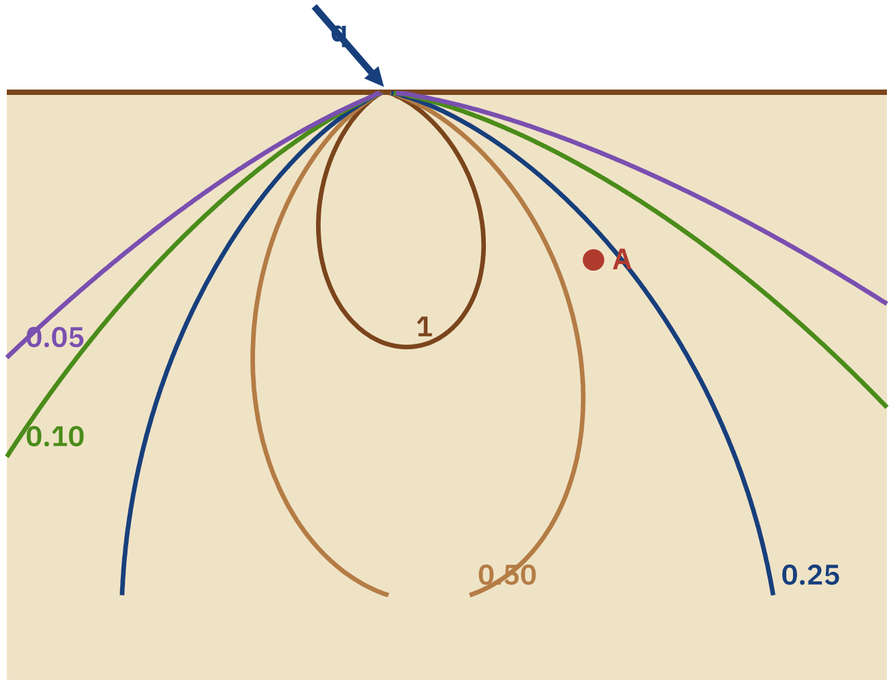
GeoTerva

岩土工程讲义 · 土中应力分布

水平线荷载下的应力

讲义：水平及倾斜线荷载在土中产生的竖向应力；初始算例连同其各分量从头至尾手算，深度方向和水平方向的分布以表格给出。

水平线荷载 | 倾斜荷载的分量 | 符号规定 | 叠加法 | 等应力线



引言

本讲内容

地表**水平**线荷载（墙底摩擦力、制动力、拱推力）引起的竖向应力：$\Delta\sigma_z = (2q/\pi)\, x\, z^2/(x^2 + z^2)^2$

符号规定：在荷载所推向的一侧($x > 0$)应力增大，在另一侧减小，荷载正下方为零；最大值出现在$x/z = 1/\sqrt{3}$处

将**倾斜**线荷载分解为各分量：$q_V = q\cos\alpha$，$q_H = q\sin\alpha$；两部分应力叠加

坡度、深度和侧向位置对应力的影响；多个荷载下的**叠加**

从头到尾手算模块的初始示例($q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$)；各分量的单独贡献列于表格中

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：公式及其依据

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

算例：$q = 10$ kN/m，与竖向夹角$\alpha = 20°$；A点：$x = 5$ m，$z = 4$ m。

水平与倾斜线荷载

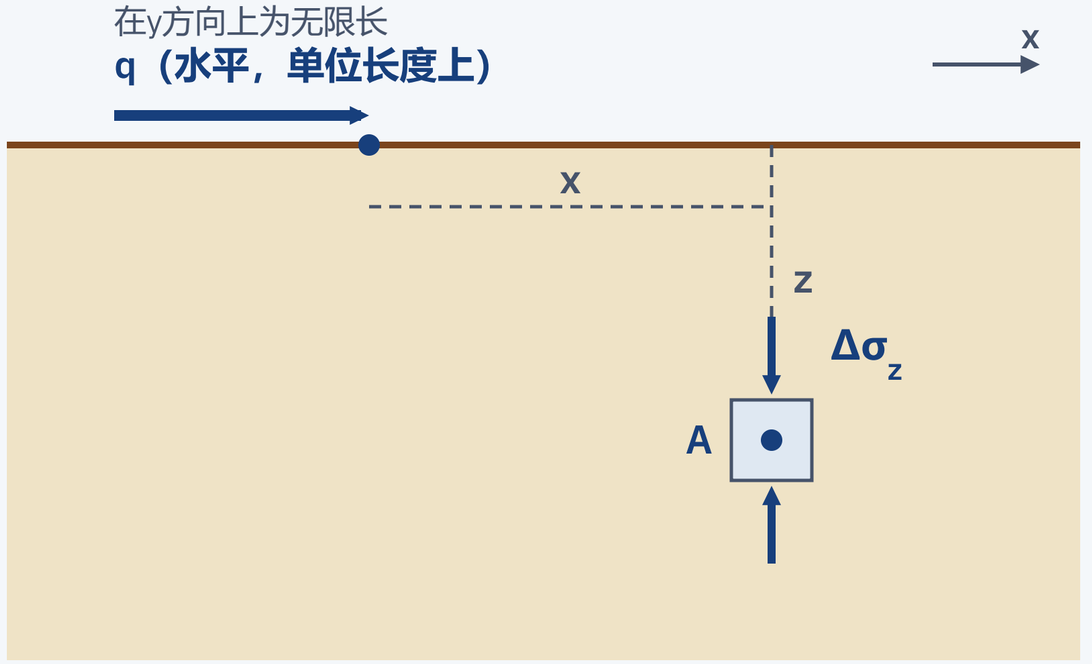
理论

线荷载除向下压向地表外，也可沿地表方向推移；墙底摩擦力、铁路制动力和拱推力即为其例。

模块计算水平线荷载作用下的竖向附加应力，以及通过两个分量叠加得到的倾斜线荷载作用下的竖向附加应力。

柔性线荷载在y方向上为无限长，q为单位长度上的荷载，每个横截面上均为平面应变状态。

土体为均质、各向同性的线弹性半无限体；$\Delta\sigma_z$仅为荷载引起的应力增量。



水平线荷载的$\Delta\sigma_z$值

理论

对于水平线荷载，弹性解给出A点的竖向附加应力为$\Delta\sigma_z = (2q/\pi) \times z^2/(x^2 + z^2)^2$。

应力的符号取决于x值：竖向应力在荷载推向的一侧(x > 0)增大，在另一侧减小，在荷载正下方(x = 0)为零。

无量纲形式为**$\Delta\sigma_z/(q/z) = (2/\pi)(x/z) / [(x/z)^2 + 1]^2$**；同一条曲线适用于任意q和任意z。

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi}\,\frac{x\,z^2}{(x^2+z^2)^2}$$

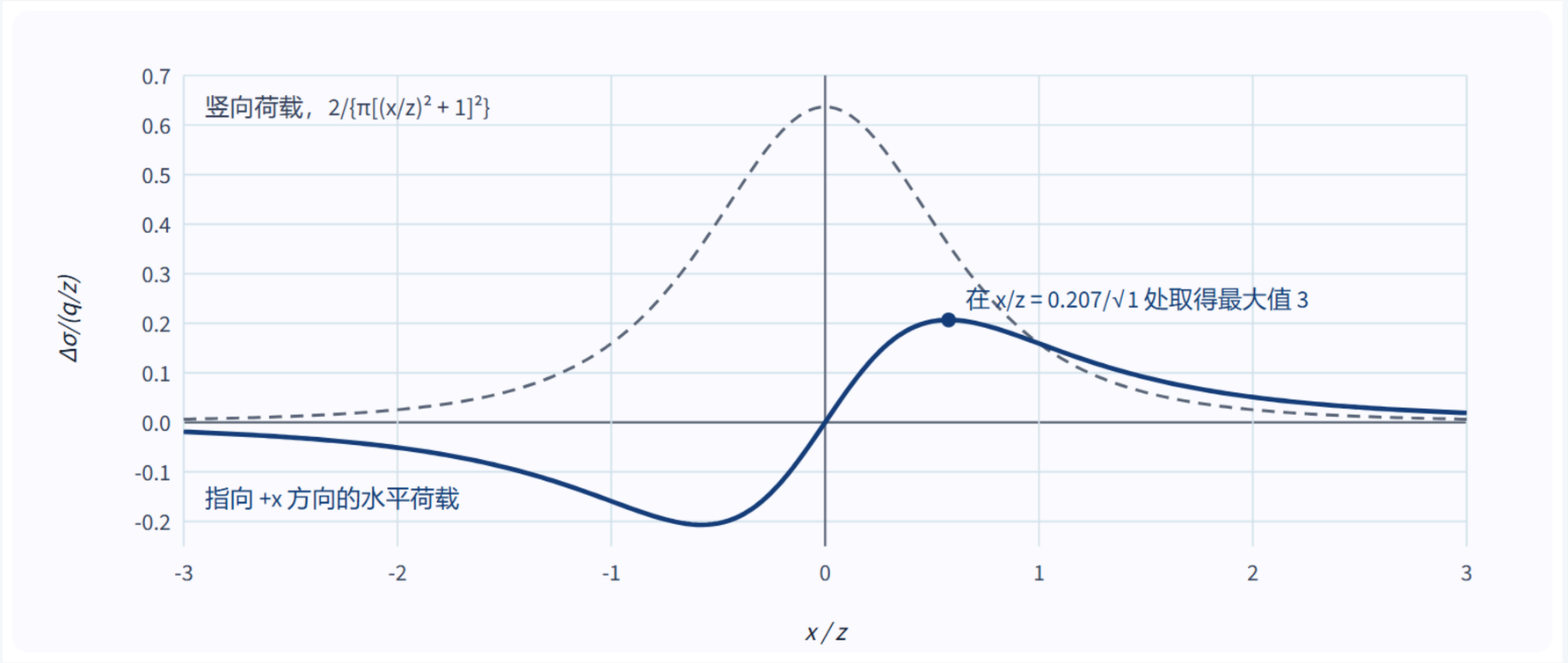
$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi}\,\frac{x/z}{\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

$\Delta\sigma_z/(q/z)$值（模块）

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.00	0.000	0.70	0.201
0.10	0.062	0.80	0.189
0.20	0.118	0.90	0.175
0.30	0.161	1.00	0.159
0.40	0.189	1.25	0.121
0.50	0.204	1.50	0.090
0.60	0.207	2.00	0.051

$\Delta\sigma_z/(q/z)$随x/z的变化

理论



水平线荷载下方 Δσz/(q/z) 随 x/z 的变化曲线（实线），以及同等大小竖向线荷载下方的变化曲线（虚线）。水平荷载指向 +x 方向。

分量与叠加

理论

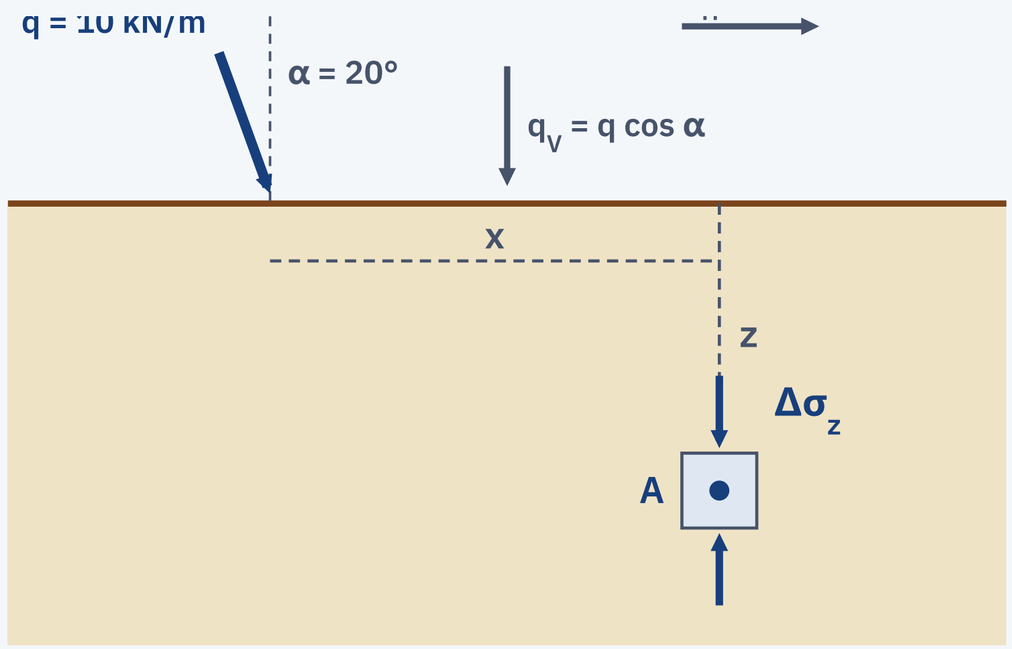
倾斜线荷载是与竖直方向成α角的线荷载q的各分量之和；由于土体是弹性的，各分量产生的应力可以叠加。

α = 90°对应完全水平的荷载，α = 0则对应竖向荷载。

各附加线荷载均由其自身的大小、倾角和位置确定，通过“添加线荷载”逐条输入（最多八条；任意两条不得位于同一位置）。

$$q_V = q\cos\alpha, \qquad q_H = q\sin\alpha$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_V\, z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} + \frac{2q_H}{\pi}\,\frac{x\, z^2}{(x^2+z^2)^2}$$



题目

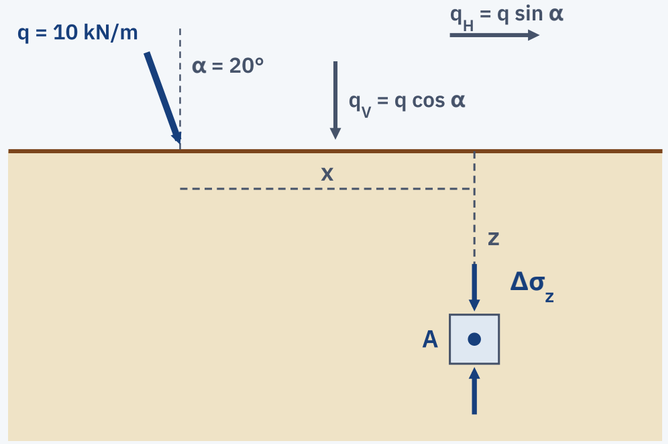
算例

已知条件

荷载	**线荷载$q = 10$ kN/m，与竖直方向夹角为$\alpha = 20^\circ$（水平分量沿$+x$方向），$x_L = 0$**
点A	$x = 5$ m, $z = 4$ m
土	**均质、弹性半无限介质；平面应变**

求

q_V、q_H；各分量的$\Delta\sigma_z$值及总$\Delta\sigma_z$。



解答 (1/2)

解答

1 倾斜荷载的分量（α = 20°）

$$q_V = q\cos\alpha = 10\cos 20^\circ = \mathbf{9.397}\ \text{kN/m}$$

$$q_H = q\sin\alpha = 10\sin 20^\circ = \mathbf{3.420}\ \text{kN/m}$$

2 竖向分量产生的应力(x = 5, z = 4)

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2q_V z^3}{\pi\left(x^2+z^2\right)^2} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{1{,}202.8}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.22776}\ \text{kPa}$$

仅竖向分量即给出**0.22776 kPa**；水平分量的贡献见下一页。

解答 (2/2)

解答

3 水平分量的应力（x = 5 m：荷载推向的一侧，符号为正）

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2q_H}{\pi}\,\frac{xz^2}{(x^2+z^2)^2} = \frac{2(3.420)(5)(4^2)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{547.23}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.10362}\ \text{kPa}$$

4 叠加原理

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(V)} + \Delta\sigma_{z(H)} = 0.22776 + 0.10362 = \mathbf{0.33138}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.33138 kPa（竖向0.22776+水平0.10362）。验算：x/z = 1.25时，$\Delta\sigma_{z(V)}/(q_V/z)$ = 0.0970，$\Delta\sigma_{z(H)}/(q_H/z)$ = 0.1212；乘积分别为0.22776和0.10362 kPa。模块给出相同的数值。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

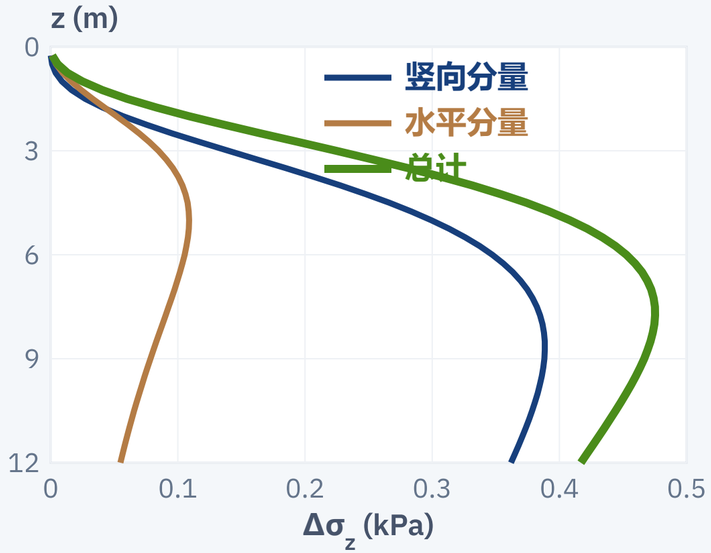
算例

已知条件

荷载	**算例1中的荷载：** $q = 10\ \text{kN/m}$，$\alpha = 20^\circ$，$x_L = 0$
点	$x_A = 5\ \text{m}$；$z = 1.2$；2.4；…；$12\ \text{m}$（**模块地层剖面中的各行**）

求

各深度处的$\Delta\sigma_{z(V)}$、$\Delta\sigma_{z(H)}$及其总和；z = 5 m时的详细解答；各分量取最大值的深度。



解答 (1/2)

解答

1 竖向分量(x = 5, z = 5: x² + z² = 50)

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(5^3)}{\pi(50)^2} = \frac{2{,}349.2}{7{,}854.0} = \mathbf{0.29911}\ \text{kPa}$$

2 水平分量

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(5)(5^2)}{\pi(50)^2} = \frac{855.05}{7{,}854.0} = \mathbf{0.10887}\ \text{kPa}$$

3 总计

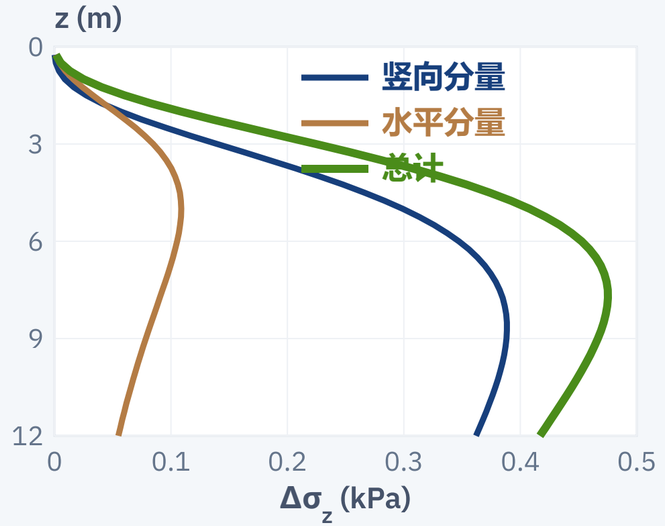
$$\Delta\sigma_z = 0.29911 + 0.10887 = \mathbf{0.40798}\ \text{kPa}$$

z = 5 m处$\Delta\sigma_z$ = 0.40798 kPa，大于z = 4 m处的值(0.33138 kPa)。表格见下一页。

解答 (2/2)

解答

z (m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$合计(kPa)
1.2	0.01479	0.02243	**0.03721**
2.4	0.08740	0.06628	**0.15368**
3.6	0.19370	0.09792	**0.29161**
4.8	0.28667	0.10869	**0.39536**
6.0	0.34726	0.10533	**0.45259**
7.2	0.37817	0.09559	**0.47376**
8.4	0.38829	0.08412	**0.47241**
9.6	0.38559	0.07309	**0.45868**
10.8	0.37563	0.06330	**0.43893**
12.0	0.36194	0.05489	**0.41683**



水平分量引起的应力在深度z = x = 5 m处最大($q_H/(2\pi x)$ = 0.10887 kPa)，随后减小；竖向分量在z = √3·x = 8.66 m处最大(0.3886 kPa)。合计应力在z ≈ 7.7 m处达到最大值0.4753 kPa。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

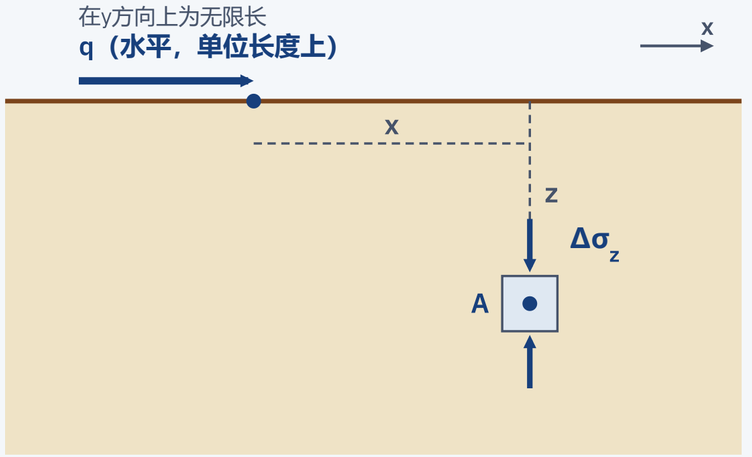
算例

已知条件

荷载	**水平线荷载**$q = 20$ **kN/m (**$\alpha = 90°$**)，沿**$+x$**方向，**$x_L = 0$
点	$z = 3$ **m;** $x = -6; -3; -1.73; 0; 1.73; 3;$ 6 **m (**$x/z = -2 \ldots 2$**)**

求

对每个点，求x/z、$\Delta\sigma_z/(q/z)$和$\Delta\sigma_z$；与同样大小的竖向荷载的比较；最大值。



解答 (1/2)

解答

1 x = 3 m (x/z = 1)：荷载推挤的一侧

$$\Delta\sigma_z/(q/z) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(1^2+1)^2} = \frac{1}{2\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915\,(20/3) = \mathbf{1.0610}\ \text{kPa} \qquad (x=-3\ \text{m}:\ -\mathbf{1.0610}\ \text{kPa})$$

2 最大值：x/z = 1/√3 = 0.5774 (x = 1.732 m)

$$\Delta\sigma_z/(q/z) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{0.5774}{(1/3+1)^2} = 0.20675$$

$$\Delta\sigma_z = 0.20675\,(20/3) = \mathbf{1.3783}\ \text{kPa}$$

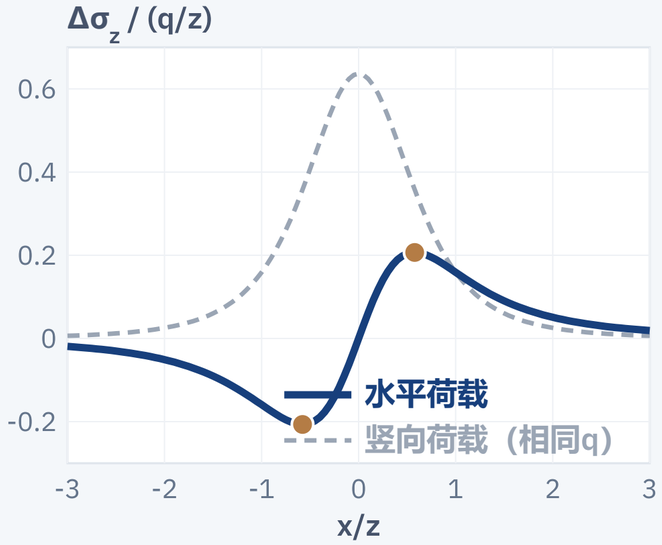
水平荷载正下方(x = 0)的应力**为零**；在荷载推向的一侧应力增大，在另一侧则以相同大小减小。最大值出现在x/z = 0.5774处，为0.2067·(q/z) = 1.378 kPa。

解答 (2/2)

解答

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	水平荷载$\Delta\sigma_z$ (kPa)	竖向荷载，q (kPa)相同
−6.00	−2.000	−0.0509	**−0.3395**	0.1698
−3.00	−1.000	−0.1592	**−1.0610**	1.0610
−1.73	−0.577	−0.2067	**−1.3783**	2.3873
0.00	0.000	0.0000	**0.0000**	4.2441
1.73	0.577	0.2067	**1.3783**	2.3873
3.00	1.000	0.1592	**1.0610**	1.0610
6.00	2.000	0.0509	**0.3395**	0.1698

对于水平荷载，曲线关于x = 0**反对称**（奇函数）；竖向荷载的曲线则为偶函数，在荷载下方最大(4.244 kPa)。在x/z = 1处，两种荷载给出的大小相同(1.061 kPa)。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

荷载	$q = 10$ kN/m，偏离竖直方向α；$x_L = 0$
点A	$x = 5$ m, $z = 4$ m
坡度	$\alpha = 0; 10; 20; 30; 45; 60; 90^\circ$

求

对每个倾角，给出q_V、q_H、$\Delta\sigma_{z(V)}$、$\Delta\sigma_{z(H)}$及其总和；α = 45°时的详细结果；总和最大时对应的倾角。

解答 (1/2)

解答

1 单位荷载作用下的系数(x = 5, z = 4)：各分量乘以各自的系数

$$a = \frac{2z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{128}{5{,}281.0} = 0.024238$$

$$b = \frac{2xz^2}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{160}{5{,}281.0} = 0.030297 \qquad \Delta\sigma_z = q\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha)$$

2 α = 45° ($q_V = q_H$ = 7,071 kN/m)

$$\Delta\sigma_z = 10\,(0.024238)(0.7071) + 10\,(0.030297)(0.7071)$$

$$= 0.17139 + 0.21423 = \mathbf{0.38562}\ \text{kPa}$$

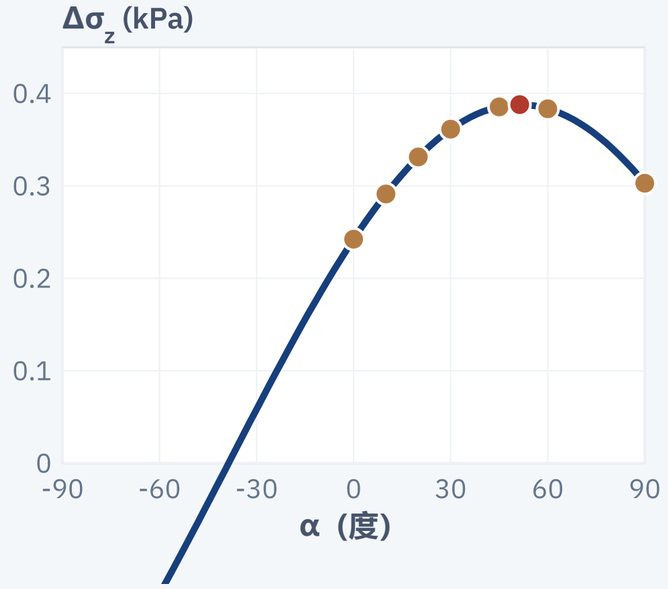
验算：由于x/z = 1.25，故b/a = 1.25；当tan α = b/a = x/z时，总值最大：α = 51.34°时，$\Delta\sigma_z = q\sqrt{(a^2 + b^2)}$ = **0.38799 kPa。**

解答 (2/2)

解答

α (°)	q_V (kN/m)	q_H (kN/m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$合计(kPa)
0	10.000	0.000	0.24238	0.00000	**0.24238**
10	9.848	1.736	0.23870	0.05261	**0.29131**
20	9.397	3.420	0.22776	0.10362	**0.33138**
30	8.660	5.000	0.20991	0.15149	**0.36139**
45	7.071	7.071	0.17139	0.21423	**0.38562**
60	5.000	8.660	0.12119	0.26238	**0.38357**
90	0.000	10.000	0.00000	0.30297	**0.30297**

竖向荷载(α = 0)产生0.24238 kPa；随着荷载向A点倾斜，水平分量开始起作用，总值增大：最大值在α ≈ 51.3°时为0.3880 kPa。完全水平荷载(α = 90°)时降至0.3030 kPa。负的α使水平分量背向A点，总值减小（见图）。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

荷载	**算例1中的荷载：** $q = 10$ **kN/m，** $\alpha = 20^\circ$ **（沿** $+x$ **方向推动），** $x_L = 0$
点	$z = 4$ **m;** $x = -10; -5; 0; 5; 10$ **m**

求

各点的$\Delta\sigma_{z(V)}$、$\Delta\sigma_{z(H)}$及总和；x = −5 m和x = 0处的详细计算；曲线的不对称性。

解答 (1/2)

解答

1 x = −5 m（荷载未推向的一侧）：竖向分量相同，水平分量为负

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi((-5)^2+4^2)^2} = 0.22776 \text{ kPa}$$

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(-5)(4^2)}{\pi(41)^2} = \mathbf{-0.10362} \text{ kPa}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.22776 + (-0.10362) = \mathbf{0.12414} \text{ kPa}$$

2 x = 0（荷载正下方）：水平分量为零

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2q_V}{\pi z} = \frac{2(9.397)}{\pi(4)} = \mathbf{1.49557} \text{ kPa}, \qquad \Delta\sigma_{z(H)} = 0$$

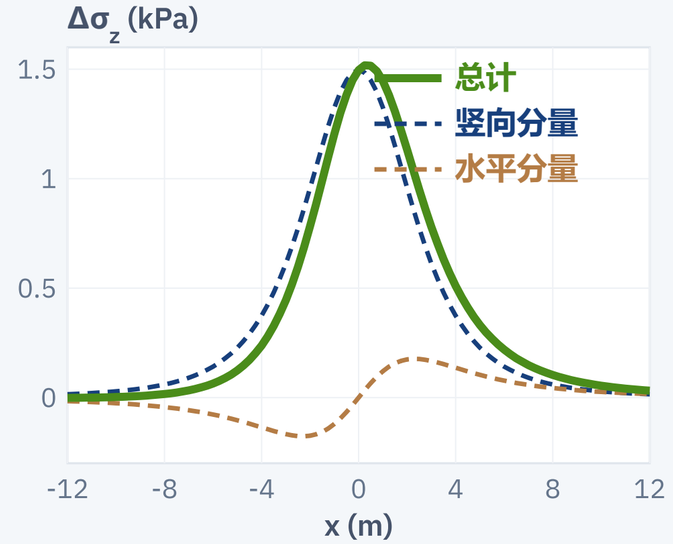
x = +5 m处为0.3314 kPa，x = −5 m处为0.1241 kPa：在相同距离处，荷载推向的一侧应力为另一侧的**2.67倍**。竖向分量是偶函数，水平分量是奇函数。

解答 (2/2)

解答

x (m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$合计(kPa)
−10	0.02845	−0.02589	**0.00256**
−5	0.22776	−0.10362	**0.12414**
0	1.49557	0.00000	**1.49557**
5	0.22776	0.10362	**0.33138**
10	0.02845	0.02589	**0.05434**

总曲线在荷载正下方(x = 0)最大(1.4956 kPa)，并在荷载推向的一侧衰减较慢：x = 10 m处为0.05434，x = −10 m处仅为0.00256 kPa。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

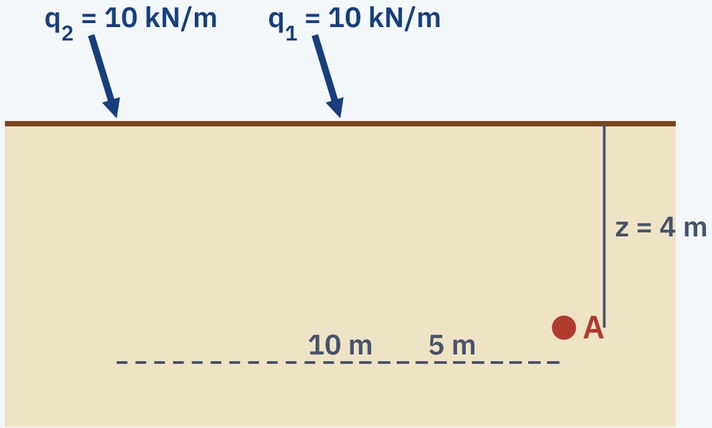
算例

已知条件

荷载	**荷载1：** $q_1 = 10$ **kN/m，** $\alpha_1 = 20^\circ$**，** $x_{L1} = 0$**；荷载2：** $q_2 = 10$ **kN/m，** $\alpha_2 = 20^\circ$**，** $x_{L2} = -5$ **m**
点A	$x_A = 5$ **m；** $z = 4$ **m（随后2；6；8；12 m）**

求

荷载2的贡献（竖向和水平），两个荷载之和；沿深度分布。



解答 (1/2)

解答

1 荷载2(x = 5 − (−5) = 10 m)：相同的分量，$q_V = 9.397$，$q_H = 3.420$ kN/m

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}202.8}{42{,}273.3} = 0.02845$$

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(10)(4^2)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}094.5}{42{,}273.3} = 0.02589 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = \mathbf{0.05434}\ \text{kPa}$$

2 合计：荷载1的贡献即算例1中的数值

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.33138 + 0.05434 = \mathbf{0.38573}\ \text{kPa}$$

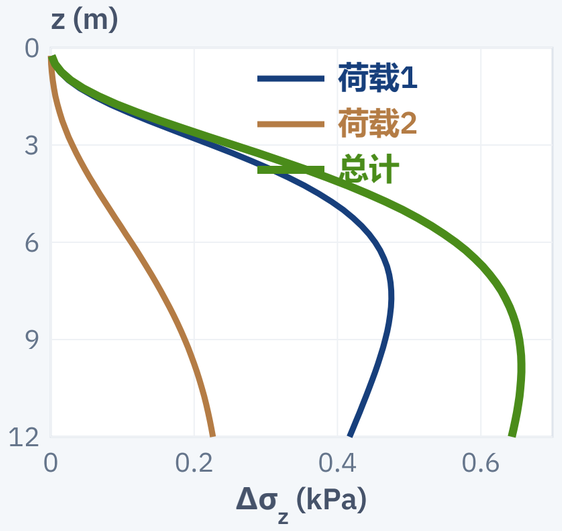
$\Delta\sigma_z$ = 0.38573 kPa（竖向分量为0.25621，水平分量为0.12951）。荷载2仅增加0.05434 kPa：其距离达10 m。

解答 (2/2)

解答

z (m)	荷载1：V + H	荷载2：V + H	$\Delta\sigma_z$合计(kPa)
2	0.0569 + 0.0518 = 0.1087	0.0044 + 0.0081 = 0.0125	**0.1212**
4	0.2278 + 0.1036 = 0.3314	0.0285 + 0.0259 = 0.0543	**0.3857**
6	0.3473 + 0.1053 = 0.4526	0.0699 + 0.0424 = 0.1122	**0.5648**
8	0.3867 + 0.0880 = 0.4746	0.1139 + 0.0518 = 0.1657	**0.6403**
12	0.3619 + 0.0549 = 0.4168	0.1736 + 0.0527 = 0.2263	**0.6431**

在每个深度处，荷载的竖向分量和水平分量分别累加，结果为两个荷载之和。总和在z = 8 m处为0.6403 kPa，在z = 12 m处为0.6431 kPa；荷载2所占的份额随深度增大。



在GeoTerva中验算解答 ↗

小结

要点回顾

水平荷载：$\Delta\sigma_z = (2q/\pi)\, x\, z^2/(x^2 + z^2)^2$；在荷载推向的一侧($x > 0$)增大，在另一侧减小，在荷载正下方为零；最大值出现在$x/z = 1/\sqrt{3}$处，为$0.2067\cdot(q/z)$

倾斜荷载：$q_V = q\cos\alpha$，$q_H = q\sin\alpha$；$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(V)} + \Delta\sigma_{z(H)}$（弹性土体中各分量引起的应力可以叠加）

算例($q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$; A: $x = 5$, $z = 4$ m)：$q_V = 9.397$，$q_H = 3.420$ kN/m；$\Delta\sigma_{z(V)} = 0.22776$ + $\Delta\sigma_{z(H)} = 0.10362$ = **0.33138 kPa**

倾角与深度：合计值在$\tan\alpha = x/z$（$\alpha = 51.3°$）时最大；水平分量在$z = x$处达到峰值，竖向分量在$z = \sqrt{3}\cdot x$处达到峰值

两侧：$x = +5$ m处为0.3314，$x = -5$ m处为0.1241 kPa；**两个荷载**的各分量分别求和（算例中为0.3857 kPa）

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

注

所有数值算例均由模块自身的计算引擎生成，模块给出相同的数值。模块打开时即载入q = 10 kN/m、α = 20°的荷载及A点(x = 5 m, z = 4 m)。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入自己的水平或倾斜线荷载及其倾角、位置和计算点；模块同时给出竖向与水平分量的贡献、总$\Delta\sigma_z$值、深度分布曲线、应力等值线、分步解答和报告。

打开模块→　**理论页面 →**

用手机打开
试用模块无需注册。

如需在课堂教学中使用：info@geoterva.com