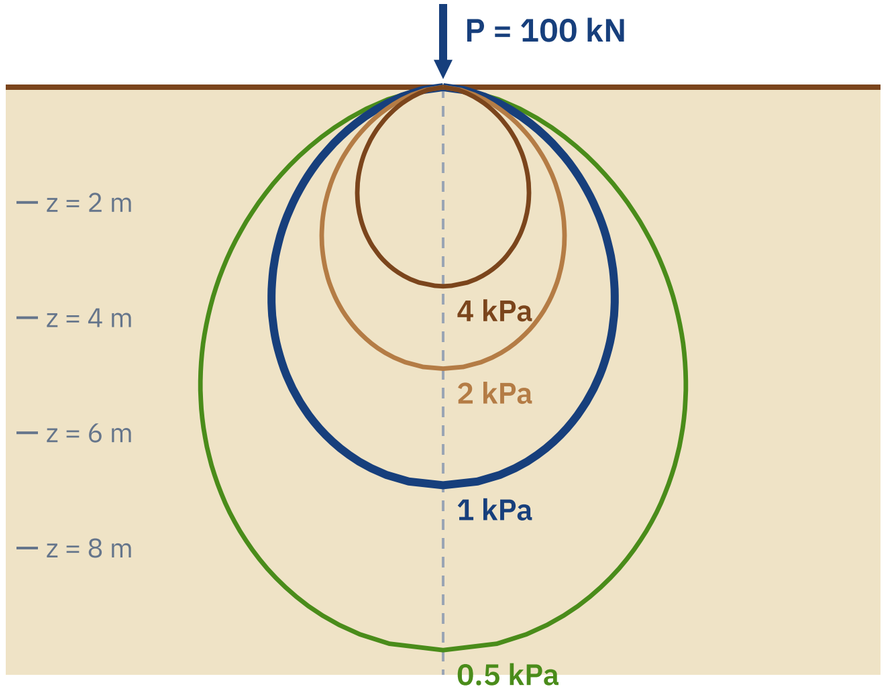


شرائح محاضرات الجيوتكنيك · توزيع الإجهادات في التربة

الإجهاد تحت حمل نقطي (Boussinesq)

المحاضرة: الإجهادات التي يولدها حمل نقطي رأسي على السطح في التربة؛ تحل النقطة الابتدائية يدوياً من البداية إلى النهاية، وتعرض توزيعات الإجهاد مع العمق وفي الاتجاه الجانبي بالجداول.

- حل Boussinesq
- معامل التأثير I_1
- الإجهادات الأفقية
- التراكب
- أبصال الضغط

يستند إلى صفحة النظرية في GeoTerva · geoterva.com

ماذا سنتعلم في هذه المحاضرة؟

الإجهادات الناظمية الثلاثة عند نقطة ما في وسط شبه لانهائي متجانس ومتماثل الخواص وخطي المرونة بسبب **حمل نقطي رأسي** على السطح: $\Delta\sigma_z$، $\Delta\sigma_x$، $\Delta\sigma_y$

أن الإجهاد الرأسي **لا يعتمد على μ ولا على معامل المرونة**؛ وأن الإجهادات الأفقية تعتمد على μ

معامل التأثير I_1: $\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$ واعتماد I_1 على r/z وحدها

التراكب: جمع إجهادات عدة أحمال منفردة؛ و **منحنيات تساوي الإجهاد** (أبصال الضغط) والقيمة $0.4775\ P/z^2$ تحت محور الحمل

نقطة الوحدة الابتدائية **من البداية إلى النهاية يدوياً**؛ والتغير مع العمق والتغير الجانبي والإجهادات الأفقية في الجداول

تسلسل المحاضرة

يعالج كل موضوع في **ثلاث خطوات**:

1 · **النظرية**: المعادلة ومبرراتها

2 · **المسألة**: المعطيات والمطلوب

3 · **الحل**: خطوة بخطوة، بالأرقام

مثال: P = 5 kN؛ النقطة A: x = 3 m، y = 4 m، z = 6 m (r = 5 m؛ μ = 0.5).

النظرية

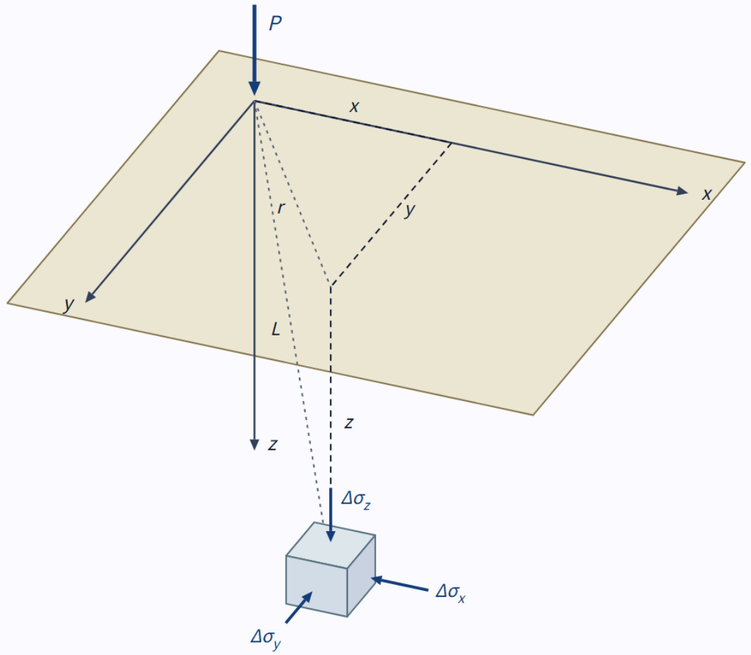
وسط Boussinesq شبه اللانهائي

حل (1883) **Boussinesq** الإجهادات التي يولدها حمل نقطي يؤثر على سطح وسط نصف لانهائي متجانس ومرن ومتماثل الخواص.

وفق فرضيات الحل تكون التربة **وسطاً نصف لانهائي**: يمتد دون حد جانبياً وإلى الأسفل تحت سطح مستوٍ.

الوسط متجانس ومتماثل الخواص ومرن خطياً؛ ويعرف بـ **نسبة بواسون** μ، ولا يدخل معامل المرونة في الإجهادات.

الحمل **P** حمل نقطي رأسي يؤثر على السطح؛ والإجهادات المحسوبة هي الزيادات التي يسببها الحمل، وتضاف إليها الإجهادات الناتجة عن الوزن الذاتي للتربة.



الإجهادات العمودية الثلاثة عند النقطة

النظرية

بالاعتماد على الإحداثيات المبينة في الشكل (**r** = المسافة الأفقية للنقطة عن محور الحمل، **L** = المسافة إلى الحمل) تكون الإجهادات العمودية عند النقطة:

$$\Delta\sigma_x = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3x^2 z}{L^5} - (1-2\mu)\left[\frac{x^2-y^2}{L\,r^2(L+z)} + \frac{y^2 z}{L^3 r^2}\right]\right\}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3y^2 z}{L^5} - (1-2\mu)\left[\frac{y^2-x^2}{L\,r^2(L+z)} + \frac{x^2 z}{L^3 r^2}\right]\right\}$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{L^5} = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{(r^2+z^2)^{5/2}} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\ \ L = \sqrt{r^2+z^2}$$

النظرية

تأثير نسبة بواسون

الإجهادات الأفقية تعتمد على نسبة بواسون μ؛ أما **الإجهاد الرأسي** فلا يعتمد على μ ولا على معامل المرونة.

عند μ = 0.5 (دون تغير في الحجم، طين غير مصرف) تنعدم الحدود الواقعة بين القوسين المربعين، ويصبح $\Delta\sigma_x = 3P\, x^2z/(2\pi L^5)$، $\Delta\sigma_y = 3P\, y^2z/(2\pi L^5)$.

على محور الحمل (r = 0) يقترب الإجهادان الأفقيان معاً من القيمة $-P(1-2\mu)/(4\pi z^2)$؛ وهذا يمثل انخفاضاً صغيراً.

$$\mu = 0.5: \qquad \Delta\sigma_x = \frac{3P\,x^2 z}{2\pi L^5}, \qquad \Delta\sigma_y = \frac{3P\,y^2 z}{2\pi L^5}$$

$$r = 0: \qquad \Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = -\frac{P\,(1-2\mu)}{4\pi z^2}$$

$\Delta\sigma_z = (P/z^2)\, I_1$

النظرية

لما كانت $L^2 = z^2[(r/z)^2 + 1]$ أمكن كتابة المعادلة بمعامل يعتمد على r/z وحدها.

يعتمد معامل التأثير I_1 على r/z وحدها؛ ولذلك يستخدم جدول واحد أو منحنى واحد لكل P ولكل z.

$$L^2 = z^2\left[(r/z)^2 + 1\right]$$

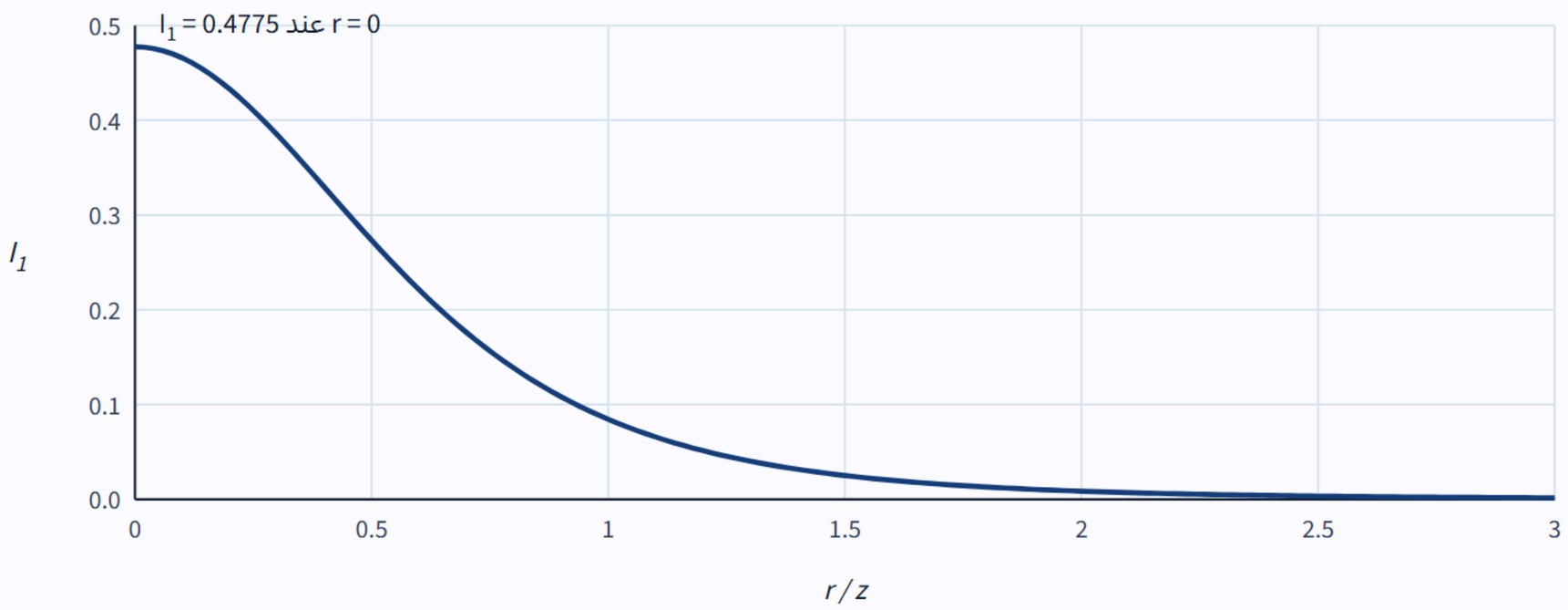
$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 \qquad I_1 = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\left[(r/z)^2 + 1\right]^{5/2}}$$

قيم I_1 (الوحدة)

r/z	I_1	r/z	I_1
0.0	0.4775	1.0	0.0844
0.1	0.4657	1.2	0.0513
0.2	0.4329	1.4	0.0317
0.3	0.3849	1.6	0.0200
0.4	0.3295	1.8	0.0129
0.5	0.2733	2.0	0.0085
0.6	0.2214	2.5	0.0034
0.7	0.1762	3.0	0.0015
0.8	0.1386	4.0	0.0004
0.9	0.1083	5.0	0.0001

I_1 و r/z

النظرية



معامل التأثير I1 مقابل r/z. يكون في أعلا قيم له على محور الحمل، 0.4775 = (2π)/3، وينخفض إلى 0.0844 عند r/z = 1 وإلى ما دون 0.002 بعد r/z = 3.

النظرية

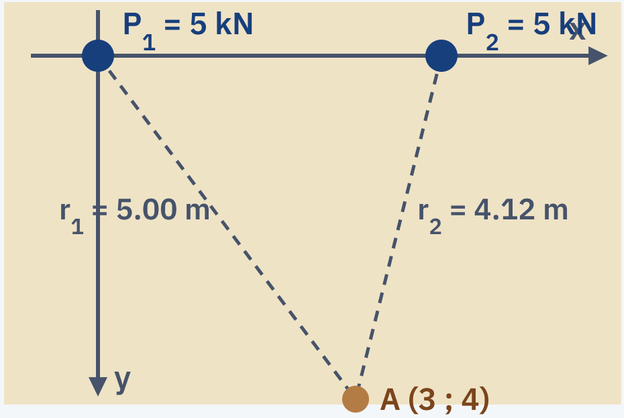
التراكب

في حالة عدة أحمال نقطية على تربة مرنة خطية تُجمع الإجهادات بالتراكب: $\Delta\sigma_z = \Sigma\Delta\sigma_{z,k}$، $\Delta\sigma_x = \Sigma\Delta\sigma_{x,k}$، $\Delta\sigma_y = \Sigma\Delta\sigma_{y,k}$.

يُعالج كل حمل على حدة وتؤخذ النقطة على بعد $(x - x_{L,k}، y - y_{L,k})$ منه؛ وبذلك تكون r_k و L_k القيمتين الخاصتين بالحمل نفسه.

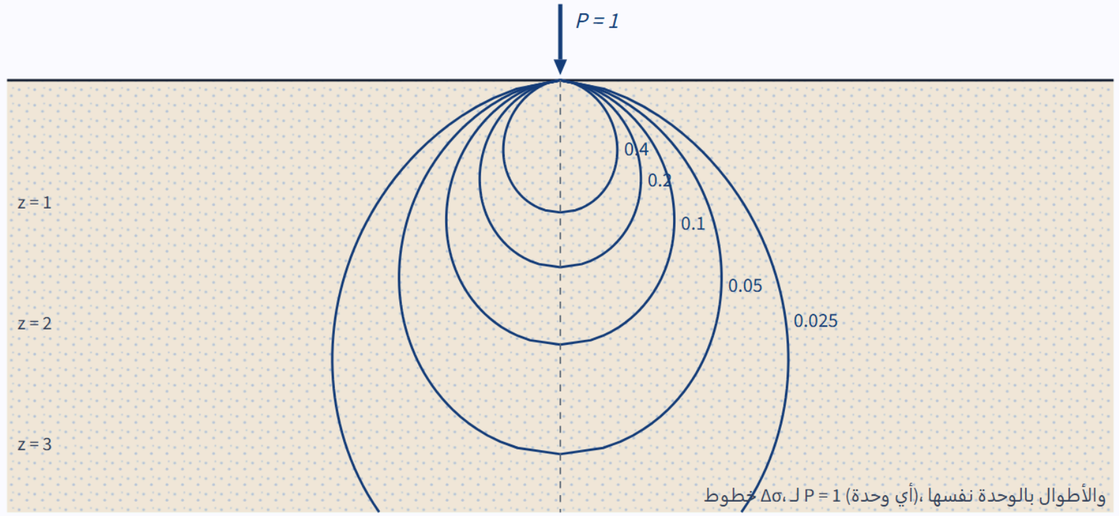
$$\Delta\sigma_z = \sum_k \frac{3P_k}{2\pi}\,\frac{z^3}{L_k^5}, \qquad L_k = \sqrt{(x-x_{L,k})^2 + (y-y_{L,k})^2 + z^2}$$

تقبل الوحدة ثمانية أحمال على الأكثر، ولا يجوز أن يقع حملان في الموضع نفسه؛ وترسم خطوط تساوي الإجهاد في عرض المقطع على المستوى الرأسي $y = y_A$.



انتفاخات الإجهاد لحمل نقطي

النظرية



ينتج عن وصل النقاط التي تتساوى عندها قيمة $\Delta\sigma_z$ منحنيات تساوي الإجهاد ذات الشكل البصلي.

على طول محور الحمل يتناقص الإجهاد مع مربع العمق: $\Delta\sigma_z = 0.4775\ P/z^2$.

في المنطقة القريبة جداً من الحمل يعطي الحل إجهادات كبيرة جداً: فالحمل الحقيقي لا يكون نقطة أبداً.

$$r = \sqrt{\left(\frac{3P\,z^3}{2\pi\,\Delta\sigma_z}\right)^{2/5} - z^2}$$

المسألة

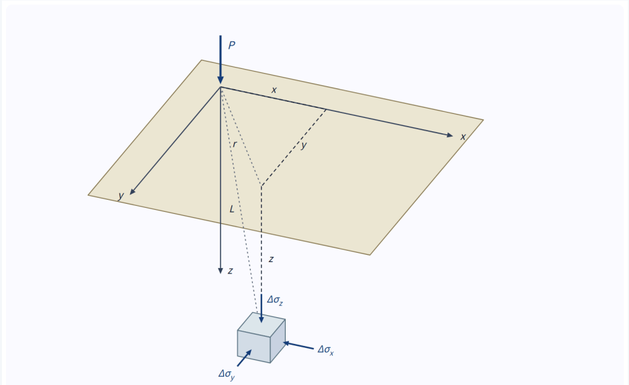
مثال

المعطيات

الحمل	**حمل نقطي رأسي $P = 5$ kN، على السطح، عند نقطة أصل الإحداثيات**
النقطة A	$x = 3$ m ,$y = 4$ m ,$z = 6$ m
التربة	**وسط شبه لانهائي متجانس ومرن؛** $\mu = 0.5$

المطلوب

r/z ،L ،r، معامل التأثير I_1 وزيادة الإجهاد الرأسي **$\Delta\sigma_z$**؛ والتحقق من النتيجة مباشرة بالمعادلة.



الحل (1/2)

الحل

1 المسافة الأفقية r، المسافة إلى الحمل L، و r/z

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \mathbf{5}\ \text{m} \qquad L = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{5^2 + 6^2} = \mathbf{7.810}\ \text{m}$$

$$r/z = 5/6 = \mathbf{0.8333}$$

2 معامل التأثير I_1

$$I_1 = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{1}{\left[(r/z)^2 + 1\right]^{5/2}} = \frac{0.47746}{\left[0.8333^2 + 1\right]^{2.5}}$$

$$I_1 = \frac{0.47746}{1.6944^{2.5}} = \frac{0.47746}{3.7374} = \mathbf{0.12775}$$

تبعد النقطة **5 m** عن محور الحمل وتقع على عمق **6 m**؛ ولما كانت r/z = 0.8333 فإن I_1 تساوي 0.27 من قيمتها تحت محور الحمل (0.4775).

الحل (2/2)

الحل

3 زيادة الإجهاد الرأسي

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 = \frac{5}{6^2}\,(0.12775) = 0.13889\,(0.12775) = \mathbf{0.01774}\ \text{kPa}$$

4 تحقق: معادلة Boussinesq المباشرة

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{L^5} = \frac{3(5)(6^3)}{2\pi\,(7.810)^5}$$

$$= \frac{3{,}240}{2\pi\,(29{,}062)} = \mathbf{0.01774}\ \text{kPa}$$

($I_1 = 0.12775$) **$\Delta\sigma_z$ = 0.01774 kPa**. ولأن الحمل صغير فإن الإجهاد صغير أيضاً؛ وتعطي الوحدة القيمة نفسها عند هذه النقطة.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

مثال

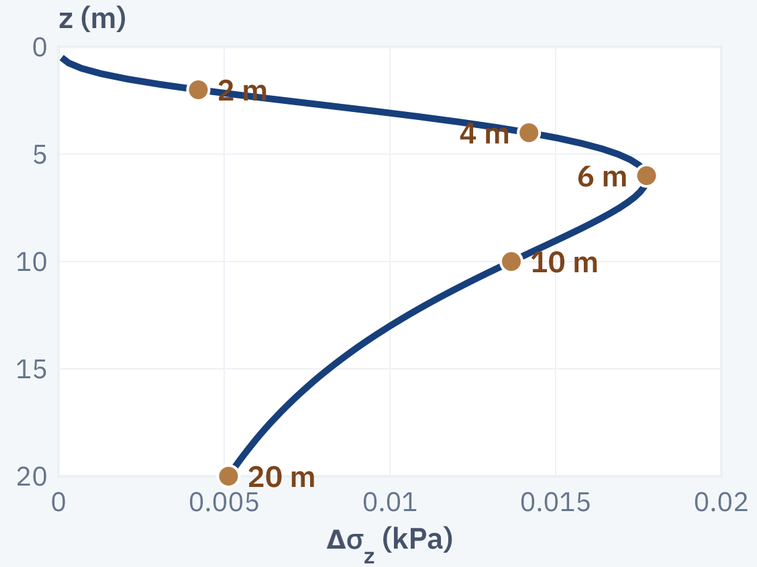
المسألة

المعطيات

الحمل والنقطة	$P = 5$ kN؛ $x = 3$ m، $y = 4$ m، ومن ثم $r = 5$ m (القيمة نفسها عند كل عمق)
الأعماق	$z = 2$؛ 4؛ 6؛ 10؛ 20 m

المطلوب

لكل عمق: **r/z** و**I_1** و**$\Delta\sigma_z$**؛ والمقارنة مع القيمة $0.4775\ P/z^2$ تحت محور الحمل؛ والعمق الذي يبلغ عنده الإجهاد أكبر قيمة.



الحل (1/2)

الحل

1 z = 2 m (r = 5 m): r/z = 2.5

$$I_1 = \frac{0.47746}{\left[2.50^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{141.529} = 0.00337$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{2^2}\,(0.00337) = \mathbf{0.00422}\ \text{kPa}$$

2 z = 4 m (r = 5 m): r/z = 1.25

$$I_1 = \frac{0.47746}{\left[1.25^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{10.511} = 0.04542$$

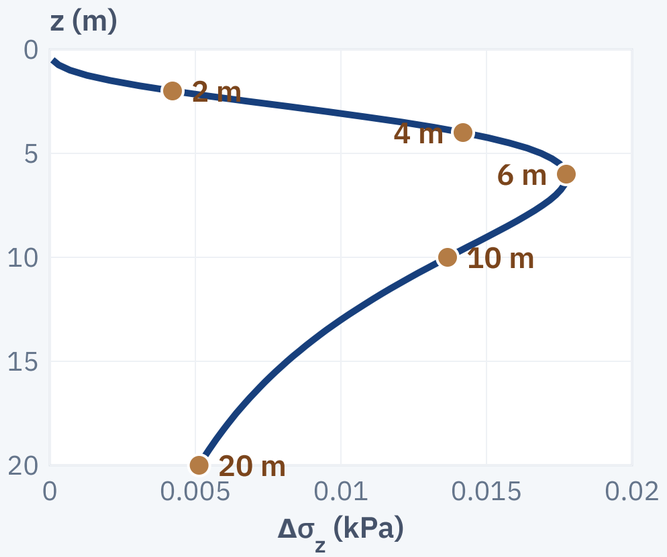
$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{4^2}\,(0.04542) = \mathbf{0.01419}\ \text{kPa}$$

عند r = 5 m نفسها، كلما ازداد z تناقصت النسبة r/z وازدادت I_1؛ لكن P/z^2 تتناقص. ويزداد الحاصل أولا ثم يتناقص: 0.00422 عند z = 2 m و 0.01419 kPa عند z = 4 m.

الحل (2/2)

الحل

0.4775 P/z² (kPa)	$\Delta\sigma_z$ (kPa)	I_1	r/z	z (m)
0.59683	0.00422	0.0034	2.500	2
0.14921	0.01419	0.0454	1.250	4
0.06631	**0.01774**	0.1278	0.833	6
0.02387	0.01367	0.2733	0.500	10
0.00597	0.00513	0.4103	0.250	20



تقع القيمة العظمى للإجهاد على العمق $z = r\sqrt{(3/2)} =$ **6.12 m** (0.01775 kPa)؛ والعمق z = 6 m قريب جدا منه (النقطة الابتدائية للوحدة). وعلى بعد 5 m من المحور يكون الإجهاد في الأعماق الضحلة أصغر كثيرا منه تحت محور الحمل، ويقترب منه مع ازدياد العمق (z = 20 m: 0.00513 و 0.00597 kPa).

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

مثال

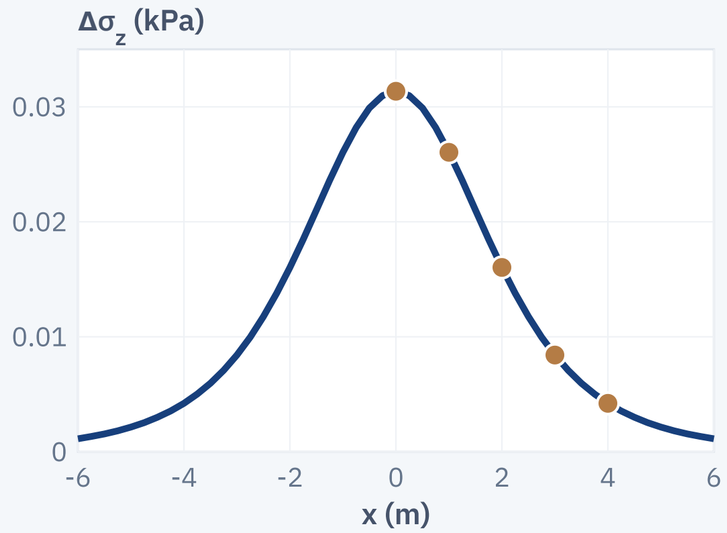
المسألة

المعطيات

الحمل	$P = 5$ kN، عند نقطة أصل الإحداثيات
النقاط	$z = 2$ m, $y = 3$ m; $x = 0, 1, 2, 3, 4$ m
التربة	$\mu = 0.5$ (الإجهاد الرأسي مستقل عن μ)

المطلوب

لكل نقطة **r** و **r/z** و **I_1** و **$\Delta\sigma_z$**؛ ونسبة القيمة تحت الحمل (x = 0) إلى القيمة الأبعد (x = 4 m).



الحل (1/2)

الحل

1 المسافة الأفقية و r/z (x = 2 m، y = 3 m)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = \mathbf{3.606}\ \text{m}$$

$$\frac{r}{z} = \frac{3.606}{2} = \mathbf{1.8028} \qquad \left(\frac{r}{z}\right)^2 + 1 = 4.250$$

2 معامل التأثير والإجهاد

$$I_1 = \frac{0.47746}{4.250^{2.5}} = \frac{0.47746}{37.237} = 0.01282$$

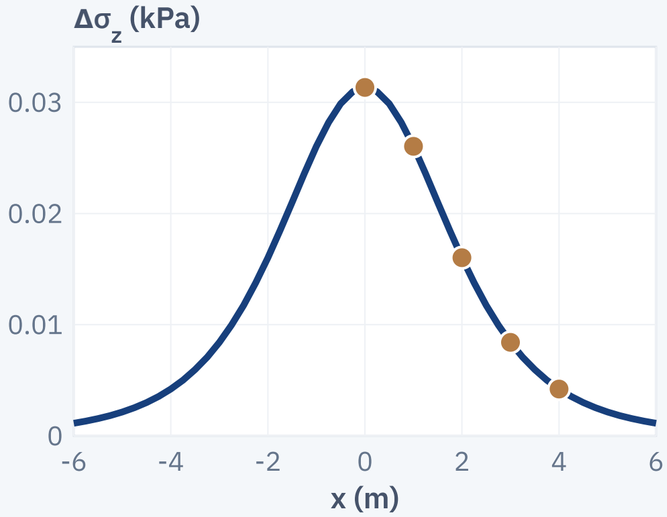
$$\Delta\sigma_z = \frac{5}{2^2}\,(0.01282) = \mathbf{0.01603}\ \text{kPa}$$

عند x = 2 m: r = 3.606 m، r/z = 1.803، **$\Delta\sigma_z$ = 0.01603 kPa**. وتحسب قيم x الأخرى بالخطوات الثلاث نفسها (الجدول في الصفحة التالية).

الحل (2/2)

الحل

$\Delta\sigma_z$ (kPa)	I_1	r/z	r (m)	x (m)
0.03134	0.0251	1.500	3.000	0
0.02604	0.0208	1.581	3.162	1
0.01603	0.0128	1.803	3.606	2
0.00841	0.0067	2.121	4.243	3
0.00422	0.0034	2.500	5.000	4



عند النقطة الواقعة تحت الحمل ($x = 0$، $r = 3$ m) تبلغ القيمة **0.03134 kPa**؛ وعند ($r = 5$ m) $x = 4$ m تبلغ **0.00422 kPa**: النسبة 7.4. وعلى العمق نفسه يتناقص الإجهاد بسرعة كلما زادت المسافة الأفقية؛ ويبلغ المنحنى أقصاه حول $x = 0$ (ولأن $y = 3$ m يبقى الحمل على بعد 3 m).

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

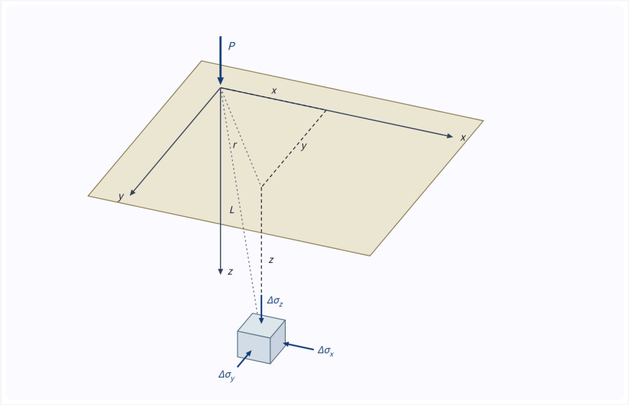
مثال

المعطيات

الحمل والنقطة	$P = 5$ kN; A: $x = 3$ m, $y = 4$ m, $z = 6$ m) $L = 7.810$ m, $r = 5$ m)
نسبة بواسون	$\mu = 0.5$; 0.3; 0.2; 0

المطلوب

$\Delta\sigma_x$ و $\Delta\sigma_y$ (يدوياً بالمعادلة المختصرة عند $\mu = 0.5$ وبالمعادلة الكاملة عند $\mu = 0.3$)؛ وتأثير μ في الإجهاد الرأسي.



الحل (1/3)

الحل

1 L^5 (L = 7,810 m)

$$L^5 = 61^{2.5} = 29{,}062 \text{ m}^5 \qquad 2\pi L^5 = 182{,}602$$

2 μ = 0.5: تتلاشى الحدود الواقعة بين القوسين المعقوفين

$$\Delta\sigma_x = \frac{3P\,x^2 z}{2\pi L^5} = \frac{3(5)(3^2)(6)}{182{,}602} = \frac{810}{182{,}602} = \mathbf{0.00444}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{3P\,y^2 z}{2\pi L^5} = \frac{3(5)(4^2)(6)}{182{,}602} = \frac{1{,}440}{182{,}602} = \mathbf{0.00789}\ \text{kPa}$$

التحقق: عند μ = 0.5 يكون $\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y = 3P\ r^2z/(2\pi L^5) = 0.00444 + 0.00789 =$ **0.01232 kPa**؛ وكلاهما من القيم التي تعطيها الوحدة.

الحل (2/3)

الحل

3 حدود المعادلة الكاملة (x = 3، y = 4، z = 6، r² = 25، L = 7.810)

$$\frac{3x^2z}{L^5} = \frac{162}{29{,}062} = 0.005574 \qquad \frac{3y^2z}{L^5} = \frac{288}{29{,}062} = 0.009910$$

$$\frac{x^2-y^2}{L\,r^2(L+z)} = \frac{-7}{2{,}696.5} = -0.002596 \qquad \frac{y^2z}{L^3r^2} = \frac{96}{11{,}910.6} = 0.008060$$

$$\frac{x^2z}{L^3r^2} = \frac{54}{11{,}910.6} = 0.004534$$

4 μ = 0.3: 1 − 2μ = 0.4

$$\Delta\sigma_x = \frac{5}{2\pi}\left[0.005574 - 0.4\,(-0.002596 + 0.008060)\right] = \mathbf{0.00270}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_y = \frac{5}{2\pi}\left[0.009910 - 0.4\,(0.002596 + 0.004534)\right] = \mathbf{0.00562}\ \text{kPa}$$

الحل (3/3)

الحل

μ	$\Delta\sigma_x$ (10^{-3} kPa)	$\Delta\sigma_y$ (10^{-3} kPa)	$\Delta\sigma_z$ (10^{-3} kPa)
0.5	4.436	7.886	17.744
0.3	2.697	5.617	17.744
0.2	1.827	4.482	17.744
0.0	0.088	2.212	17.744

لا يعتمد $\Delta\sigma_z$ على μ (القيمة $17.744 \cdot 10^{-3}$ kPa نفسها في كل صف)؛ وتتناقص الإجهادات الأفقية بتناقص μ: $\Delta\sigma_x$ = 4.436 عند $\mu = 0.5$ و $2.697 \cdot 10^{-3}$ kPa عند $\mu = 0.3$. وعند هذه النقطة تكون الإجهادات الثلاثة كلها ضاغطة.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

مثال

المعطيات

الحمل	**حمل نقطي رأسي،** $P = 100$ **kN**
النقاط	**على محور الحمل،** $z = 1$ **؛** 2 **؛** 3 **؛** 5 **؛** 10 **m**
التربة	$\mu = 0.3$

المطلوب

لكل عمق: $\Delta\sigma_z$ ($I_1 = 3/(2\pi)$ عند r = 0)

والإجهادات الأفقية $\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$.

الحل (1/2)

الحل

1 الإجهاد الرأسي (r = 0 ⇒ r/z = 0 ⇒ $I_1 = 3/(2\pi) = 0.4775$)

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{z^2} I_1 = \frac{100}{2^2}(0.4775) = \mathbf{11.937}\ \text{kPa}$$

2 الإجهادات الأفقية (القيمة الحدية عند r = 0، μ = 0.3)

$$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y = -\frac{P(1-2\mu)}{4\pi z^2} = -\frac{100\,(0.4)}{4\pi\,(2^2)} = -\mathbf{0.796}\ \text{kPa}$$

عند z = 2 m تحت المحور **$\Delta\sigma_z$ = 11.937 kPa**؛ والإجهادات الأفقية **سالبة** (−0.796 kPa): أي نقصان صغير. وهي أصغر من الإجهاد الرأسي بنحو 15 مرة.

الحل (2/2)

الحل

z (m)	$\Delta\sigma_z = 0.4775\ P/z^2$ (kPa)	$\Delta\sigma_x = \Delta\sigma_y$ (kPa)	نسبة $\Delta\sigma_z$ (z = 1 m = 1)
1	47.746	3.183−	1.0000
2	11.937	0.796−	0.2500
3	5.305	0.354−	0.1111
5	1.910	0.127−	0.0400
10	0.477	0.032−	0.0100

عند **تضاعف العمق ينخفض الإجهاد إلى الربع** (من 47.75 إلى 11.94 kPa عند الانتقال من z = 1 إلى 2 m). ولأن هذه الإجهادات زيادات، فإنها تضاف إلى الإجهاد الناتج عن الوزن الذاتي للتربة: فمثلا إذا كان γ = 18 kN/m³ فإن σ_{v0} = 36 kPa عند z = 2 m ويصبح الإجهاد الرأسي بعد التحميل 47.94 kPa.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

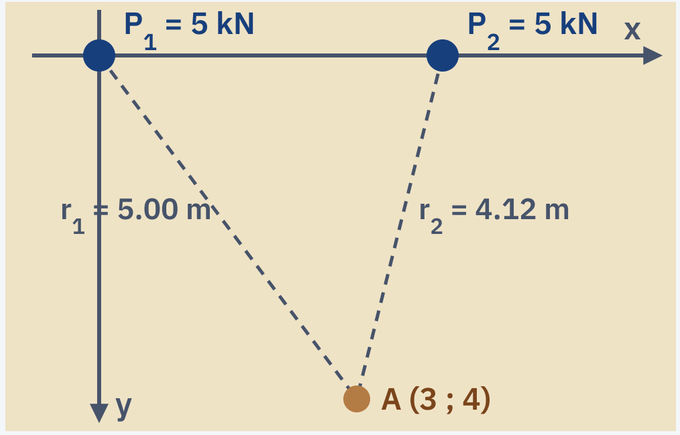
مثال

المعطيات

الأحمال	$P_1 = 5$ kN عند النقطة $(0;0)$؛ $P_2 = 5$ kN عند النقطة $(4;0)$
النقطة A	$x = 3$ m، $y = 4$ m؛ العمق $z = 6$ m (ثم 2؛ 4؛ 10؛ 20 m)
التربة	$\mu = 0.5$

المطلوب

قيمة $\Delta\sigma_z$ لكل حمل ومجموعها؛ و $\Delta\sigma_x$ و $\Delta\sigma_y$ الكليان؛ ومنحنى التغير مع العمق.



الحل (1/3)

الحل

1 الحمل 1 (في البداية): مطابق للمثال 1

$$r_1 = 5\ \text{m}, \quad \frac{r_1}{z} = 0.8333, \quad I_{1,1} = 0.12775 \Rightarrow \Delta\sigma_{z,1} = \frac{5}{36}(0.12775) = \mathbf{0.01774}\ \text{kPa}$$

2 الحمل 2 (عند النقطة (4 ; 0)): بُعد A عنه هو (−1 ; 4) m

$$r_2 = \sqrt{(3-4)^2 + 4^2} = \sqrt{17} = 4.123\ \text{m}, \quad \frac{r_2}{z} = 0.6872$$

$$I_{1,2} = \frac{0.47746}{\left[0.6872^2 + 1\right]^{2.5}} = \frac{0.47746}{2.6299} = 0.18155$$

$$\Delta\sigma_{z,2} = \frac{5}{6^2}\,(0.18155) = \mathbf{0.02522}\ \text{kPa}$$

لما كان الحمل 2 أقرب إلى A (4.12 m) من الحمل 1 (5 m)، فإنه يعطي إجهاداً أكبر.

الحل (2/3)

الحل

3 الإجهاد الرأسي: التراكب

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z,1} + \Delta\sigma_{z,2} = 0.01774 + 0.02522 = \mathbf{0.04296}\ \text{kPa}$$

4 الإجهادات الأفقية ($\mu = 0.5$): للحمل 2 عند $y = 4$، $x = -1$ (من مسافته الخاصة)

$$\Delta\sigma_{y,2} = \frac{3(5)(16)(6)}{2\pi\,(53)^{2.5}} = 0.011207 \qquad \Delta\sigma_{x,2} = \frac{3(5)(1)(6)}{2\pi\,(53)^{2.5}} = 0.000700$$

$$\Delta\sigma_y = 0.007886 + 0.011207 = \mathbf{0.01909}\ \text{kPa} \qquad \Delta\sigma_x = 0.004436 + 0.000700 = \mathbf{0.00514}$$

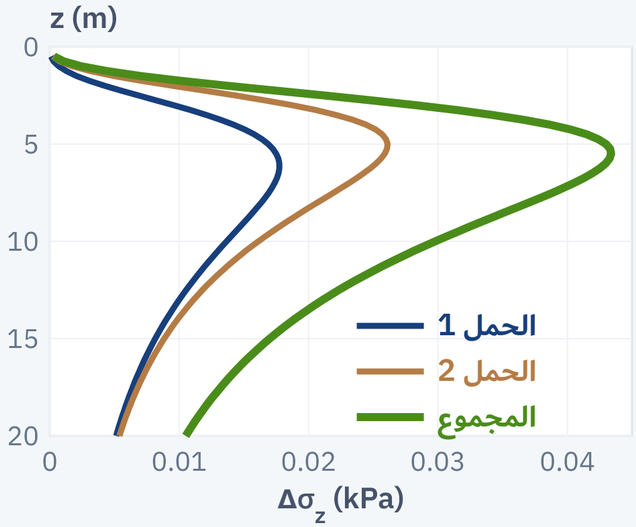
$\Delta\sigma_y = 0.01909$ kPa، $\Delta\sigma_x = 0.00514$، **$\Delta\sigma_z = 0.04296$ kPa**؛ وتجمع إجهادات الأحمال في التربة الخطية المرنة.

الحل (3/3)

الحل

$\Delta\sigma_z$ الكلي (kPa)	$\Delta\sigma_{z,2}$	r_2/z	$\Delta\sigma_{z,1}$	r_1/z	z (m)
0.01367	0.00945	2.062	0.00422	2.500	2
0.03862	0.02442	1.031	0.01419	1.250	4
0.04296	0.02522	0.687	0.01774	0.833	6
0.02979	0.01612	0.412	0.01367	0.500	10
0.01051	0.00538	0.206	0.00513	0.250	20

المجموع عند كل عمق هو مجموع الحملين؛ وأكبر مجموع يقع عند $z \approx 5$ m تقريباً (0.04296 kPa: $z = 6$ m، 0.03862: $z = 4$ m). ويسهم الحمل 2 بمقدار أكبر من الحمل 1 عند كل عمق.



تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

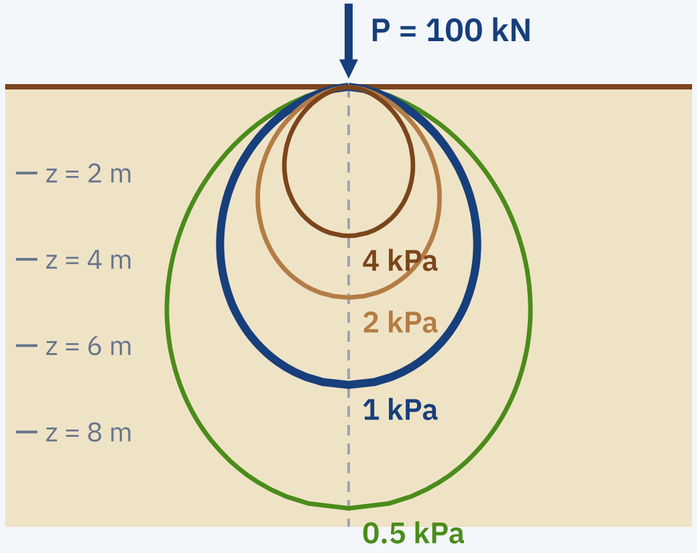
مثال

المعطيات

الحمل	$P = 100$ kN، حمل نقطي رأسي
الخط	النقاط التي تساوي $\Delta\sigma_z = 1$ kPa؛ $z = 1$ – 6 m
خطوط إضافية	0.5 ;2 ;4 kPa (الشكل)

المطلوب

المسافة **r** بين الخط ومحور الحمل عند كل عمق؛ والعمق الذي ينغلق عنده الخط على المحور؛ والتحقق من أن قيمة r تعطي فعلا $\Delta\sigma_z$ = 1 kPa.



الحل (1/2)

الحل

1 حل المعادلة من أجل r: $\Delta\sigma_z = 3P\,z^3/[2\pi(r^2+z^2)^{5/2}] = 1$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3(100)(4^3)}{2\pi\,(1)}\right)^{0.4} - 4^2} = \sqrt{(3{,}055.8)^{0.4} - 16}$$

$$r = \sqrt{24.777 - 16} = \mathbf{2.963}\ \text{m}$$

2 التحقق: معادلة Boussinesq باستخدام r الناتجة

$$\Delta\sigma_z = \frac{3(100)}{2\pi}\,\frac{4^3}{(2.963^2+4^2)^{5/2}} = \mathbf{1.000}\ \text{kPa}$$

عند z = 4 m يبعد منحنى تساوي الإجهاد 1 kPa عن محور الحمل بمقدار **2.963 m**؛ وعند تعويض قيمة r الناتجة في معادلة Boussinesq يعطي $\Delta\sigma_z$ = 1 kPa تماماً (الأعماق الأخرى في الصفحة التالية).

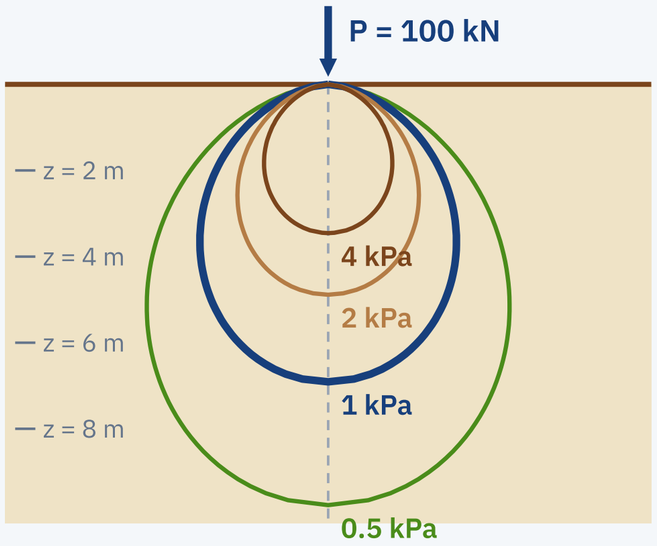
الحل (2/2)

الحل

3 العمق الذي ينغلق عنده الخط على المحور (r = 0)

$$z_{axis} = \sqrt{\frac{3P}{2\pi\,\Delta\sigma_z}} = \sqrt{\frac{3(100)}{2\pi(1)}} = \sqrt{47.75} = \mathbf{6.91}\ \text{m}$$

z (m)	r (m)	2r (m) العرض	$\Delta\sigma_z$ وفق Boussinesq (kPa)
1	1.922	3.84	1.000
2	2.605	5.21	1.000
3	2.923	5.85	1.000
4	2.963	5.93	1.000
5	2.717	5.43	1.000
6	2.075	4.15	1.000



يبدأ خط الإجهاد المتساوي 1 kPa عند نقطة الحمل على السطح، ويبلغ أقصى اتساع له (r ≈ 2.98 m) عند عمق z ≈ 3.65 m، وينغلق على المحور عند عمق 6.91 m؛ وتمتد خطوط الإجهادات الأصغر إلى عمق أكبر وبعرض أكبر.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

النقاط الرئيسية

Boussinesq: $\Delta\sigma_z = 3P\,z^3/(2\pi L^5) = (P/z^2)\,I_1$، $I_1 = (3/2\pi) / [(r/z)^2 + 1]^{5/2}$؛ لا تعتمد $\Delta\sigma_z$ على μ ولا على E؛ بينما تعتمد $\Delta\sigma_x$، $\Delta\sigma_y$ على μ

مثال ((P = 5 kN، A (3 ; 4 ; 6)): $r = 5$ m؛ $L = 7.810$ m؛ $r/z = 0.8333$؛ $I_1 = 0.12775$؛ **$\Delta\sigma_z = 0.01774$ kPa**؛ وعند $\mu = 0.5$ يكون $\Delta\sigma_x = 0.00444$، $\Delta\sigma_y = 0.00789$ kPa

العمق: عند $r = 5$ m نفسها يقع أكبر إجهاد على العمق $z = r\sqrt{(3/2)} = 6.12$ m؛ و **تحت محور الحمل** $\Delta\sigma_z = 0.4775\,P/z^2$ (وعندما يتضاعف z يصبح الإجهاد ربع قيمته)

التراكب: يؤخذ كل حمل منفردا بقيمتيه r_k و L_k، ثم تجمع الإجهادات (في المثال $0.01774 + 0.02522 = 0.04296$ kPa)

بصلة الضغط: خطوط تساوي الإجهاد $\Delta\sigma_z$ يحددها $r = \sqrt{[(3Pz^3/(2\pi\Delta\sigma_z))^{2/5} - z^2]}$؛ وعند $P = 100$ kN ينغلق الخط 1 kPa على المحور عند عمق 6.91 m

المراجع

Boussinesq, J. (1883). Application des Potentiels à l’Étude de l’Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques. Gauthier-Villars, Paris.

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

ملاحظة

جميع الأمثلة العددية مولدة بمحرك الحساب الخاص بالوحدة؛ وتعطي الوحدة القيم نفسها. وتفتح الوحدة على الحمل P = 5 kN والنقطة A (3 ; 4 ; 6).

حسابات الجيوتكنيك عبر الإنترنت

من النظرية إلى التطبيق

أدخل في GeoTerva الأحمال المركزة الخاصة بك والنقطة ونسبة بواسون؛ وتعطي الوحدة قيم $\Delta\sigma_y$ ،$\Delta\sigma_x$ ،$\Delta\sigma_z$، ومنحنى العمق، ومنحنيات تساوي الإجهاد، والحل خطوة بخطوة، والتقرير معاً.

افتح الوحدة ← | **صفحة النظرية ←**

افتح على الهاتف

لا تتطلب الوحدات التجريبية تسجيلاً.