 - 6$ **m**
Lignes supplémentaires	0.5 **;** 2 **;** 4 **kPa (figure)**

À DÉTERMINER

À chaque profondeur, distance **r** de l'isovaleur à l'axe de la charge ; profondeur à laquelle l'isovaleur se referme sur l'axe ; vérification que la valeur de r donne bien $\Delta\sigma_z$ = 1 kPa.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Résolution de l'équation en r : $\Delta\sigma_z = 3P\, z^3/[2\pi(r^2 + z^2)^{5/2}] = 1$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3(100)(4^3)}{2\pi\,(1)}\right)^{0.4} - 4^2} = \sqrt{(3{,}055.8)^{0.4} - 16}$$

$$r = \sqrt{24.777 - 16} = \mathbf{2.963}\ \mathrm{m}$$

2 Vérification : équation de Boussinesq avec le r trouvé

$$\Delta\sigma_z = \frac{3(100)}{2\pi}\,\frac{4^3}{(2.963^2 + 4^2)^{5/2}} = \mathbf{1.000}\ \mathrm{kPa}$$

À z = 4 m, la courbe de 1 kPa se situe à **2.963 m** de l'axe de la charge ; en reportant la valeur de r trouvée dans l'équation de Boussinesq, on obtient exactement $\Delta\sigma_z$ = 1 kPa (autres profondeurs à la page suivante).

Solution (2/2)

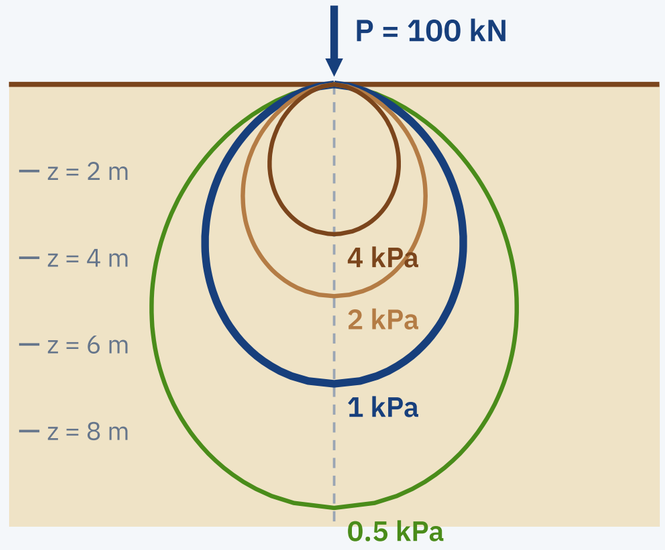
SOLUTION

3 Profondeur à laquelle la courbe se referme sur l'axe (r = 0)

$$z_{axis} = \sqrt{\frac{3P}{2\pi\,\Delta\sigma_z}} = \sqrt{\frac{3(100)}{2\pi(1)}} = \sqrt{47.75} = \mathbf{6.91}\ \text{m}$$

z (m)	r (m)	Largeur 2r (m)	$\Delta\sigma_z$ selon Boussinesq (kPa)
1	1.922	3.84	1.000
2	2.605	5.21	1.000
3	2.923	5.85	1.000
4	2.963	5.93	1.000
5	2.717	5.43	1.000
6	2.075	4.15	1.000

La courbe d'isocontrainte de 1 kPa part du point de charge en surface, atteint sa plus grande largeur (r ≈ 2.98 m) à la profondeur z ≈ 3.65 m et se referme sur l'axe à 6.91 m de profondeur ; les courbes des contraintes plus faibles s'étendent plus profondément et plus largement.



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Synthèse

Points à retenir

Boussinesq : $\Delta\sigma_z = 3P\,z^3/(2\pi L^5) = (P/z^2)\,I_1$, $I_1 = (3/2\pi) / [(r/z)^2 + 1]^{5/2}$; $\Delta\sigma_z$ ne dépend ni de μ ni de E ; $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ dépendent de μ

Exemple (P = 5 kN, A (3 ; 4 ; 6)) : r = 5 m ; L = 7.810 m ; r/z = 0.8333 ; $I_1 = 0.12775$; **$\Delta\sigma_z = 0.01774$ kPa** ; pour $\mu = 0.5$, $\Delta\sigma_x = 0.00444$, $\Delta\sigma_y = 0.00789$ kPa

Profondeur : pour un même r = 5 m, la contrainte maximale se situe à $z = r\sqrt{(3/2)} = 6.12$ m ; **sous l'axe de la charge**, $\Delta\sigma_z = 0.4775\,P/z^2$ (lorsque z double, elle est divisée par quatre)

Superposition : chaque charge est prise isolément avec ses propres valeurs r_k et L_k, et les contraintes sont additionnées (dans l'exemple 0.01774 + 0.02522 = 0.04296 kPa)

Bulbe de pression : courbes d'égale $\Delta\sigma_z$, $r = \sqrt{[(3Pz^3/(2\pi\Delta\sigma_z))^{2/5} - z^2]}$; pour P = 100 kN, l'isovaleur 1 kPa se referme sur l'axe à 6.91 m de profondeur

Références bibliographiques

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels à l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Gauthier-Villars, Paris.

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

REMARQUE

Tous les exemples numériques ont été produits avec le moteur de calcul propre du module ; le module donne les mêmes valeurs. Le module s'ouvre avec une charge P = 5 kN et le point A (3 ; 4 ; 6).

GeoTerva

Calculs géotechniques en ligne

De la théorie à la pratique

Saisir dans GeoTerva les charges ponctuelles, le point étudié et le coefficient de Poisson ; le module fournit ensemble les valeurs $\Delta\sigma_z$, $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$, le profil en fonction de la profondeur, les courbes d'isocontraintes, la solution pas à pas et le rapport.

Ouvrir le module → **Page de théorie →**

Ouvrir sur smartphone
Les modules d'essai ne nécessitent pas d'inscription.

Si vous souhaitez les utiliser dans vos cours : info@geoterva.com