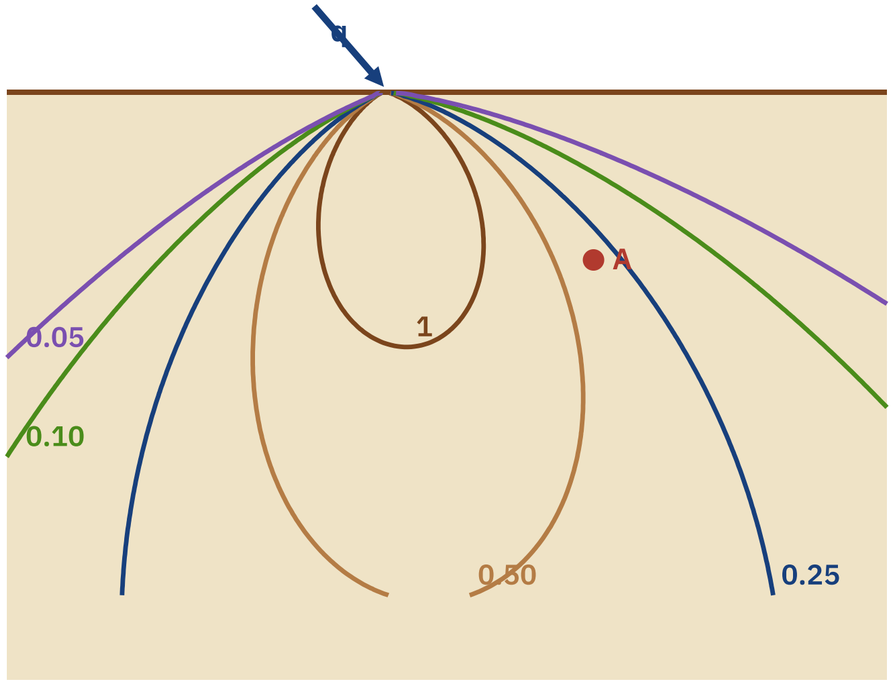
Apresentação de aula de geotecnia · Distribuição de tensões no solo

Tensão sob uma carga linear horizontal

Aula: tensão vertical no solo causada por cargas lineares horizontais e inclinadas; o exemplo inicial resolvido manualmente de ponta a ponta, com suas componentes, e perfis em profundidade e laterais apresentados em tabelas.

- Carga linear horizontal
- Componentes da carga inclinada
- Convenção de sinais
- Superposição
- Curvas de isotensão



Introdução

O que veremos nesta aula?

A tensão vertical devida a uma carga linear **horizontal** na superfície (atrito na base de um muro, força de frenagem, empuxo de arco): $\Delta\sigma_z = (2q/\pi)\, x\, z^2/(x^2 + z^2)^2$

Convenção de sinais: do lado para o qual a carga empurra ($x > 0$) a tensão aumenta, do outro lado diminui, e sob a carga é zero; o valor máximo ocorre em $x/z = 1/\sqrt{3}$

A **decomposição** de uma carga linear inclinada em suas componentes: $q_V = q \cos\alpha$, $q_H = q \sin\alpha$; superposição das duas tensões

Efeito da inclinação, da profundidade e da posição lateral sobre a tensão; **superposição** para várias cargas

O exemplo inicial do módulo ($q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$) **de ponta a ponta, à mão**; a contribuição individual de cada componente nas tabelas

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: fórmula e justificativa

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Exemplo: $q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$ em relação à vertical; ponto A: $x = 5$ m, $z = 4$ m.

Cargas lineares horizontais e inclinadas

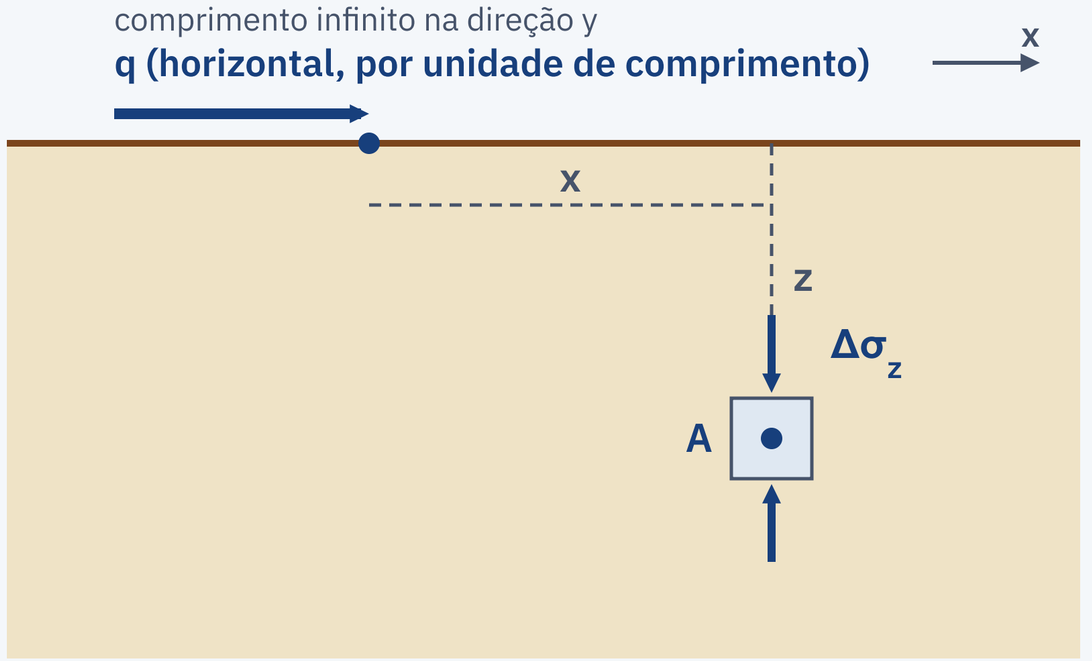
TEORIA

Uma carga linear pode também empurrar ao longo da superfície, em vez de comprimi-la para baixo; o atrito na base de um muro, a força de frenagem ferroviária e o empuxo de um arco são exemplos.

O módulo calcula o acréscimo de tensão vertical sob uma carga linear horizontal e, pela soma de duas componentes, sob uma carga linear inclinada.

A carga linear flexível tem comprimento infinito na direção y, q é a carga por unidade de comprimento e vale o estado plano de deformação em cada seção transversal.

O solo é um meio semi-infinito homogêneo, isotrópico e linearmente elástico; $\Delta\sigma_z$ é apenas o acréscimo de tensão produzido pela carga.



$\Delta\sigma_z$ de uma carga linear horizontal

TEORIA

Para uma carga linear horizontal, a solução elástica fornece o acréscimo de tensão vertical no ponto A na forma $\Delta\sigma_z = (2q/\pi)\ x\ z^2/(x^2 + z^2)^2$.

O sinal da tensão depende do valor de x: a tensão vertical aumenta no lado para o qual a carga empurra (x > 0), diminui no outro lado e é nula exatamente sob a carga (x = 0).

Na forma adimensional, tem-se **$\Delta\sigma_z/(q/z) = (2/\pi)(x/z) / [(x/z)^2 + 1]^2$**; uma única curva serve para qualquer q e qualquer z.

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi}\,\frac{x\,z^2}{(x^2+z^2)^2}$$

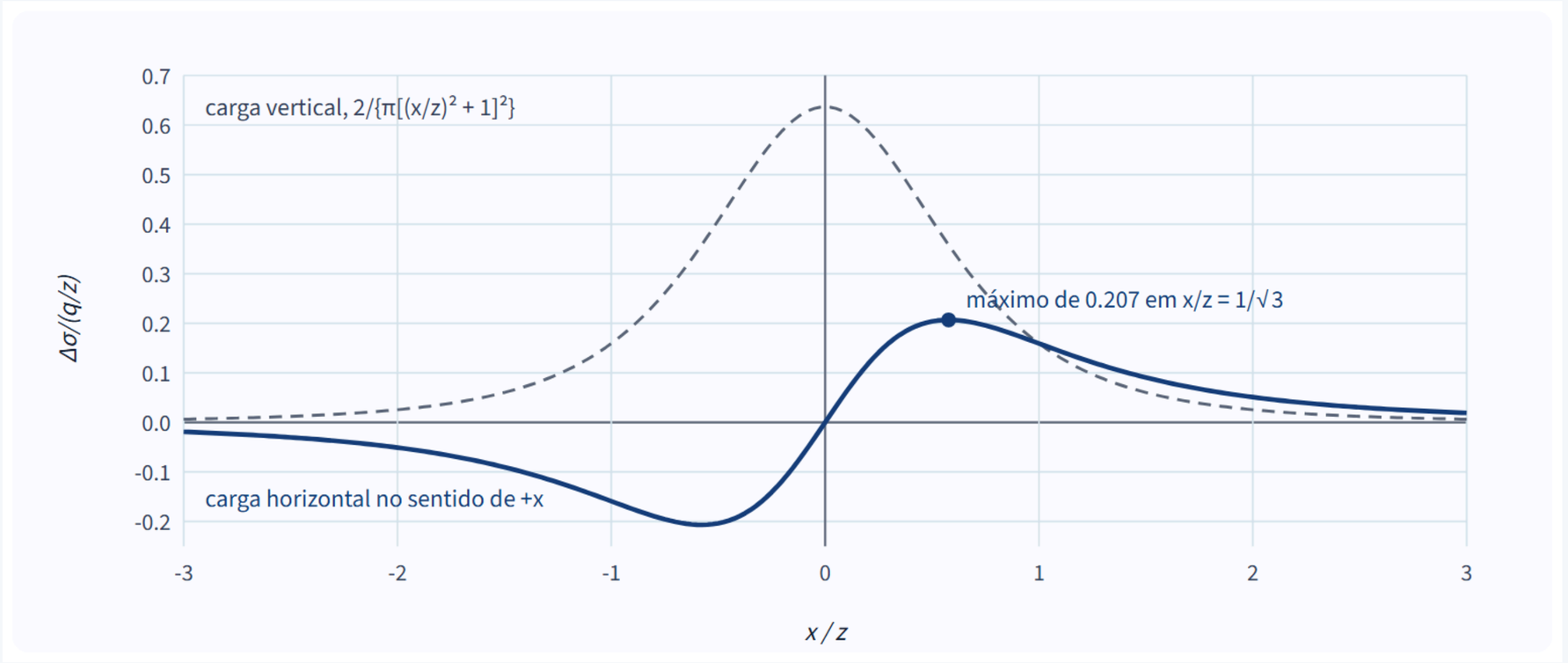
$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi}\,\frac{x/z}{\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

VALORES DE $\Delta\sigma_z/(q/z)$ (MÓDULO)

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.00	0.000	0.70	0.201
0.10	0.062	0.80	0.189
0.20	0.118	0.90	0.175
0.30	0.161	1.00	0.159
0.40	0.189	1.25	0.121
0.50	0.204	1.50	0.090
0.60	0.207	2.00	0.051

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ em função de x/z

TEORIA



Δσz/(q/z) em função de x/z sob uma carga linear horizontal (linha contínua) e, tracejada, sob uma carga vertical de mesma intensidade. A carga horizontal atua no sentido de +x.

Componentes e superposição

TEORIA

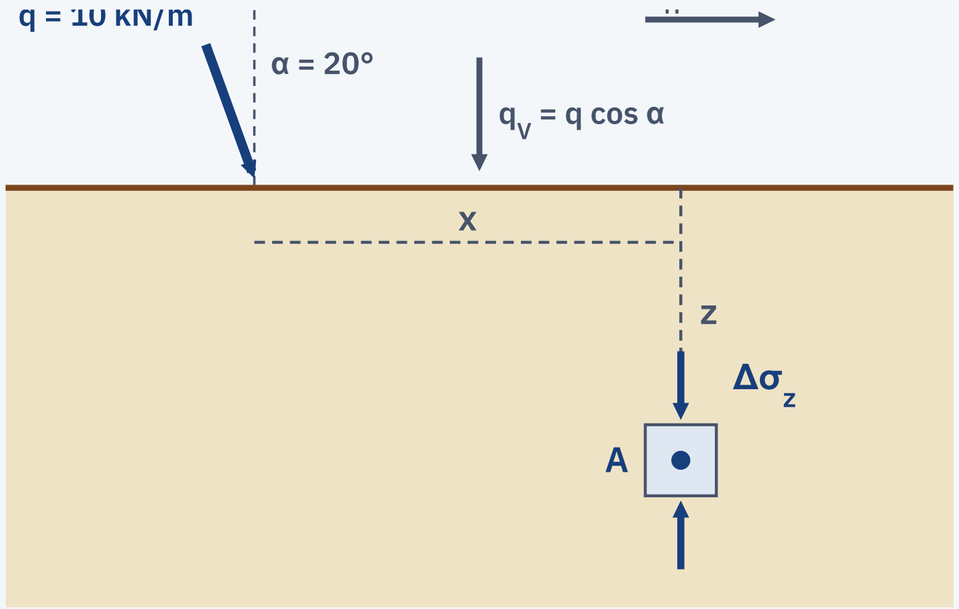
Uma carga linear inclinada é a soma das componentes de uma carga linear q inclinada de um ângulo α em relação à vertical e, como o solo é elástico, as tensões das componentes se somam.

α = 90° resulta em carga totalmente horizontal, e α = 0, em carga vertical.

As cargas lineares adicionais, cada uma definida por sua própria intensidade, inclinação e posição, são inseridas uma a uma por meio de Adicionar carga linear (no máximo oito; duas não podem ocupar a mesma posição).

$$q_V = q\cos\alpha, \qquad q_H = q\sin\alpha$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_V\, z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} + \frac{2q_H}{\pi}\,\frac{x\, z^2}{(x^2+z^2)^2}$$



Enunciado

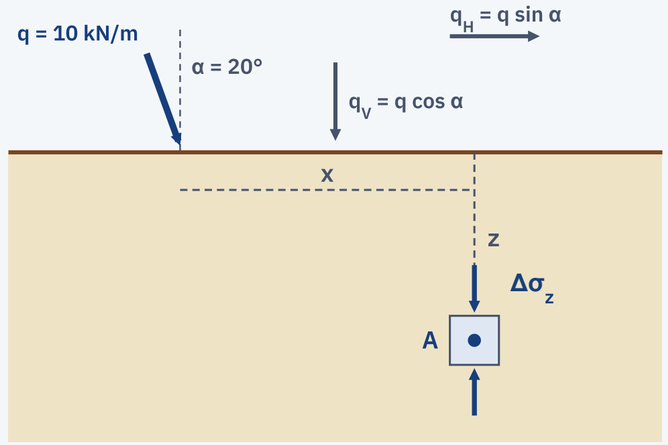
EXEMPLO

Dados

Carga	**carga linear $q = 10$ kN/m, inclinada de $\alpha = 20°$ em relação à vertical (componente horizontal na direção $+x$), $x_L = 0$**
Ponto A	$x = 5$ **m,** $z = 4$ **m**
Solo	**meio semi-infinito homogêneo e elástico; estado plano de deformação**

PEDE-SE

q_V, **q_H**; o valor de **$\Delta\sigma_z$** de cada componente e o **$\Delta\sigma_z$** total.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Componentes da carga inclinada (α = 20°)

$$q_V = q\cos\alpha = 10\cos 20^\circ = \mathbf{9.397}\ \mathrm{kN/m}$$

$$q_H = q\sin\alpha = 10\sin 20^\circ = \mathbf{3.420}\ \mathrm{kN/m}$$

2 Tensão devida à componente vertical (x = 5, z = 4)

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2q_V z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{1{,}202.8}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.22776}\ \mathrm{kPa}$$

A componente vertical, isoladamente, fornece **0.22776 kPa**; a contribuição da componente horizontal está na página seguinte.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Tensão da componente horizontal (x = 5 m: lado empurrado pela carga, sinal positivo)

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2q_H}{\pi}\,\frac{xz^2}{(x^2+z^2)^2} = \frac{2(3.420)(5)(4^2)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{547.23}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.10362}\ \text{kPa}$$

4 Superposição

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(V)} + \Delta\sigma_{z(H)} = 0.22776 + 0.10362 = \mathbf{0.33138}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.33138 kPa (vertical 0.22776 + horizontal 0.10362). Verificação: para x/z = 1.25, $\Delta\sigma_{z(V)}/(q_V/z)$ = 0.0970, $\Delta\sigma_{z(H)}/(q_H/z)$ = 0.1212; os produtos são 0.22776 e 0.10362 kPa. O módulo fornece o mesmo valor.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

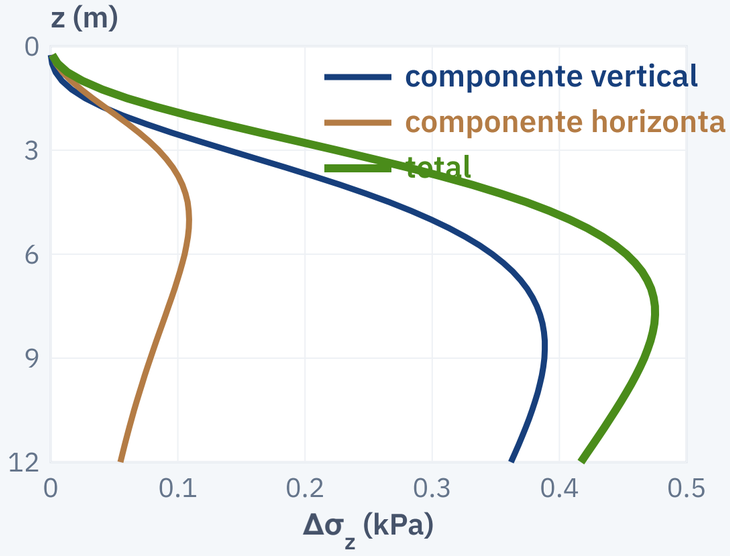
EXEMPLO

Dados

Carga	**A carga do Exemplo 1: $q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$, $x_L = 0$**
Pontos	**$x_A = 5$ m; $z = 1.2; 2.4;$ ...; 12 m (linhas do perfil do módulo)**

PEDE-SE

Para cada profundidade, **$\Delta\sigma_{z(V)}$**, **$\Delta\sigma_{z(H)}$** e o total; solução detalhada para z = 5 m; as profundidades em que as componentes são máximas.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Componente vertical (x = 5, z = 5: $x^2 + z^2 = 50$)

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(5^3)}{\pi(50)^2} = \frac{2{,}349.2}{7{,}854.0} = \mathbf{0.29911}\ \text{kPa}$$

2 Componente horizontal

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(5)(5^2)}{\pi(50)^2} = \frac{855.05}{7{,}854.0} = \mathbf{0.10887}\ \text{kPa}$$

3 Total

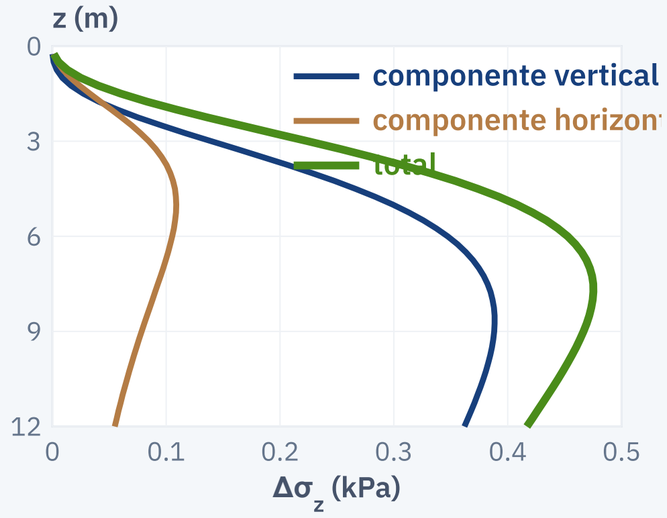
$$\Delta\sigma_z = 0.29911 + 0.10887 = \mathbf{0.40798}\ \text{kPa}$$

Em z = 5 m, $\Delta\sigma_z$ = 0.40798 kPa; é maior que o valor em z = 4 m (0.33138 kPa). A tabela está na página seguinte.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

z (m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
1.2	0.01479	0.02243	**0.03721**
2.4	0.08740	0.06628	**0.15368**
3.6	0.19370	0.09792	**0.29161**
4.8	0.28667	0.10869	**0.39536**
6.0	0.34726	0.10533	**0.45259**
7.2	0.37817	0.09559	**0.47376**
8.4	0.38829	0.08412	**0.47241**
9.6	0.38559	0.07309	**0.45868**
10.8	0.37563	0.06330	**0.43893**
12.0	0.36194	0.05489	**0.41683**



A tensão da componente horizontal é máxima na profundidade z = x = 5 m ($q_H/(2\pi x)$ = 0.10887 kPa) e depois diminui; a componente vertical é máxima em z = $\sqrt{3}\cdot x$ = 8.66 m (0.3886 kPa). O total é máximo, 0.4753 kPa, em z ≈ 7.7 m.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

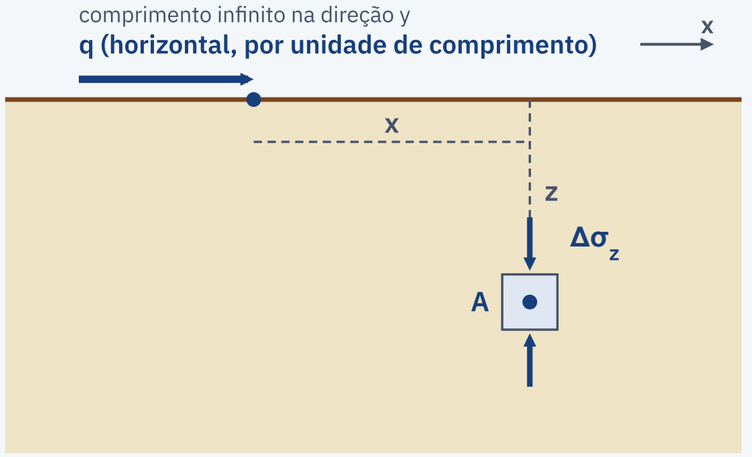
EXEMPLO

Dados

Carga	**carga linear horizontal $q = 20$ kN/m ($\alpha = 90°$), na direção $+x$, $x_L = 0$**
Pontos	$z = 3$ m; $x = -6; -3; -1.73; 0; 1.73; 3; 6$ m ($x/z = -2 \ldots 2$)

PEDE-SE

Para cada ponto, **x/z**, **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** e **$\Delta\sigma_z$**; comparação com uma carga vertical de mesma intensidade; valor máximo.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 x = 3 m (x/z = 1): lado para o qual a carga empurra

$$\Delta\sigma_z/(q/z) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(1^2+1)^2} = \frac{1}{2\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915\,(20/3) = \mathbf{1.0610}\ \mathrm{kPa} \qquad (x = -3\ \mathrm{m}:\ -\mathbf{1.0610}\ \mathrm{kPa})$$

2 Valor máximo: x/z = 1/√3 = 0.5774 (x = 1.732 m)

$$\Delta\sigma_z/(q/z) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{0.5774}{(1/3+1)^2} = 0.20675$$

$$\Delta\sigma_z = 0.20675\,(20/3) = \mathbf{1.3783}\ \mathrm{kPa}$$

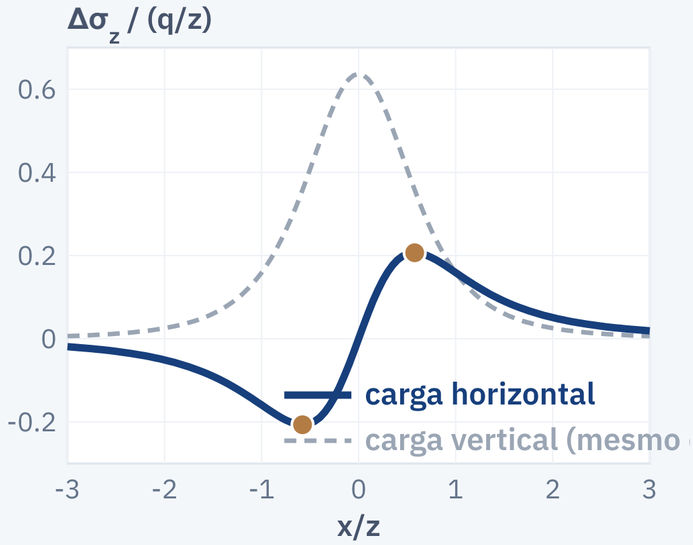
Sob uma carga horizontal (x = 0), a tensão é **nula**; aumenta do lado para onde a carga empurra e diminui, na mesma intensidade, do lado oposto. O valor máximo é 0.2067·(q/z) = 1.378 kPa em x/z = 0.5774.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	Carga horizontal $\Delta\sigma_z$ (kPa)	Carga vertical, mesmo q (kPa)
−6.00	−2.000	−0.0509	**−0.3395**	0.1698
−3.00	−1.000	−0.1592	**−1.0610**	1.0610
−1.73	−0.577	−0.2067	**−1.3783**	2.3873
0.00	0.000	0.0000	**0.0000**	4.2441
1.73	0.577	0.2067	**1.3783**	2.3873
3.00	1.000	0.1592	**1.0610**	1.0610
6.00	2.000	0.0509	**0.3395**	0.1698

Para carga horizontal, a curva é **antissimétrica** em relação a x = 0 (função ímpar); a curva da carga vertical, por sua vez, é par e é máxima sob a carga (4.244 kPa). Em x/z = 1, as duas cargas fornecem a mesma magnitude (1.061 kPa).



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Carga	$q = 10$ **kN/m, inclinada** α **em relação à vertical;** $x_L = 0$
Ponto A	$x = 5$ **m,** $z = 4$ **m**
Inclinações	$\alpha = 0; 10; 20; 30; 45; 60; 90^\circ$

PEDE-SE

Para cada inclinação, $\mathbf{q_V}$, $\mathbf{q_H}$, $\mathbf{\Delta\sigma_{z(V)}}$, $\mathbf{\Delta\sigma_{z(H)}}$ e o total; detalhamento para α = 45°; a inclinação em que o total é máximo.

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Coeficientes para carga unitária (x = 5, z = 4): cada componente é multiplicada pelo respectivo coeficiente

$$a = \frac{2z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{128}{5{,}281.0} = 0.024238$$

$$b = \frac{2xz^2}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{160}{5{,}281.0} = 0.030297 \qquad \Delta\sigma_z = q\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha)$$

2 α = 45° ($q_V = q_H$ = 7,071 kN/m)

$$\Delta\sigma_z = 10\,(0.024238)(0.7071) + 10\,(0.030297)(0.7071)$$
$$= 0.17139 + 0.21423 = \mathbf{0.38562}\ \mathrm{kPa}$$

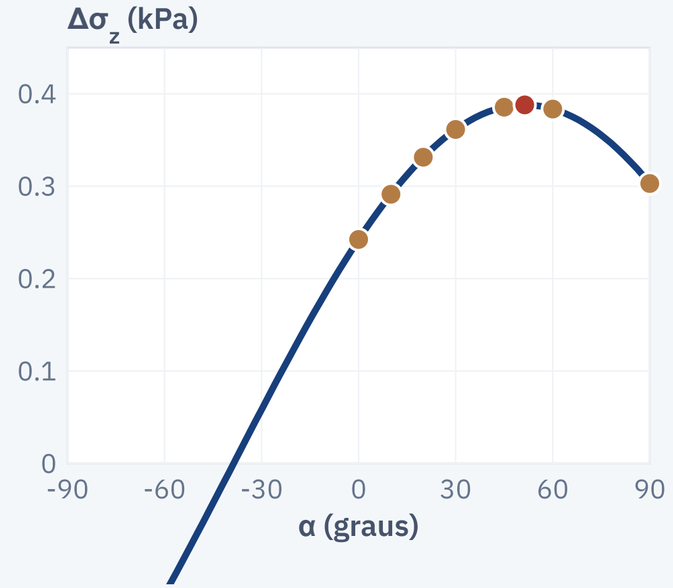
Verificação: como x/z = 1.25, tem-se b/a = 1.25; o total é máximo na condição tan α = b/a = x/z: para α = 51.34°, $\Delta\sigma_z = q\sqrt{(a^2 + b^2)}$ = **0.38799 kPa**.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

α (°)	q_V (kN/m)	q_H (kN/m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
0	10.000	0.000	0.24238	0.00000	**0.24238**
10	9.848	1.736	0.23870	0.05261	**0.29131**
20	9.397	3.420	0.22776	0.10362	**0.33138**
30	8.660	5.000	0.20991	0.15149	**0.36139**
45	7.071	7.071	0.17139	0.21423	**0.38562**
60	5.000	8.660	0.12119	0.26238	**0.38357**
90	0.000	10.000	0.00000	0.30297	**0.30297**

Uma carga vertical (α = 0) dá 0.24238 kPa; à medida que a carga se inclina em direção ao ponto A, a componente horizontal entra em ação e o total aumenta: o maior valor é 0.3880 kPa em α ≈ 51.3°. Com carga totalmente horizontal (α = 90°), cai para 0.3030 kPa. Um α negativo desvia a componente horizontal para longe de A e reduz o total (figura).



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Carga	**A carga do Exemplo 1:** $q = 10$ **kN/m,** $\alpha = 20°$ **(empurrando na direção** $+x$**),** $x_L = 0$
Pontos	$z = 4$ **m;** $x = -10; -5; 0; 5; 10$ **m**

PEDE-SE

Para cada ponto, $\Delta\sigma_{z(V)}$, $\Delta\sigma_{z(H)}$ e o total; detalhe para x = −5 m e x = 0; a assimetria da curva.

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 x = −5 m (lado não empurrado pela carga): componente vertical igual, componente horizontal negativa

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi((-5)^2+4^2)^2} = 0.22776\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(-5)(4^2)}{\pi(41)^2} = -\mathbf{0.10362}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.22776 + (-0.10362) = \mathbf{0.12414}\ \text{kPa}$$

2 x = 0 (diretamente sob a carga): a componente horizontal é nula

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2q_V}{\pi z} = \frac{2(9.397)}{\pi(4)} = \mathbf{1.49557}\ \text{kPa}, \qquad \Delta\sigma_{z(H)} = 0$$

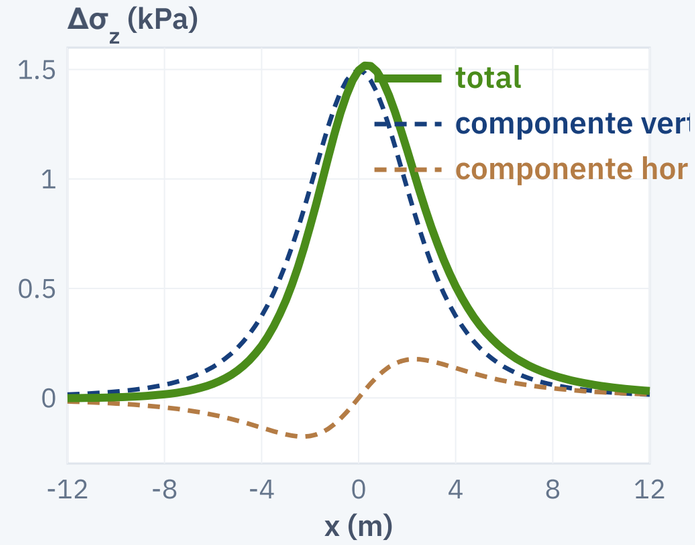
Em x = +5 m, 0.3314 kPa; em x = −5 m, 0.1241 kPa: à mesma distância, a tensão é **2.67 vezes** maior do lado para onde a carga empurra. A componente vertical é uma função par, e a horizontal, uma função ímpar.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

x (m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
−10	0.02845	−0.02589	**0.00256**
−5	0.22776	−0.10362	**0.12414**
0	1.49557	0.00000	**1.49557**
5	0.22776	0.10362	**0.33138**
10	0.02845	0.02589	**0.05434**

A curva total é máxima sob a carga (x = 0) (1.4956 kPa) e decresce mais lentamente do lado para o qual a carga empurra: em x = 10 m, 0.05434; em x = −10 m, apenas 0.00256 kPa.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

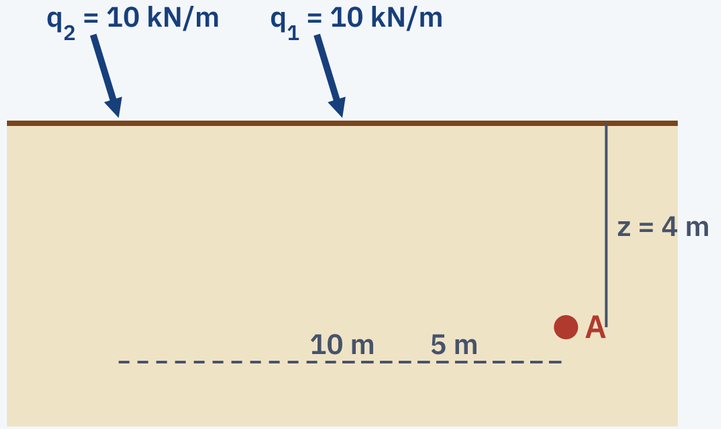
EXEMPLO

Dados

Cargas	**carga 1:** $q_1 = 10$ **kN/m,** $\alpha_1 = 20°$, $x_{L1} = 0$**; carga 2:** $q_2 = 10$ **kN/m,** $\alpha_2 = 20°$**,** $x_{L2} = -5$ **m**
Ponto A	$x_A = 5$ **m;** $z = 4$ **m (depois** $2; 6; 8; 12$ **m)**

PEDE-SE

Contribuição da carga 2 (vertical e horizontal), soma das duas cargas; perfil em profundidade.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Carga 2 (x = 5 – (–5) = 10 m): mesmas componentes q_V = 9.397, q_H = 3.420 kN/m

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}202.8}{42{,}273.3} = 0.02845$$

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(10)(4^2)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}094.5}{42{,}273.3} = 0.02589 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = \mathbf{0.05434}\ \text{kPa}$$

2 Total: a contribuição da carga 1 é o valor do Exemplo 1

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.33138 + 0.05434 = \mathbf{0.38573}\ \text{kPa}$$

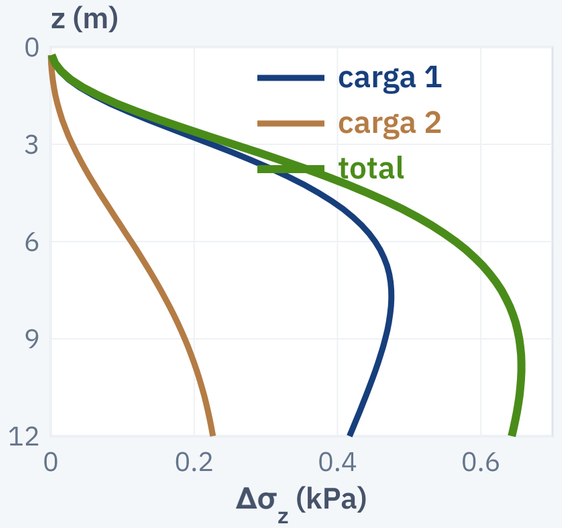
$\Delta\sigma_z$ = 0.38573 kPa (componentes verticais 0.25621, componentes horizontais 0.12951). A carga 2 acrescenta apenas 0.05434 kPa: está a 10 m de distância.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

z (m)	Carga 1: V + H	Carga 2: V + H	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
2	0.0569 + 0.0518 = 0.1087	0.0044 + 0.0081 = 0.0125	**0.1212**
4	0.2278 + 0.1036 = 0.3314	0.0285 + 0.0259 = 0.0543	**0.3857**
6	0.3473 + 0.1053 = 0.4526	0.0699 + 0.0424 = 0.1122	**0.5648**
8	0.3867 + 0.0880 = 0.4746	0.1139 + 0.0518 = 0.1657	**0.6403**
12	0.3619 + 0.0549 = 0.4168	0.1736 + 0.0527 = 0.2263	**0.6431**

A cada profundidade, as componentes vertical e horizontal das cargas são somadas separadamente, e o resultado é a soma das duas cargas. O total é 0.6403 kPa em z = 8 m e 0.6431 kPa em z = 12 m; a parcela da carga 2 aumenta com a profundidade.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Resumo

Pontos-chave

Carga horizontal: $\Delta\sigma_z = (2q/\pi) \times z^2/(x^2 + z^2)^2$; aumenta do lado para onde a carga empurra ($x > 0$), diminui do lado oposto e é nula sob ela; o valor máximo é $0.2067 \cdot (q/z)$ para $x/z = 1/\sqrt{3}$

Carga inclinada: $q_V = q \cos\alpha$ e $q_H = q \sin\alpha$; $\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(V)} + \Delta\sigma_{z(H)}$ (em solo elástico, somam-se as tensões das componentes)

Exemplo (q = 10 kN/m, α = 20°; A: x = 5, z = 4 m): $q_V = 9.397$, $q_H = 3.420$ kN/m; $\Delta\sigma_{z(V)} = 0.22776$ + $\Delta\sigma_{z(H)} = 0.10362$ = **0.33138 kPa**

Inclinação e profundidade: o total é máximo quando $\tan\alpha = x/z$ ($\alpha = 51.3°$); a componente horizontal atinge o pico em $z = x$, e a componente vertical, em $z = \sqrt{3} \cdot x$

Dois lados: 0.3314 em x = +5 m e 0.1241 kPa em x = −5 m; para **duas cargas**, as componentes são somadas separadamente (0.3857 kPa no exemplo)

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o mecanismo de cálculo do próprio módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O módulo abre com q = 10 kN/m, uma carga com α = 20° e o ponto A (x = 5 m, z = 4 m).

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva as próprias cargas lineares horizontais ou inclinadas, suas inclinações, posições e o ponto de interesse; o módulo fornece em conjunto a contribuição das componentes vertical e horizontal, o valor total de $\Delta\sigma_z$, o perfil em profundidade, as curvas de isotensão, a solução passo a passo e o relatório.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.