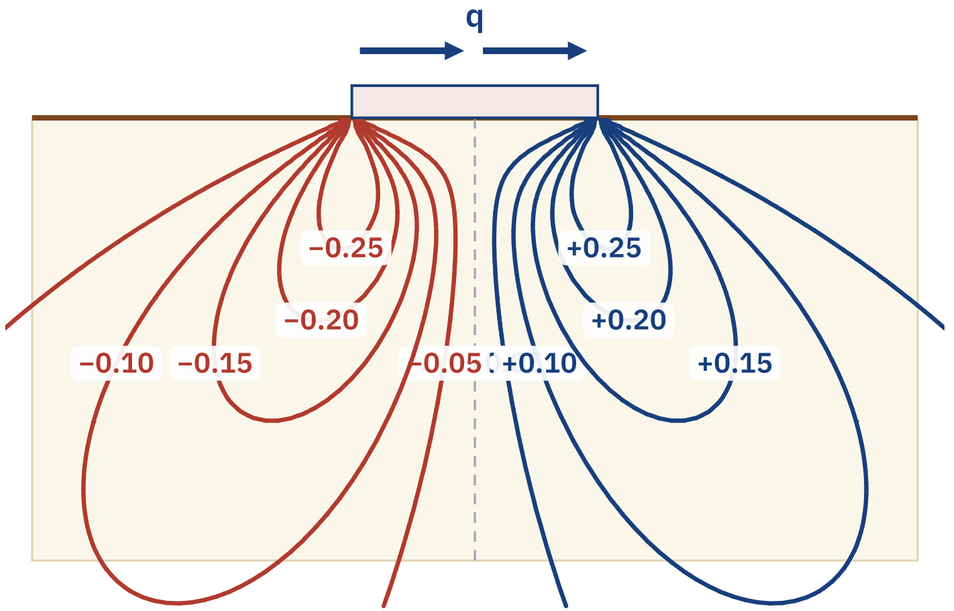
GeoTerva

岩土工程讲义 · 土体中的应力

水平条形荷载下的应力

讲义：沿地表推动的水平和倾斜条形荷载；单点手算、倾斜度、深度剖面和水平剖面。

- 水平线荷载的积分
- 倾斜荷载即竖向分量与水平分量之和
- 前方增大，后方减小
- 叠加原理
- 可手算求解



引言

本讲内容

沿地表**推动**（水平）和**倾斜**作用的条形荷载下方的竖向应力增量：水平线荷载沿条带宽度的积分

水平条形荷载的方程，以及应力仅为**x的函数**这一结论：荷载前方增大，后方减小，轴线正下方为零

将倾斜荷载分解为$q_v = q\cos\alpha$和$q_h = q\sin\alpha$两个分量，再将竖向与水平条形荷载解**叠加**

从头到尾手算一个点（荷载前方的A点和荷载后方的B点）；倾斜角、深度和多条条形荷载的影响用表格给出

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：公式及其依据

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

算例：$q = 150\ \mathrm{kN/m^2}$，与竖直方向成$\alpha = 30°$倾斜；$B = 3\ \mathrm{m}$；A点位于$x = +2.25\ \mathrm{m}$，$z = 3\ \mathrm{m}$。

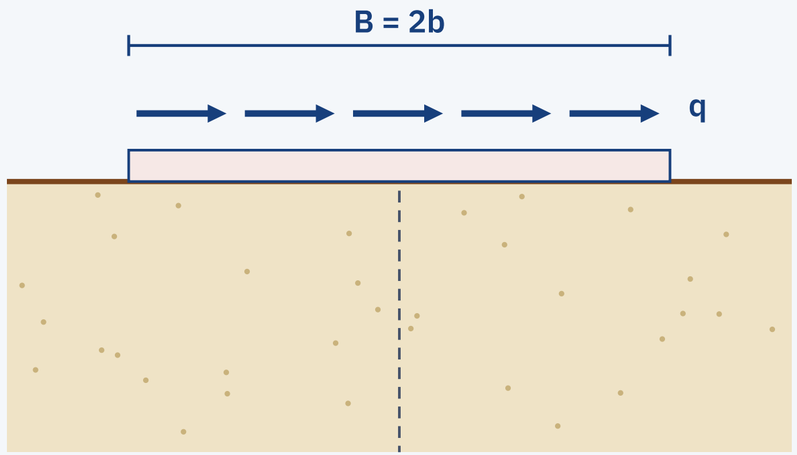
条形荷载也沿地表方向产生推力

理论

滑动基础下的摩擦力、挡土墙底面处的水平推力、道路上车辆的制动力：条形荷载同样沿地表产生**推力**

模块给出承受均布水平压力q的**柔性条形荷载**下的竖向应力增量，并通过**叠加**给出倾斜条形荷载下的竖向应力增量；条形荷载宽度B = 2b，长度无限（平面应变）

土体为**均质、各向同性、线弹性**的半无限空间。$\Delta\sigma_z$仅为荷载增量，**可为负值**（表示减小）



剖面：水平荷载沿+x方向推动；条形荷载沿y方向无限延伸

由水平线荷载到条形荷载

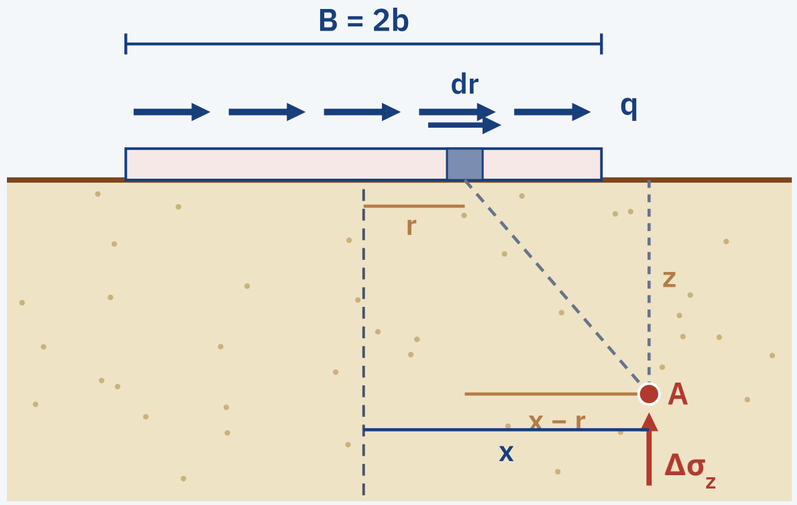
理论

与竖向条形荷载相同，宽度为dr的微元条带每单位长度承担**q dr**，其作用相当于沿+x方向作用的**水平线荷载**

$$d\sigma_z = \frac{2\,(q\,dr)\,(x-r)\,z^2}{\pi\,[(x-r)^2+z^2]^2}$$

取u = x − r，则原函数为−1/(u² + z²)。在−b ≤ r ≤ b区间内，积分化为两个线荷载之差：

$$\Delta\sigma_z = \frac{q\,z^2}{\pi}\left[\frac{1}{(x-b)^2+z^2} - \frac{1}{(x+b)^2+z^2}\right]$$



$\Delta\sigma_z = 4bqxz^2 / \{\pi[(x^2 + z^2 - b^2)^2 + 4b^2z^2]\}$

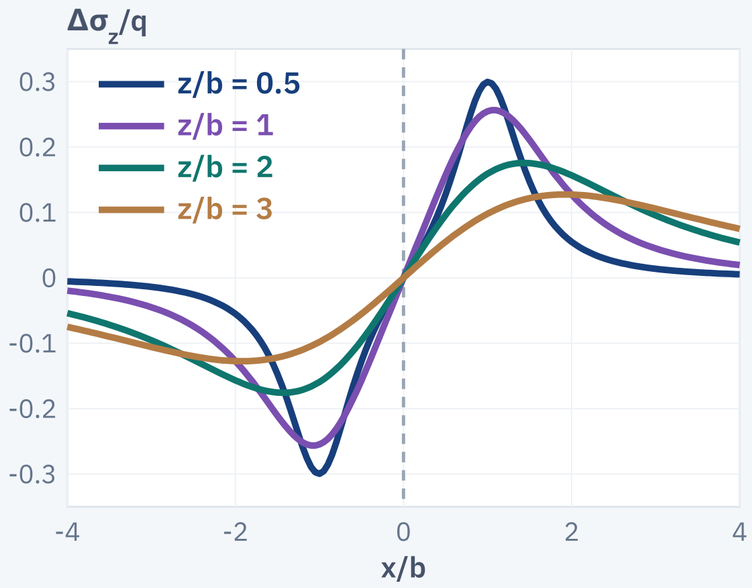
理论

两个分母的乘积为$(x^2 + z^2 - b^2)^2 + 4b^2z^2$；由此得到**水平条带的方程**（$b = B/2$）：

$$\Delta\sigma_z = \frac{4\,b\,q\,x\,z^2}{\pi\,[(x^2+z^2-b^2)^2+4b^2z^2]} \qquad \frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{4XZ^2}{\pi\,[(X^2+Z^2-1)^2+4Z^2]}$$

应力是x的**奇函数**：在+x和−x两点处大小相等、符号相反。荷载**前方**的土体被向下推，**后方**的土体被向上抬；在条形荷载轴线下各深度处均为零

令$X = x/b$，$Z = z/b$，**同一族曲线**对任意q和B均成立。数值验证（$q = 100$, $B = 4$, $x = 1$, $z = 1$）：水平线荷载沿条形宽度的积分为**12.7324 kPa**，方程给出**12.7324 kPa**



水平条形荷载的应力：荷载沿+x方向推

倾斜荷载 = 竖向分量 + 水平分量

理论

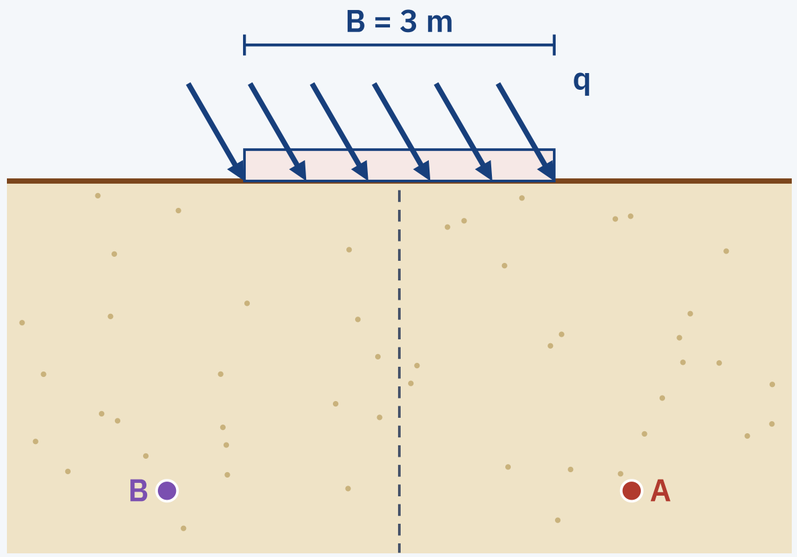
倾斜荷载是与竖直方向成**α**角作用的压力q（α朝+x方向为正；α = 90°时为完全水平，α = 0时为竖向条形荷载）

$$q_v = q\cos\alpha \qquad q_h = q\sin\alpha$$

竖向分量给出**竖向条带**的应力，水平分量给出**水平条带**的应力；两者叠加

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(v)} + \Delta\sigma_{z(h)} \qquad \Delta\sigma_{z(v)} = q_v\, I_v \qquad \Delta\sigma_{z(h)} = q_h\, I_h$$

I_v是x的偶函数，I_h是x的奇函数：在荷载前方的A点，水平分量**相加**，在荷载后方的B点则**相减**



q = 150 kN/m²，α = 30°，B = 3 m；点A在前，点B在后(x = ±2.25 m, z = 3 m)

水平条形荷载：$\Delta\sigma_z/q_h$值

理论

z/b \ x/b	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0
0.25	0.0000	0.0551	0.3134	0.0605	0.0165	0.0070	0.0037	0.0014
0.50	0.0000	0.1273	0.2996	0.1469	0.0551	0.0255	0.0138	0.0055
1.00	0.0000	0.1567	0.2546	0.2107	0.1273	0.0739	0.0449	0.0196
1.50	0.0000	0.1273	0.2037	0.2022	0.1567	0.1098	0.0753	0.0374
2.00	0.0000	0.0959	0.1592	0.1754	0.1567	0.1254	0.0955	0.0540
3.00	0.0000	0.0551	0.0979	0.1219	0.1273	0.1198	0.1058	0.0749
4.00	0.0000	0.0343	0.0637	0.0845	0.0959	0.0988	0.0955	0.0795

$\Delta\sigma_{z(h)} = q_h \cdot$（表列值），适用于$x > 0$；在$x < 0$的点处数值相同，符号相反。$x = 0$一列在各深度均为零；峰值随深度增加而减小，并远离条形荷载轴线。

叠加原理

由于土体为**弹性**，每个条形荷载的应力分别求得后叠加。每个条形荷载由各自的q、倾角α、宽度B和轴线定义；模块中最多可输入八个条形荷载

各条形荷载**不得重叠**（可在边缘相接）。每条荷载的应力按**其自身的x值**求得，即A点到该条形荷载中心线的距离；竖向分量和水平分量也可分别叠加

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \left(q_{v,k} I_{v,k} + q_{h,k} I_{h,k}\right) \qquad x_k = x_A - x_{c,k}$$

若某条形荷载的水平荷载沿−x方向(α < 0)，则q_h为负值：此时前方点变为条形荷载**−x**一侧的点

题目

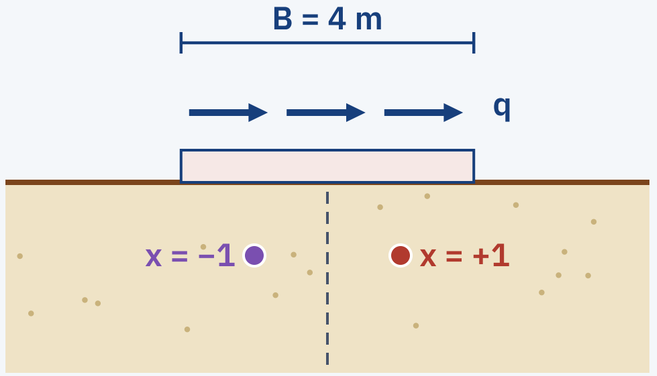
算例

已知条件

条形荷载	**柔性、水平（沿$+x$方向）：** $q = 100$ **kN/m²，** $B = 4$ **m (**$b = B/2 = 2$ **m)；轴线**$x = 0$
点	**在**$z = 1$ **m深度处，**$x = +1$ **m（荷载前方）和** $x = -1$ **m（荷载后方）**

求

$\Delta\sigma_z$和$\Delta\sigma_z/q$：按条形荷载的闭合方程求得；用**差值形式**验证。



解答 (1/2)

解答

1 分母中的量(b = B/2 = 2 m)

$$x^2 + z^2 - b^2 = 1 + 1 - 4 = -2$$

$$(x^2 + z^2 - b^2)^2 + 4b^2z^2 = 4 + 4(4)(1) = \mathbf{20}$$

2 影响值与应力

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{4b\,x\,z^2}{\pi\,[\ldots]} = \frac{4(2)(\pm1)(1)^2}{\pi\,(20)} = \pm\frac{8}{\pi\,(20)} = \pm\mathbf{0.1273}$$

$$\Delta\sigma_z = \pm0.1273\,(100) = \pm\mathbf{12.73}\ \text{kPa}$$

x = +1 m（荷载前方）：$\Delta\sigma_z$ = **+12.73 kPa**，土体被向下推压。**x = −1 m**（荷载后方）：**−12.73 kPa**，应力减小。轴线下方任意深度处$\Delta\sigma_z$ = 0。

解答 (2/2)

解答

3 差值形式，x = +1 m

$$\Delta\sigma_z = \frac{q\,z^2}{\pi}\left[\frac{1}{(x-b)^2+z^2} - \frac{1}{(x+b)^2+z^2}\right] = \frac{100}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right] = \frac{100}{\pi}(0.4) = \mathbf{12.73}\ \text{kPa}$$

4 差值形式，x = −1 m

$$\Delta\sigma_z = \frac{100}{\pi}\left[\frac{1}{(-1-2)^2+1} - \frac{1}{(-1+2)^2+1}\right] = \frac{100}{\pi}\left[\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\right] = -\mathbf{12.73}\ \text{kPa}$$

两种形式给出**相同的数值**：±12.73 kPa。模块(α = 90°)给出相同的数值；正负号仅取决于该点位于荷载前方还是后方。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

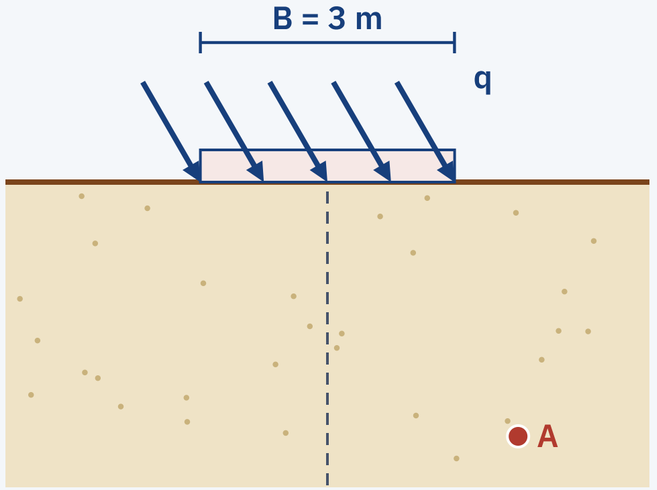
算例

已知条件

条形荷载	**柔性荷载，与竖向成$\alpha = 30^\circ$倾斜（朝$+x$方向）：$q = 150$ kN/m²，$B = 3$ m($b = 1.5$ m)；轴线$x = 0$**
A点	**荷载前方：$x = +2.25$ m，$z = 3$ m ($x/b = 1.5$; $z/b = 2$)**

求

$\Delta\sigma_{z(v)}$、$\Delta\sigma_{z(h)}$和总$\Delta\sigma_z$：通过将荷载分解为各分量求得。



解答 (1/3)

解答

1 荷载分量与无量纲距离

$$q_v = 150\cos 30^\circ = \mathbf{129.90}\ \text{kPa} \qquad q_h = 150\sin 30^\circ = \mathbf{75.00}\ \text{kPa}$$

$$\frac{x}{b} = \frac{2.25}{1.5} = 1.5 \qquad \frac{z}{b} = \frac{3}{1.5} = 2$$

2 竖向分量：反正切项与代数项(x − b = 0.75 m; x + b = 3.75 m)

$$A_1 = \tan^{-1}\frac{3}{0.75} = 1.3258 \qquad A_2 = \tan^{-1}\frac{3}{3.75} = 0.6747$$

$$T = \frac{3(3)\left(5.0625 - 9 - 2.25\right)}{(5.0625 + 9 - 2.25)^2 + 9(9)} = \frac{-55.6875}{220.535} = -0.2525$$

A点位于条形荷载**之外**(x = 2.25 m > b = 1.5 m)：两个反正切值直接取用，无需π修正。

解答 (2/3)

解答

3 竖向分力引起的应力

$$I_v = \frac{1}{\pi}\left[A_1 - A_2 - T\right] = \frac{1}{\pi}\left[1.3258 - 0.6747 - (-0.2525)\right] = \mathbf{0.2876}$$

$$\Delta\sigma_{z(v)} = 0.2876\,(129.90) = \mathbf{37.36}\ \text{kPa}$$

4 水平分量产生的应力(b = 1.5 m)

$$x^2 + z^2 - b^2 = 5.0625 + 9 - 2.25 = 11.8125 \qquad 4b\,x\,z^2 = 4(1.5)(2.25)(9) = 121.5$$

$$I_h = \frac{121.5}{\pi\left[(11.8125)^2 + 4(2.25)(9)\right]} = \frac{121.5}{\pi\,(220.535)} = \mathbf{0.1754}$$

$$\Delta\sigma_{z(h)} = 0.1754\,(75.00) = \mathbf{13.15}\ \text{kPa}$$

由于荷载倾斜30°，**竖向分量产生37.36 kPa**、**水平分量产生13.15 kPa**的应力；水平分量在A点处的影响为正值（位于荷载前方）。

解答 (3/3)

解答

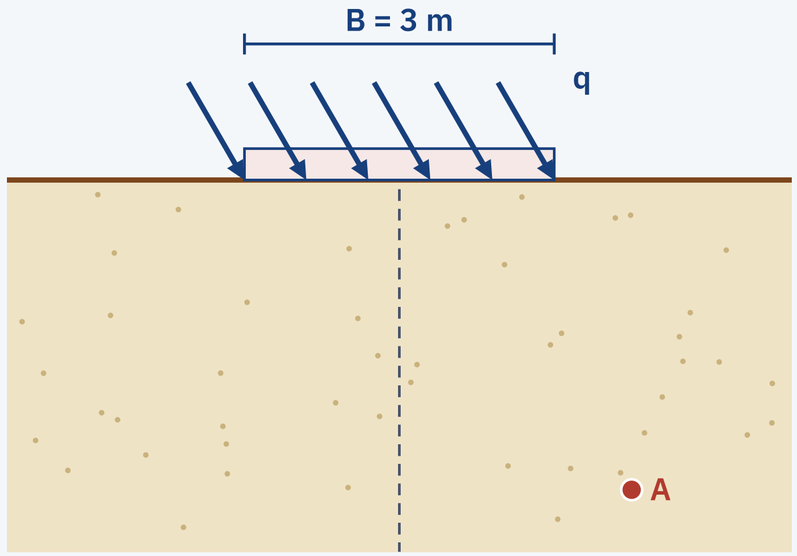
5 叠加原理

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(v)} + \Delta\sigma_{z(h)} = 37.36 + 13.15 = \mathbf{50.52}\ \text{kPa}$$

6 采用差分形式对水平分量进行验证

$$I_h = \frac{z^2}{\pi}\left[\frac{1}{(x-b)^2+z^2} - \frac{1}{(x+b)^2+z^2}\right]$$

$$= \frac{9}{\pi}\left[\frac{1}{9.5625} - \frac{1}{23.0625}\right] = \mathbf{0.1754}$$



$\Delta\sigma_z$ = 50.52 kPa；模块给出相同的数值（竖向37.36，水平13.15）。若竖向荷载为150 kPa (α = 0)，A点处将仅为43.14 kPa。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

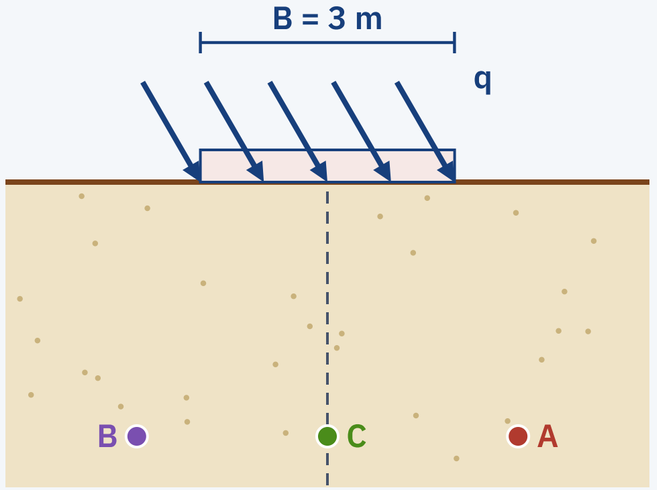
算例

已知条件

条形荷载	**算例2中的条形荷载：$q = 150$ kN/m²，$B = 3$ m，$\alpha = 30^\circ$**
点	**B：$x = -2.25$ m（荷载后方）；C：$x = 0$（轴线）；$z = 3$ m**
倾斜度	$\alpha = 0, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ **（在A和B处）**

求

利用对称性求B、C两点处的$\Delta\sigma_z$；α变化时A点和B点处应力的变化。



解答 (1/2)

解答

1 B点(x = −2.25 m)：竖向分量为双倍，水平分量为单倍

$$\Delta\sigma_{z(v)}(B) = \Delta\sigma_{z(v)}(A) = 37.36 \text{ kPa} \qquad \Delta\sigma_{z(h)}(B) = -\Delta\sigma_{z(h)}(A) = -13.15 \text{ kPa}$$

$$\Delta\sigma_z(B) = 37.36 + (-13.15) = \mathbf{24.21} \text{ kPa}$$

2 C点（轴线，x = 0）：水平分量为零；竖向分量按轴线下方的公式计算

$$I_v = \frac{2}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{b}{z} + \frac{bz}{b^2+z^2}\right] = \frac{2}{\pi}\left[0.4636 + 0.4000\right] = 0.5498$$

$$\Delta\sigma_z(C) = 0.5498\,(129.90) = \mathbf{71.42} \text{ kPa}$$

荷载**前方**(A)为50.52，**后方**(B)为24.21，**轴线下方**(C)为71.42 kPa：在同一深度，水平分量使A点增加13.15 kPa，使B点减少同样的数值。模块对A点和B点给出相同的数值。

解答 (2/2)

解答

α (°)	q_v	q_h	A: $\Delta\sigma_{z(v)}$	A: $\Delta\sigma_{z(h)}$	A: $\Delta\sigma_z$	B: $\Delta\sigma_z$
0	150.00	0.00	43.14	0.00	**43.14**	**43.14**
15	144.89	38.82	41.67	6.81	**48.48**	**34.86**
30	129.90	75.00	37.36	13.15	**50.52**	**24.21**
45	106.07	106.07	30.51	18.60	**49.11**	**11.91**
60	75.00	129.90	21.57	22.78	**44.35**	**−1.21**
75	38.82	144.89	11.17	25.41	**36.58**	**−14.24**
90	0.00	150.00	0.00	26.31	**26.31**	**−26.31**

随着倾斜度增大，竖向分量减小，水平分量增大。**A点处**合应力在α ≈ 30°附近最大(50.5 kPa)；α = 90°时仅剩水平分量(26.3 kPa)。**B点处**，应力在α = 60°时以-1.21 kPa**转为减小**，并在α = 90°时变为−26.3 kPa。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

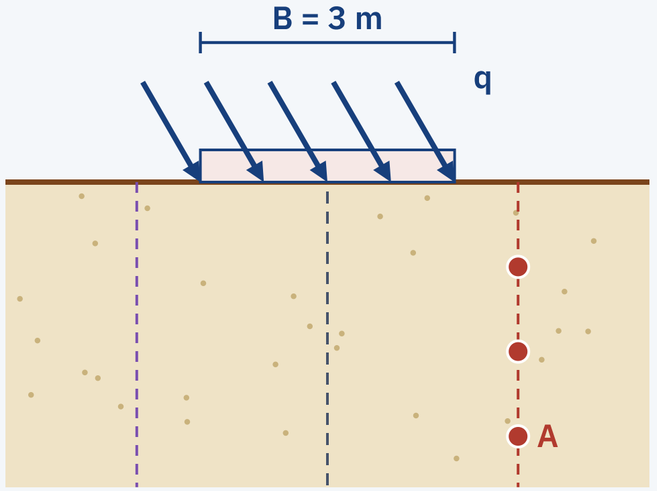
算例

已知条件

条形荷载	**算例2中的倾斜条形荷载：** $q = 150$ kN/m²，$\alpha = 30^\circ$，$B = 3$ m
直线	**A所在直线为** $x = +2.25$ m，**B所在直线为** $x = -2.25$ m
深度	$z = 0.5 \ldots 12$ m

求

$\Delta\sigma_{z(v)}$、$\Delta\sigma_{z(h)}$及其总和随深度的变化；水平分量**最大时所在的深度。**

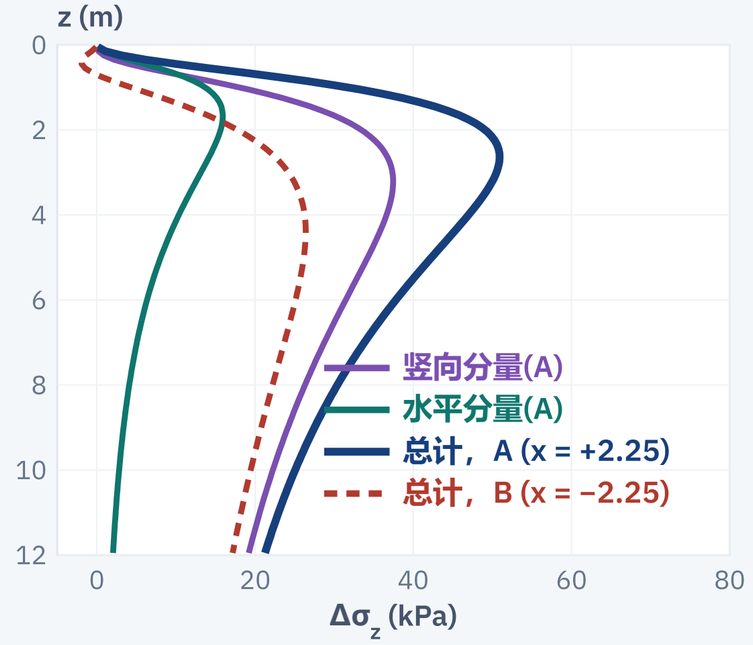


解答

解答

z (m)	z/b	A: $\Delta\sigma_{z(v)}$	A: $\Delta\sigma_{z(h)}$	A: $\Delta\sigma_z$	B: $\Delta\sigma_z$
0.5	0.33	5.17	6.93	**12.09**	**−1.76**
1.0	0.67	18.01	13.69	**31.71**	**4.32**
1.5	1.00	27.77	15.81	**43.57**	**11.96**
2.0	1.33	33.43	15.64	**49.08**	**17.79**
3.0	**2.00**	**37.36**	**13.15**	**50.52**	**24.21**
4.0	2.67	36.62	10.36	**46.98**	**26.26**
5.0	3.33	34.23	8.07	**42.30**	**26.16**
6.0	4.00	31.45	6.34	**37.79**	**25.11**
8.0	5.33	26.31	4.09	**30.40**	**22.22**
10.0	6.67	22.25	2.81	**25.06**	**19.44**
12.0	8.00	19.14	2.03	**21.17**	**17.11**

在A点之下，**竖向分量**在z ≈ 3.25 m处达到峰值(37.5 kPa)；**水平分量**在较浅的z ≈ 1.65 m处最大(15.9 kPa)，此后按1/z²的规律衰减。在B点之下，近地表处应力为负（z = 0.5 m时为-1.76 kPa）。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

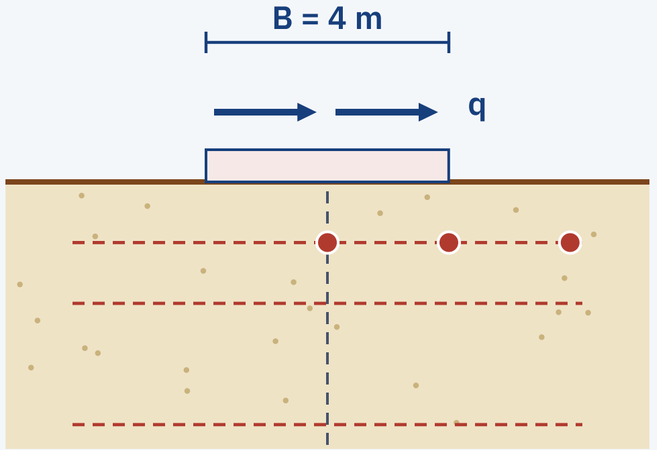
算例

已知条件

条形荷载	**水平：$q = 100$ kN/m²，$B = 4$ m ($b = 2$ m)，沿$+x$方向**
直线	**深度$z = 1,\ 2,\ 4,\ 6$ m处的水平直线；$x = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8$ m**
手算	**$z = 1$ m，$x = 2$ m（边缘）点**

求

各深度处$\Delta\sigma_z$沿x方向的变化；**峰值的位置**及其大小随深度的变化。



解答 (1/2)

解答

1 分母中的各量（b = 2 m）

$$x^2 + z^2 - b^2 = 4 + 1 - 4 = 1 \qquad (x^2 + z^2 - b^2)^2 + 4b^2z^2 = 1 + 16 = 17$$

$$4b\,x\,z^2 = 4(2)(2)(1) = 16$$

2 影响值与应力

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = \frac{16}{\pi\,(17)} = \mathbf{0.2996}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.2996\,(100) = \mathbf{29.96}\ \text{kPa}$$

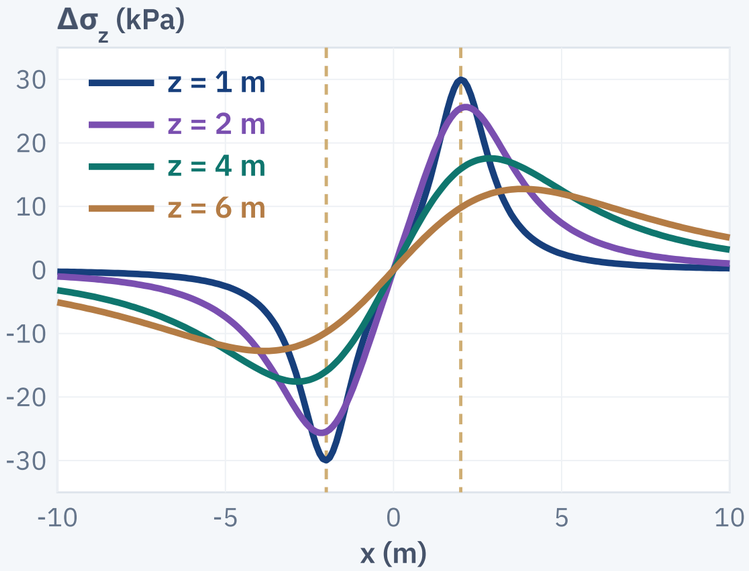
在条形荷载的前缘(x = b)、深度z = 1 m处，$\Delta\sigma_z$ = **29.96 kPa**：这与z = 1 m水平线上的**峰值**(x = 2.01 m, 29.96 kPa)非常接近。

解答 (2/2)

解答

z (m)	x = 1 m	x = 2 m	x = 3 m	x = 4 m	x = 6 m	x = 8 m	峰点：x (m)	峰值：$\Delta\sigma_z$
1	12.73	29.96	14.69	5.51	1.38	0.55	**2.01**	**29.96**
2	15.67	25.46	21.07	12.73	4.49	1.96	**2.15**	**25.65**
4	9.59	15.92	17.54	15.67	9.55	5.40	**2.87**	**17.57**
6	5.51	9.79	12.19	12.73	10.58	7.49	**3.84**	**12.75**

峰值靠近地表(z = 1 m)，为**30.0 kPa**，位于条形荷载边缘正下方；随着深度增加，峰值**减小**(z = 6 m处为12.7 kPa)，并**远离条形荷载**(x = 2.0 m → 3.8 m)。x = 0一列始终为零；在x < 0的各点，数值相同而符号相反（奇对称）。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

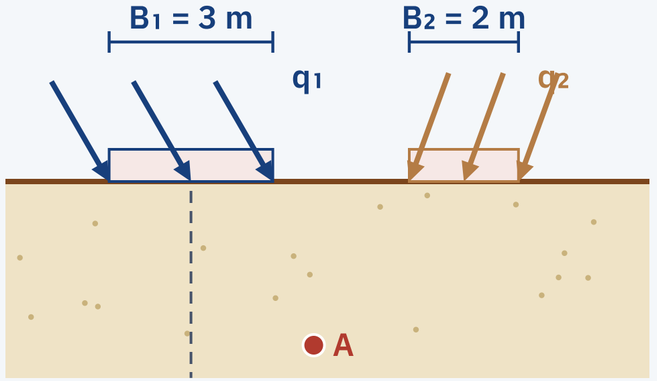
算例

已知条件

第1条带	$q_1 = 150$ kN/m²，$\alpha_1 = 30°(+x)$，$B_1 = 3$ m，$x_{c1} = 0$**(−1.5 … 1.5 m)——算例2中的条形荷载**
第2条带	$q_2 = 100$ kN/m²，$\alpha_2 = -20°$（$-x$**方向**），$B_2 = 2$ m，$x_{c2} = 5$ m (4 … 6 m)
A点	$x = 2.25$ m，$z = 3$ m**（两个条形荷载之间）**

求

第2条带的贡献（竖向、水平）及**总$\Delta\sigma_z$**；深度分布。



解答 (1/3)

解答

1 第2条带：$x_2 = 2.25 - 5 = -2.75$ m ($|x_2| = 2.75$ m)，$b = 1$ m；$\alpha_2 = -20°$

$$q_v = 100\cos 20^\circ = \mathbf{93.97}\ \text{kPa} \qquad q_h = 100\sin(-20^\circ) = -\mathbf{34.20}\ \text{kPa}$$

2 竖向分量（对称性：当$|x_2| = 2.75$ m时）

$$A_1 = \tan^{-1}\frac{3}{1.75} = 1.0427 \quad A_2 = \tan^{-1}\frac{3}{3.75} = 0.6747 \quad T = \frac{2(3)(-2.4375)}{(15.5625)^2 + 36} = -0.0526$$

$$\Delta\sigma_{z(v)} = \frac{93.97}{\pi}[A_1 - A_2 - T] = 0.1339\,(93.97) = \mathbf{12.58}\ \text{kPa}$$

解答 (2/3)

解答

3 水平分量：q_h为负，x_2为负 → $\Delta\sigma_{z(h)}$为正

$$I_h(|x|) = \frac{4b\,x\,z^2}{\pi\left[(x^2+z^2-b^2)^2+4b^2z^2\right]} = \frac{4(1)(2.75)(9)}{\pi\left[(15.5625)^2+36\right]} = \mathbf{0.1133}$$

$$\Delta\sigma_{z(h)} = (-34.20)\left(-0.1133\right) = \mathbf{3.87}\ \text{kPa}$$

4 叠加（第1条带：算例2）

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = (37.36+13.15)+(12.58+3.87)$$
$$= 50.52 + 16.45 = \mathbf{66.97}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 66.97 kPa（竖向分量为49.94，水平分量为17.03 kPa）。模块对两个条形荷载给出相同的值。

解答 (3/3)

解答

z (m)	第1条形荷载(kPa)	第2条形荷载(kPa)	合计(kPa)	第2条带的贡献
1	31.71	4.25	**35.96**	%12
2	49.08	12.18	**61.26**	%20
3	50.52	16.45	**66.97**	%25
4	46.98	17.48	**64.45**	%27
6	37.79	15.83	**53.62**	%30
8	30.40	13.38	**43.79**	%31
12	21.17	9.71	**30.89**	%31

在近地表土层中条形荷载1占主导；**z = 12 m**处，条形荷载2的份额升至总量的31%。两个条形荷载的水平分量在A点处方向相同（均指向A点），故相加：荷载相互推向对方。

在GeoTerva中验算解答 ↗

小结

要点回顾

水平条形荷载：$\Delta\sigma_z = 4bqxz^2 / \{\pi[(x^2 + z^2 - b^2)^2 + 4b^2z^2]\}$，$b = B/2$；等价形式为$(qz^2/\pi)[1/((x - b)^2 + z^2) - 1/((x + b)^2 + z^2)]$。为x的**奇函数**：前方为+，后方为−，轴线下方为0

倾斜条形荷载：$q_v = q\cos\alpha$, $q_h = q\sin\alpha$；$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(v)} + \Delta\sigma_{z(h)}$。竖向分量是x的偶函数，水平分量是x的奇函数

算例($q = 150$ kPa, $\alpha = 30°$, $B = 3$ m; $z = 3$ m)：A ($x = +2.25$)：37.36 + 13.15 = **50.52 kPa**；B ($x = -2.25$)：37.36 − 13.15 = **24.21 kPa**；水平条形荷载($q = 100$, $B = 4$; $x = \pm1$, $z = 1$)：**±12.73 kPa**

影响：随着α增大，A点处的总值在$\alpha \approx 30°$时最大，B点处的应力在$\alpha \geq 60°$时减小；对于水平条形荷载，峰值随深度增加而减小，并逐渐远离条形荷载

叠加：每个条形荷载取各自的x和α值；两个倾斜条形荷载的算例中50.52 + 16.45 = **66.97 kPa**

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

注

所有数值算例均由模块自身的计算引擎生成；模块给出相同的数值。模块打开时的初始输入为q = 150 kN/m²，α = 30°，B = 3 m，A点(x = +2.25 m, z = 3 m)；输入x = −2.25 m时得到B点，输入α = 90°时得到完全水平的条形荷载。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入自己的条形荷载（q、倾角、B、轴线）及A点；模块一并给出应力、等应力曲线、深度剖面、分步解答及报告。

打开模块→

理论页面 →

用手机打开

试用模块无需注册。