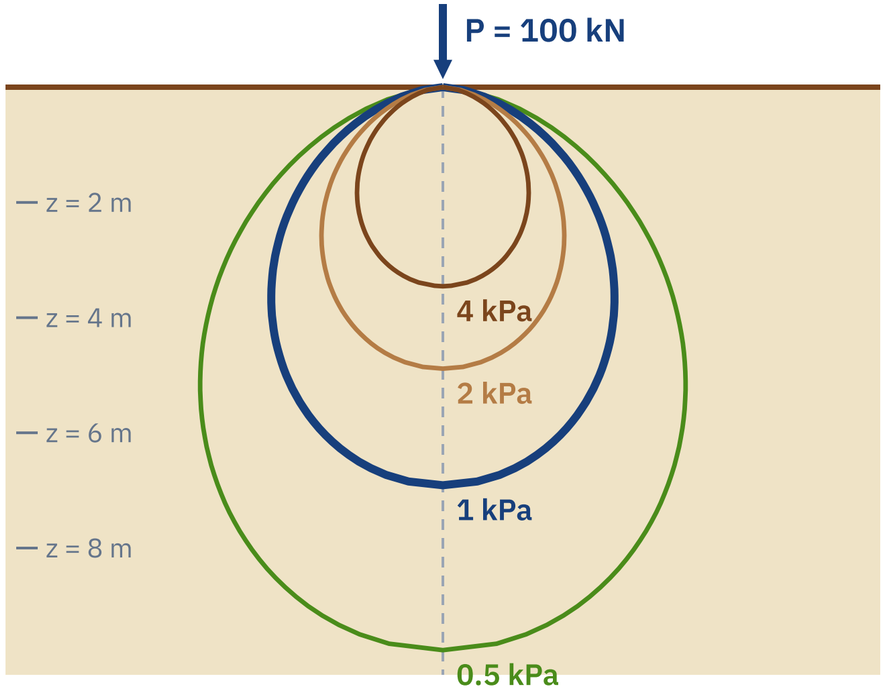
Geotechnische Vorlesungspräsentation · Spannungsausbreitung im Baugrund

Spannung unter einer Punktlast (Boussinesq)

Vorlesung: die Spannungen, die eine vertikale Einzellast an der Oberfläche im Boden hervorruft; der Ausgangspunkt wird durchgängig von Hand gelöst, Tiefen- und Seitenprofile mit Tabellen.

- Lösung nach Boussinesq
- Einflussbeiwert I_1
- Horizontalspannungen
- Superposition
- Spannungsbirnen



Was lernen wir in dieser Vorlesung?

Die drei Normalspannungen in einem Punkt infolge einer **vertikalen Einzellast** an der Oberfläche eines halbunendlichen, homogenen, isotropen und linear elastischen Mediums: $\Delta\sigma_z$, $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$

Dass die vertikale Spannung **nicht von μ und vom Elastizitätsmodul abhängt**; dass die horizontalen Spannungen von μ abhängen

Einflussbeiwert I_1: $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$ und die Abhängigkeit von I_1 allein von r/z

Superposition: Addition der Spannungen mehrerer Einzellasten; **Isospannenkurven** (Druckzwiebeln) und 0.4775 P/z² unter der Lastachse

Ausgangspunkt des Moduls **vollständig von Hand**; Tiefen- und Seitenvariation, horizontale Spannungen in Tabellen

VORLESUNGSABLAUF

Jedes Thema wird in **drei Schritten** behandelt:

1 · **Theorie**: Formel und Begründung

2 · **Aufgabe**: Gegeben und Gesucht

3 · **Lösung**: Schritt für Schritt, mit Zahlen

Beispiel: P = 5 kN; Punkt A: x = 3 m, y = 4 m, z = 6 m (r = 5 m); μ = 0.5.

Boussinesq-Halbraum

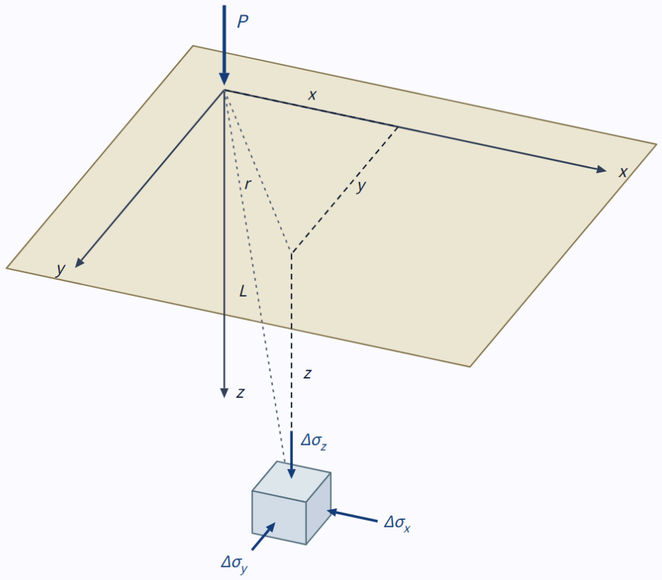
THEORIE

Boussinesq (1883) löste die Spannungen, die eine auf die Oberfläche eines unendlich ausgedehnten Halbraums wirkende Einzellast in einem homogenen, elastischen und isotropen Medium hervorruft.

Nach den Annahmen der Lösung ist der Boden ein **halbunendlicher Körper**: Er erstreckt sich unterhalb einer ebenen Oberfläche seitlich und nach unten unbegrenzt.

Das Medium ist homogen, isotrop und linear elastisch; es wird durch die **Querdehnzahl** μ beschrieben, der Elastizitätsmodul geht in die Spannungen nicht ein.

P ist eine vertikale Einzellast, die auf die Oberfläche wirkt; die ermittelten Spannungen sind die durch die Last verursachten Zunahmen, die Spannungen aus dem Eigengewicht des Bodens werden diesen hinzugefügt.



Drei Normalspannungen im Punkt

THEORIE

Mit den Koordinaten in der Abbildung (**r** = horizontaler Abstand des Punktes von der Lastachse, **L** = Abstand von der Last) ergeben sich die Normalspannungen am Punkt zu:

$$\Delta\sigma_x = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3x^2 z}{L^5} - (1-2\mu)\left[\frac{x^2-y^2}{L\,r^2(L+z)} + \frac{y^2 z}{L^3 r^2}\right]\right\}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3y^2 z}{L^5} - (1-2\mu)\left[\frac{y^2-x^2}{L\,r^2(L+z)} + \frac{x^2 z}{L^3 r^2}\right]\right\}$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\,\frac{z^3}{L^5} = \frac{3P}{2\pi}\,\frac{z^3}{(r^2+z^2)^{5/2}} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\;\; L = \sqrt{r^2+z^2}$$

Einfluss der Querdehnzahl

THEORIE

Horizontale Spannungen hängen von der Querdehnzahl μ ab; die **vertikale Spannung** jedoch hängt weder von μ noch vom Elastizitätsmodul ab.

Für μ = 0.5 (keine Volumenänderung, undränierter Ton) entfallen die Terme in der eckigen Klammer, und es ergibt sich $\Delta\sigma_x = 3P\,x^2z/(2\pi L^5)$, $\Delta\sigma_y = 3P\,y^2z/(2\pi L^5)$.

Auf der Lastebene (r = 0) nähern sich beide horizontalen Spannungen dem Wert $-P(1-2\mu)/(4\pi z^2)$; dies ist eine geringfügige Abminderung.

$$\mu = 0.5: \qquad \Delta\sigma_x = \frac{3P\,x^2 z}{2\pi L^5}, \qquad \Delta\sigma_y = \frac{3P\,y^2 z}{2\pi L^5}$$

$$r = 0: \qquad \Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = -\frac{P\,(1-2\mu)}{4\pi z^2}$$

$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$

THEORIE

Da $L^2 = z^2[(r/z)^2 + 1]$ gilt, kann die Gleichung mit einem Beiwert geschrieben werden, der nur von r/z abhängt.

Der Einflussbeiwert $\mathbf{I_1}$ hängt nur von r/z ab; daher wird eine einzige Tabelle oder Kurve für jedes P und jedes z verwendet.

$$L^2 = z^2\left[(r/z)^2 + 1\right]$$

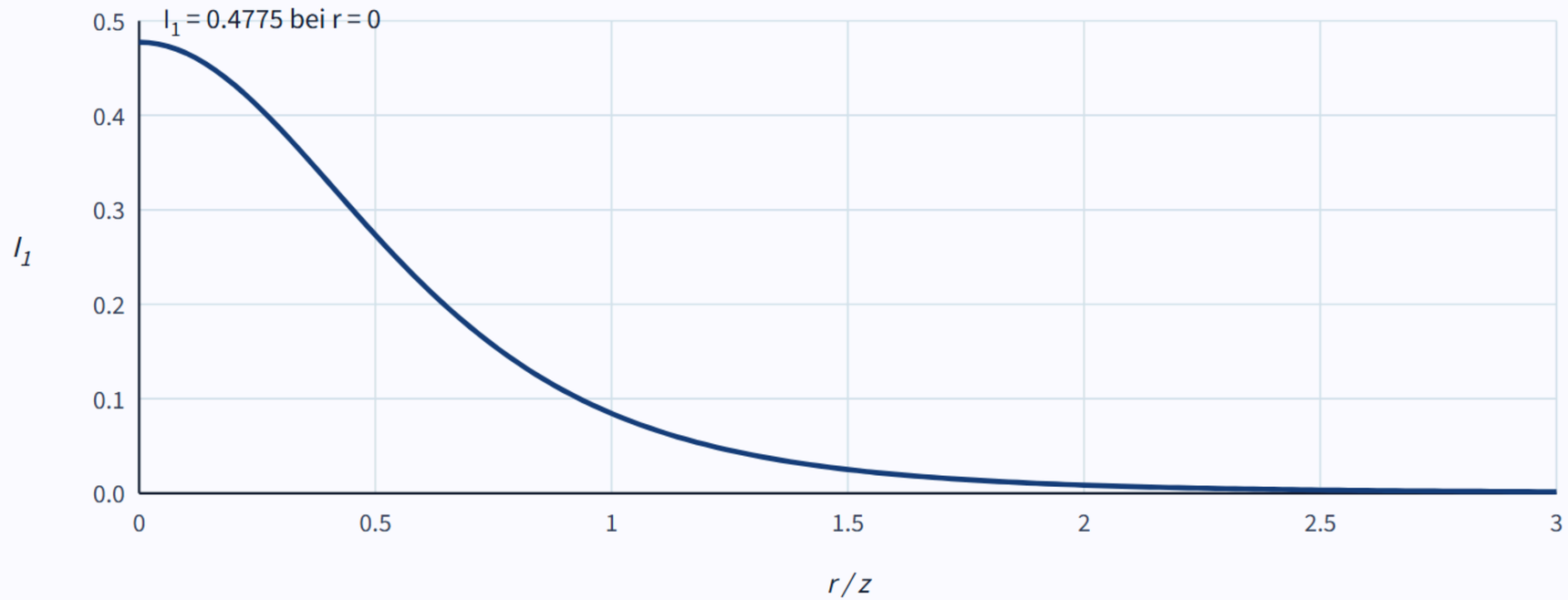
$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 \qquad I_1 = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\left[(r/z)^2 + 1\right]^{5/2}}$$

WERTE I_1 (MODUL)

r/z	I_1	r/z	I_1
0.0	0.4775	1.0	0.0844
0.1	0.4657	1.2	0.0513
0.2	0.4329	1.4	0.0317
0.3	0.3849	1.6	0.0200
0.4	0.3295	1.8	0.0129
0.5	0.2733	2.0	0.0085
0.6	0.2214	2.5	0.0034
0.7	0.1762	3.0	0.0015
0.8	0.1386	4.0	0.0004
0.9	0.1083	5.0	0.0001

I_1 und r/z

THEORIE



Der Einflussbeiwert I1 in Abhängigkeit von r/z. Er ist auf der Lastachse am größten, 3/(2π) = 0.4775, und fällt auf 0.0844 bei r/z = 1 sowie auf weniger als 0.002 jenseits von r/z = 3 ab.

Superposition

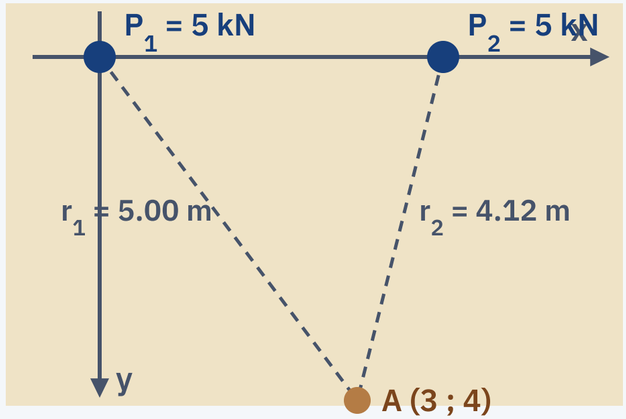
THEORIE

Bei mehreren Einzellasten werden die Spannungen im linear elastischen Boden durch Superposition summiert: $\Delta\sigma_z = \Sigma\Delta\sigma_{z,k}$, $\Delta\sigma_x = \Sigma\Delta\sigma_{x,k}$, $\Delta\sigma_y = \Sigma\Delta\sigma_{y,k}$.

Jede Last wird für sich betrachtet und der Punkt im Abstand $(x - x_{L,k}, y - y_{L,k})$ von ihr angesetzt; damit sind r_k und L_k die Werte der jeweiligen Last selbst.

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{3P_k}{2\pi}\,\frac{z^3}{L_k^5}, \qquad L_k = \sqrt{(x - x_{L,k})^2 + (y - y_{L,k})^2 + z^2}$$

Das Modul nimmt höchstens acht Lasten auf, und keine zwei dürfen sich an derselben Stelle befinden; die Linien gleicher Spannung in der Schnittansicht werden in der vertikalen Ebene $y = y_A$ gezeichnet.



Spannungszwiebeln einer Einzellast

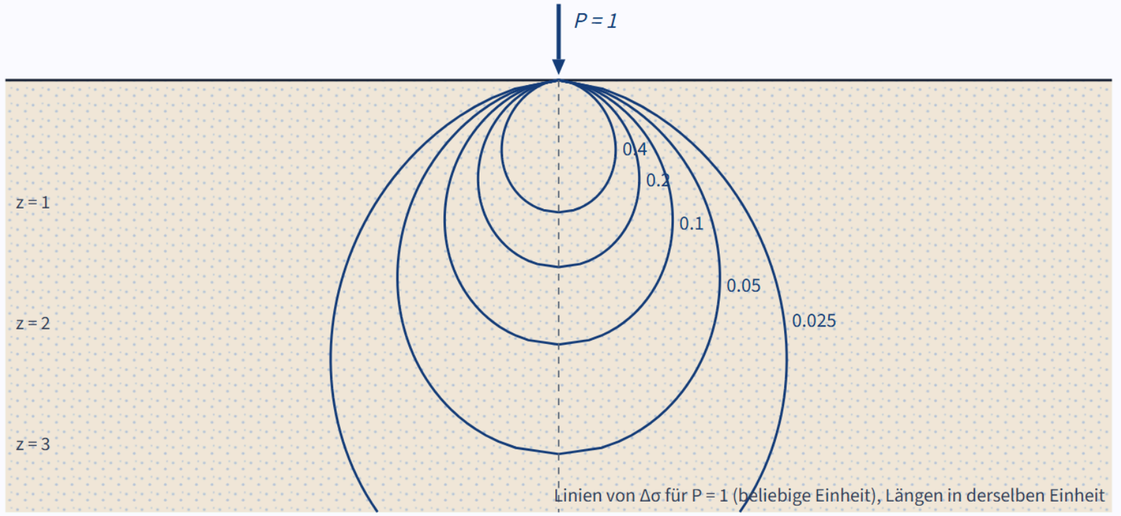
THEORIE

Durch Verbinden der Punkte mit gleichem $\Delta\sigma_z$ erhält man zwiebelförmige Isospannungslinien.

Längs der Lastachse nimmt die Spannung mit dem Quadrat der Tiefe ab: $\Delta\sigma_z = 0.4775\ P/z^2$.

In unmittelbarer Nähe der Last liefert die Lösung sehr große Spannungen: Eine reale Last ist niemals ein Punkt.

$$r = \sqrt{\left(\frac{3P\,z^3}{2\pi\,\Delta\sigma_z}\right)^{2/5} - z^2}$$



Aufgabe

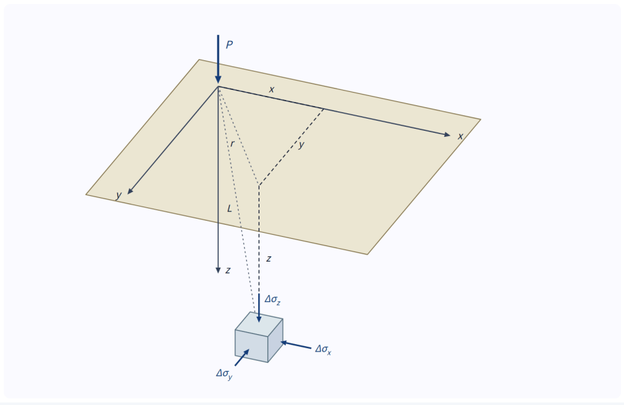
BEISPIEL

Gegeben

Last	**vertikale Einzellast $P = 5$ kN, an der Oberfläche, im Koordinatenursprung**
Punkt A	$x = 3$ m, $y = 4$ m, $z = 6$ m
Baugrund	**homogenes, elastisches halbunendliches Medium; $\mu = 0.5$**

GESUCHT

r, **L**, **r/z**, Einflussbeiwert $\mathbf{I_1}$ und vertikaler Spannungszuwachs $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; direkte Kontrolle des Ergebnisses mit der Gleichung.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Horizontalabstand r, Abstand zur Last L und r/z

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \mathbf{5}\ \mathrm{m} \qquad L = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \mathbf{7.810}\ \mathrm{m}$$

$$r/z = 5/6 = \mathbf{0.8333}$$

2 Einflussbeiwert I_1

$$I_1 = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left[(r/z)^2 + 1\right]^{5/2}} = \frac{0.47746}{\left[0.8333^2 + 1\right]^{2.5}}$$

$$I_1 = \frac{0.47746}{1.6944^{2.5}} = \frac{0.47746}{3.7374} = \mathbf{0.12775}$$

Der Punkt liegt **5 m** von der Lastachse entfernt und **6 m** tief; da r/z = 0.8333 ist, beträgt I_1 das 0.27-fache des Wertes unter der Lastachse (0.4775).

Lösung (2/2)

LÖSUNG

3 Vertikaler Spannungszuwachs

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2}\, I_1 = \frac{5}{6^2}\,(0.12775) = 0.13889\,(0.12775) = \mathbf{0.01774}\ \mathrm{kPa}$$

4 Nachweis: direkte Boussinesq-Gleichung

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\,\frac{z^3}{L^5} = \frac{3(5)(6^3)}{2\pi\,(7.810)^5}$$

$$= \frac{3{,}240}{2\pi\,(29{,}062)} = \mathbf{0.01774}\ \mathrm{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.01774 kPa (I_1 = 0.12775). Da die Last klein ist, ist auch die Spannung klein; das Modul liefert an dieser Stelle denselben Wert.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

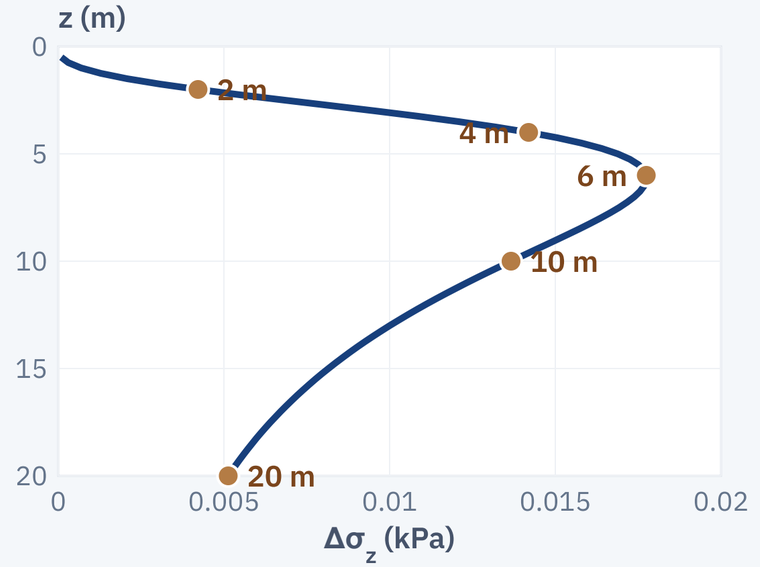
BEISPIEL

Gegeben

Last und Punkt	$P = 5$ **kN;** $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m, folglich** $r = 5$ **m (in jeder Tiefe gleich)**
Tiefen	$z = 2; 4; 6; 10; 20$ **m**

GESUCHT

Für jede Tiefe **r/z**, $\mathbf{I_1}$ und $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; Vergleich mit $0.4775\ P/z^2$ unter der Lastachse; die Tiefe, in der die Spannung am größten ist.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 z = 2 m (r = 5 m): r/z = 2.5

$$I_1 = \frac{0.47746}{\left[2.50^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{141.529} = 0.00337$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{2^2}\,(0.00337) = \mathbf{0.00422}\ \mathrm{kPa}$$

2 z = 4 m (r = 5 m): r/z = 1.25

$$I_1 = \frac{0.47746}{\left[1.25^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{10.511} = 0.04542$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{4^2}\,(0.04542) = \mathbf{0.01419}\ \mathrm{kPa}$$

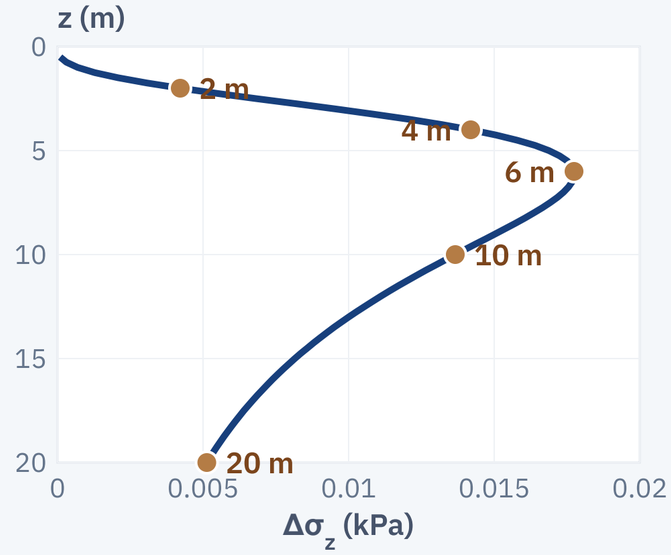
Für dasselbe r = 5 m nimmt mit wachsendem z das Verhältnis r/z ab und I_1 zu; jedoch nimmt P/z² ab. Das Produkt steigt zunächst an und fällt dann ab: 0.00422 bei z = 2 m und 0.01419 kPa bei z = 4 m.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

z (m)	r/z	I_1	$\Delta\sigma_z$ (kPa)	0.4775 P/z² (kPa)
2	2.500	0.0034	0.00422	0.59683
4	1.250	0.0454	0.01419	0.14921
6	0.833	0.1278	**0.01774**	0.06631
10	0.500	0.2733	0.01367	0.02387
20	0.250	0.4103	0.00513	0.00597

Die größte Spannung tritt in der Tiefe z = r√(3/2) = **6.12 m** auf (0.01775 kPa); z = 6 m liegt dieser Tiefe sehr nahe (Öffnungspunkt des Moduls). In 5 m Abstand von der Achse ist die Spannung in geringen Tiefen deutlich kleiner als unter der Lastachse und nähert sich ihr mit zunehmender Tiefe an (z = 20 m: 0.00513 und 0.00597 kPa).



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

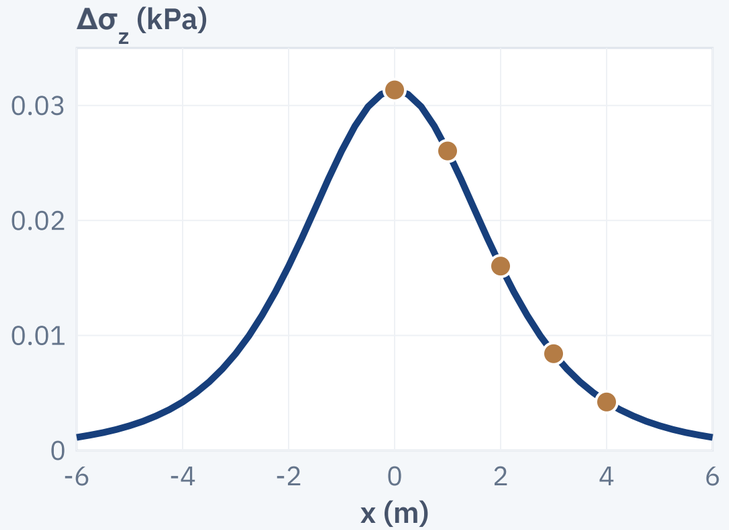
BEISPIEL

Gegeben

Last	$P = 5$ **kN, im Koordinatenursprung**
Punkte	$z = 2$ **m,** $y = 3$ **m;** $x = 0, 1, 2, 3, 4$ **m**
Baugrund	$\mu = 0.5$ **(vertikale Spannung unabhängig von** μ**)**

GESUCHT

Für jeden Punkt **r**, **r/z**, $\mathbf{I_1}$ und $\mathbf{\Delta\sigma_z}$; das Verhältnis des Werts unter der Last (x = 0) zum entferntesten Wert (x = 4 m).



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Horizontale Entfernung und r/z (x = 2 m, y = 3 m)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = \mathbf{3.606}\ \mathrm{m}$$

$$\frac{r}{z} = \frac{3.606}{2} = \mathbf{1.8028} \qquad \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1 = 4.250$$

2 Einflussbeiwert und Spannung

$$I_1 = \frac{0.47746}{4.250^{2.5}} = \frac{0.47746}{37.237} = 0.01282$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{2^2}\,(0.01282) = \mathbf{0.01603}\ \mathrm{kPa}$$

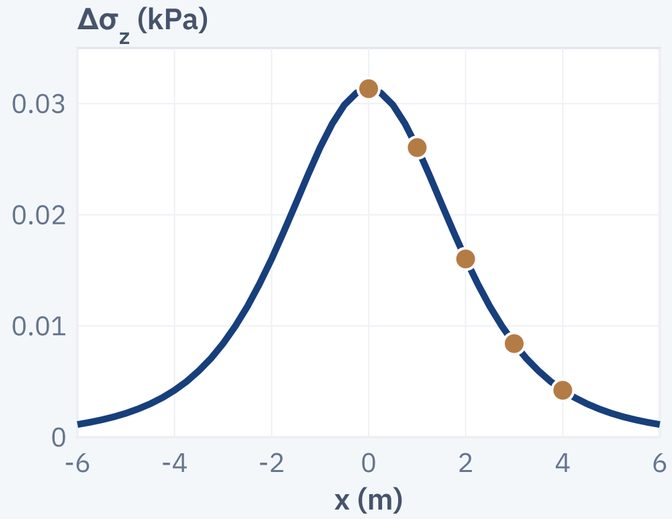
Bei x = 2 m ist r = 3.606 m, r/z = 1.803, **$\Delta\sigma_z$ = 0.01603 kPa**. Die übrigen x-Werte werden mit denselben drei Schritten ermittelt (Tabelle auf der nächsten Seite).

Lösung (2/2)

LÖSUNG

x (m)	r (m)	r/z	I_1	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
0	3.000	1.500	0.0251	0.03134
1	3.162	1.581	0.0208	0.02604
2	3.606	1.803	0.0128	**0.01603**
3	4.243	2.121	0.0067	0.00841
4	5.000	2.500	0.0034	0.00422

Am Punkt unter der Last (x = 0, r = 3 m) **0.03134 kPa**; bei x = 4 m (r = 5 m) **0.00422 kPa**: Verhältnis 7.4. Bei gleicher Tiefe nimmt die Spannung mit zunehmendem horizontalen Abstand rasch ab; die Kurve ist um x = 0 am höchsten (da y = 3 m ist, liegt die Last noch 3 m entfernt).



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

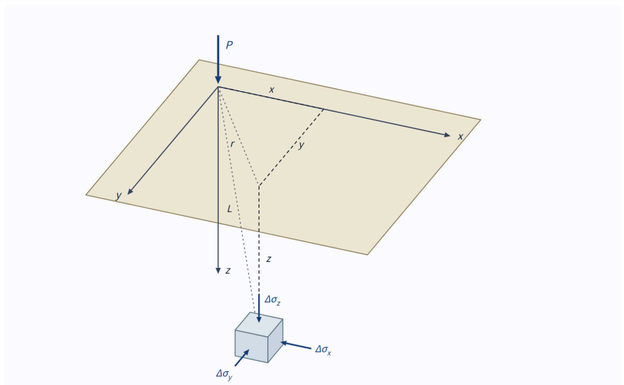
BEISPIEL

Gegeben

Last und Punkt	$P = 5$ **kN; A:** $x = 3$ **m,** $y = 4$ **m,** $z = 6$ **m (** $r = 5$ **m,** $L = 7.810$ **m)**
Querdehnzahl v	$\mu = 0.5; 0.3; 0.2; 0$

GESUCHT

$\Delta\sigma_x$ und **$\Delta\sigma_y$** (von Hand mit der Kurzgleichung für μ = 0.5, mit der vollständigen Gleichung für μ = 0.3); der Einfluss von μ auf die vertikale Spannung.



Lösung (1/3)

LÖSUNG

1 L^5 (L = 7,810 m)

$$L^5 = 61^{2.5} = 29{,}062\ \text{m}^5 \qquad 2\pi L^5 = 182{,}602$$

2 μ = 0.5: Die Terme in den eckigen Klammern verschwinden

$$\Delta\sigma_x = \frac{3P\,x^2 z}{2\pi L^5} = \frac{3(5)(3^2)(6)}{182{,}602} = \frac{810}{182{,}602} = \mathbf{0.00444}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{3P\,y^2 z}{2\pi L^5} = \frac{3(5)(4^2)(6)}{182{,}602} = \frac{1{,}440}{182{,}602} = \mathbf{0.00789}\ \text{kPa}$$

Nachweis: für μ = 0.5 ist $\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y = 3P\,r^2 z/(2\pi L^5) = 0.00444 + 0.00789 = \mathbf{0.01232\ kPa}$; beide Werte werden vom Modul geliefert.

Lösung (2/3)

LÖSUNG

3 Terme der vollständigen Gleichung (x = 3, y = 4, z = 6, r² = 25, L = 7.810)

$$\frac{3x^2 z}{L^5} = \frac{162}{29{,}062} = 0.005574 \qquad \frac{3y^2 z}{L^5} = \frac{288}{29{,}062} = 0.009910$$

$$\frac{x^2 - y^2}{L\,r^2(L+z)} = \frac{-7}{2{,}696.5} = -0.002596 \qquad \frac{y^2 z}{L^3 r^2} = \frac{96}{11{,}910.6} = 0.008060$$

$$\frac{x^2 z}{L^3 r^2} = \frac{54}{11{,}910.6} = 0.004534$$

4 μ = 0.3: 1 − 2μ = 0.4

$$\Delta\sigma_x = \frac{5}{2\pi}\left[0.005574 - 0.4\,(-0.002596 + 0.008060)\right] = \mathbf{0.00270}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{5}{2\pi}\left[0.009910 - 0.4\,(0.002596 + 0.004534)\right] = \mathbf{0.00562}\ \text{kPa}$$

Lösung (3/3)

LÖSUNG

μ	$\Delta\sigma_x$ (10^{-3} kPa)	$\Delta\sigma_y$ (10^{-3} kPa)	$\Delta\sigma_z$ (10^{-3} kPa)
0.5	4.436	7.886	17.744
0.3	2.697	5.617	17.744
0.2	1.827	4.482	17.744
0.0	0.088	2.212	17.744

$\Delta\sigma_z$ ist unabhängig von μ ($17.744 \cdot 10^{-3}$ kPa ist in jeder Zeile gleich); die horizontalen Spannungen nehmen ab, je kleiner μ wird: $\Delta\sigma_x$ = 4.436 bei μ = 0.5, $2.697 \cdot 10^{-3}$ kPa bei μ = 0.3. An diesem Punkt sind alle drei Spannungen Druckspannungen.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Last	$P = 100$ **kN, vertikale Einzellast**
Punkte	**auf der Lastachse,** $z = 1; 2; 3; 5; 10$ **m**
Baugrund	$\mu = 0.3$

GESUCHT

Für jede Tiefe $\Delta\sigma_z$ ($I_1 = 3/(2\pi)$ für r = 0) und die horizontalen Spannungen $\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$.

Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Vertikale Spannung (r = 0 ⇒ r/z = 0 ⇒ $I_1 = 3/(2\pi) = 0.4775$)

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 = \frac{100}{2^2} (0.4775) = \mathbf{11.937}\ \mathrm{kPa}$$

2 Horizontalspannungen (Grenzwert für r = 0, μ = 0.3)

$$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = -\frac{P(1-2\mu)}{4\pi z^2} = -\frac{100\,(0.4)}{4\pi\,(2^2)} = -\mathbf{0.796}\ \mathrm{kPa}$$

bei z = 2 m unter der Achse **$\Delta\sigma_z$ = 11.937 kPa**; die Horizontalspannungen sind **negativ** (–0.796 kPa): eine geringe Abnahme. Sie ist etwa 15-mal kleiner als die vertikale Spannung.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

z (m)	$\Delta\sigma_z$ = 0.4775 P/z² (kPa)	$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$ (kPa)	Verhältnis $\Delta\sigma_z$ (z = 1 m = 1)
1	47.746	−3.183	1.0000
2	11.937	−0.796	0.2500
3	5.305	−0.354	0.1111
5	1.910	−0.127	0.0400
10	0.477	−0.032	0.0100

Bei **Verdopplung der Tiefe fällt die Spannung auf ein Viertel** (z = 1 → 2 m: 47.75 → 11.94 kPa). Da die Spannungen Zuwächse sind, werden sie zur Spannung aus dem Eigengewicht des Bodens addiert: Bei γ = 18 kN/m³ beträgt beispielsweise bei z = 2 m σ_{v0} = 36 kPa, und die vertikale Spannung nach der Lasteinwirkung wird 47.94 kPa.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

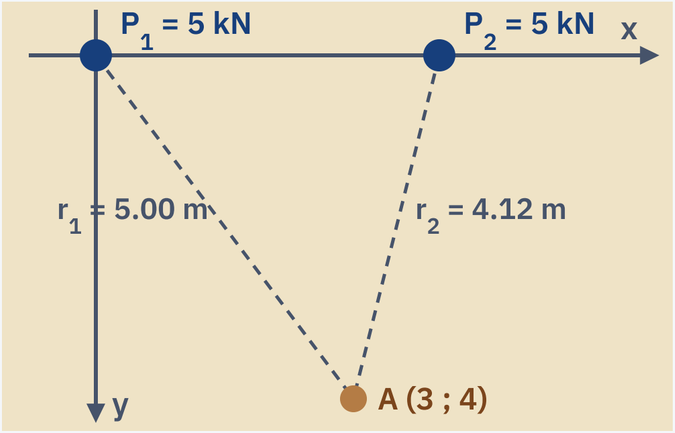
BEISPIEL

Gegeben

Lasten	$P_1 = 5$ **kN im Punkt** $(0; 0)$**;** $P_2 = 5$ **kN im Punkt** $(4; 0)$
Punkt A	$x = 3$ **m,** $y = 4$ **m; Tiefe** $z = 6$ **m (dann** $2; 4; 10; 20$ **m)**
Baugrund	$\mu = 0.5$

GESUCHT

Der $\Delta\sigma_z$-Wert jeder Last und ihre Summe; die Gesamtwerte $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$; das Tiefenprofil.



Lösung (1/3)

LÖSUNG

1 Last 1 (zu Beginn): identisch mit Beispiel 1

$$r_1 = 5\ \text{m}, \quad \frac{r_1}{z} = 0.8333, \quad I_{1,1} = 0.12775 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z,1} = \frac{5}{36}(0.12775) = \mathbf{0.01774}\ \text{kPa}$$

2 Last 2 (im Punkt (4 ; 0)): Abstand von A beträgt (−1 ; 4) m

$$r_2 = \sqrt{(3-4)^2 + 4^2} = \sqrt{17} = 4.123\ \text{m}, \qquad \frac{r_2}{z} = 0.6872$$

$$I_{1,2} = \frac{0.47746}{\left[0.6872^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{2.6299} = 0.18155$$

$$\Delta\sigma_{z,2} = \frac{5}{6^2}\,(0.18155) = \mathbf{0.02522}\ \text{kPa}$$

Da die Last 2 näher an A liegt (4.12 m) als die Last 1 (5 m), erzeugt sie die größere Spannung.

Lösung (2/3)

LÖSUNG

3 Vertikale Spannung: Superposition

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z,1} + \Delta\sigma_{z,2} = 0.01774 + 0.02522 = \mathbf{0.04296}\ \text{kPa}$$

4 Horizontalspannungen (μ = 0.5): für Last 2, x = −1, y = 4 (aus ihrem eigenen Abstand)

$$\Delta\sigma_{x,2} = \frac{3(5)(1)(6)}{2\pi\,(53)^{2.5}} = 0.000700 \qquad \Delta\sigma_{y,2} = \frac{3(5)(16)(6)}{2\pi\,(53)^{2.5}} = 0.011207$$

$$\Delta\sigma_x = 0.004436 + 0.000700 = \mathbf{0.00514} \qquad \Delta\sigma_y = 0.007886 + 0.011207 = \mathbf{0.01909}\ \text{kPa}$$

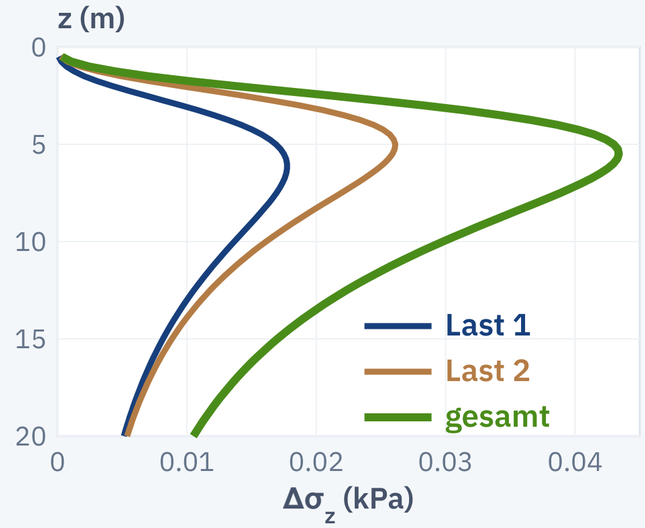
$\Delta\sigma_z$ = 0.04296 kPa, $\Delta\sigma_x$ = 0.00514, $\Delta\sigma_y$ = 0.01909 kPa; in einem linear elastischen Boden werden die Spannungen aus den Lasten summiert.

Lösung (3/3)

LÖSUNG

z (m)	r_1/z	$\Delta\sigma_{z,1}$	r_2/z	$\Delta\sigma_{z,2}$	Gesamt $\Delta\sigma_z$ (kPa)
2	2.500	0.00422	2.062	0.00945	0.01367
4	1.250	0.01419	1.031	0.02442	0.03862
6	0.833	0.01774	0.687	0.02522	**0.04296**
10	0.500	0.01367	0.412	0.01612	0.02979
20	0.250	0.00513	0.206	0.00538	0.01051

In jeder Tiefe ist die Summe die Summe der beiden Lasten; das Maximum der Summe liegt bei etwa z ≈ 5 m (z = 4 m: 0.03862, z = 6 m: 0.04296 kPa). Last 2 liefert in jeder Tiefe einen größeren Beitrag als Last 1.



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

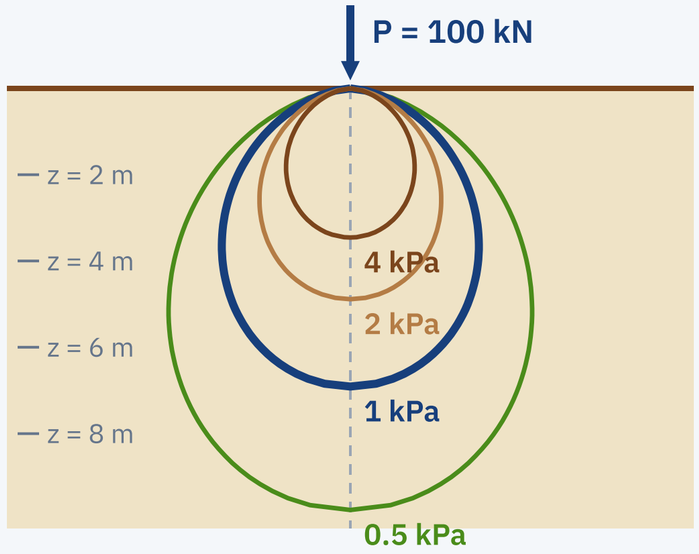
BEISPIEL

Gegeben

Last	$P = 100$ **kN, vertikale Einzellast**
Linie	**Punkte, an denen $\Delta\sigma_z = 1$ gleich kPa ist; $z = 1$ – 6 m**
Zusätzliche Linien	0.5; 2; 4 **kPa (Abbildung)**

GESUCHT

In jeder Tiefe ist der Abstand der Linie von der Lastachse **r**; die Tiefe, in der sich die Linie auf der Achse schließt; der Nachweis, dass der Wert von r tatsächlich $\Delta\sigma_z$ = 1 kPa ergibt.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Auflösen der Gleichung nach r: $\Delta\sigma_z = 3P\, z^3/[2\pi(r^2 + z^2)^{5/2}] = 1$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3(100)(4^3)}{2\pi\,(1)}\right)^{0.4} - 4^2} = \sqrt{(3{,}055.8)^{0.4} - 16}$$

$$r = \sqrt{24.777 - 16} = \mathbf{2.963}\ \mathrm{m}$$

2 Nachweis: Boussinesq-Gleichung mit dem gefundenen r

$$\Delta\sigma_z = \frac{3(100)}{2\pi}\,\frac{4^3}{(2.963^2 + 4^2)^{5/2}} = \mathbf{1.000}\ \mathrm{kPa}$$

Bei z = 4 m liegt die 1-kPa-Linie **2.963 m** von der Lastachse entfernt; setzt man den gefundenen r-Wert in die Boussinesq-Gleichung ein, ergibt sich genau $\Delta\sigma_z$ = 1 kPa (übrige Tiefen auf der nächsten Seite).

Lösung (2/2)

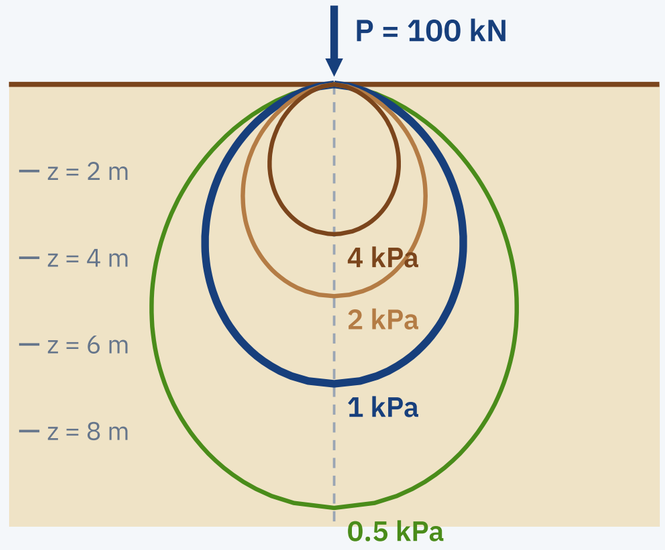
LÖSUNG

3 Tiefe, bei der die Gerade die Achse schneidet (r = 0)

$$z_{axis} = \sqrt{\frac{3P}{2\pi\,\Delta\sigma_z}} = \sqrt{\frac{3(100)}{2\pi(1)}} = \sqrt{47.75} = \mathbf{6.91}\ \text{m}$$

z (m)	r (m)	Breite 2r (m)	$\Delta\sigma_z$ nach Boussinesq (kPa)
1	1.922	3.84	1.000
2	2.605	5.21	1.000
3	2.923	5.85	1.000
4	2.963	5.93	1.000
5	2.717	5.43	1.000
6	2.075	4.15	1.000

Die 1-kPa-Linie beginnt an der Oberfläche im Lastangriffspunkt, erreicht in einer Tiefe von z ≈ 3.65 m ihre größte Ausdehnung (r ≈ 2.98 m) und schließt sich in einer Tiefe von 6.91 m auf der Achse; die Linien kleinerer Spannungen reichen tiefer und weiter.



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Zusammenfassung

Die wichtigsten Punkte

Boussinesq: $\Delta\sigma_z = 3P\,z^3/(2\pi L^5) = (P/z^2)\,I_1$, $I_1 = (3/2\pi) / [(r/z)^2 + 1]^{5/2}$; $\Delta\sigma_z$ hängt weder von μ noch von E ab; $\Delta\sigma_x$, $\Delta\sigma_y$ hängen von μ ab

Beispiel (P = 5 kN, A (3 ; 4 ; 6)): r = 5 m; L = 7.810 m; r/z = 0.8333; $I_1 = 0.12775$; **$\Delta\sigma_z = 0.01774$ kPa**; für μ = 0.5: $\Delta\sigma_x = 0.00444$, $\Delta\sigma_y = 0.00789$ kPa

Tiefe: für dasselbe r = 5 m tritt die größte Spannung bei $z = r\sqrt{(3/2)} = 6.12$ m auf; **unter der Lastachse** ist $\Delta\sigma_z = 0.4775\,P/z^2$ (bei Verdopplung von z wird daraus ein Viertel)

Superposition: Jede Last wird für sich mit ihren eigenen Werten r_k und L_k angesetzt, und die Spannungen werden addiert (im Beispiel 0.01774 + 0.02522 = 0.04296 kPa)

Druckspannungsbirne: Linien gleicher $\Delta\sigma_z$, $r = \sqrt{[(3Pz^3/(2\pi\Delta\sigma_z))^{2/5} - z^2]}$; für P = 100 kN schließt sich die 1-kPa-Linie in einer Tiefe von 6.91 m auf der Achse

Literatur

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels à l’Étude de l’Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Gauthier-Villars, Paris.

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

HINWEIS

Alle Zahlenbeispiele wurden mit der Berechnungsengine des Moduls selbst erzeugt; das Modul liefert dieselben Werte. Das Modul öffnet mit einer Last P = 5 kN und dem Punkt A (3 ; 4 ; 6).

GeoTerva

Geotechnische Berechnungen online

Von der Theorie zur Praxis

Geben Sie Ihre eigenen Einzellasten, den betrachteten Punkt und die Querdehnzahl in GeoTerva ein; das Modul liefert die Werte $\Delta\sigma_z$, $\Delta\sigma_x$ und $\Delta\sigma_y$, das Tiefenprofil, die Isospannungslinien, die schrittweise Lösung und den Bericht zusammen.

Modul öffnen → | **Theorieseite →**

Auf dem Smartphone öffnen
Die Beispielmodule erfordern keine Registrierung.

Falls Sie sie in Ihren Vorlesungen verwenden möchten: info@geoterva.com