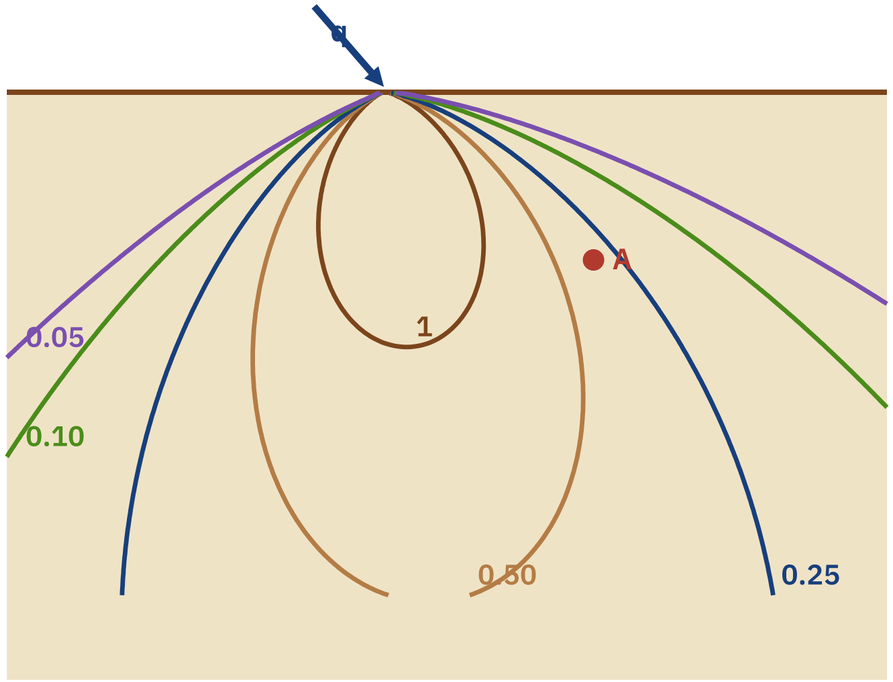
Geotechnisch college · spanningsspreiding in de ondergrond

Spanning onder een horizontale lijnbelasting

College: de verticale spanning in de grond ten gevolge van een horizontale en een schuine lijnbelasting; het inleidende voorbeeld van begin tot eind met de hand met zijn componenten, en diepte- en laterale profielen in tabellen.

- Horizontale lijnbelasting
- Componenten van een schuine belasting
- Tekenafspraak
- Superpositie
- Iso-spanningscontouren



Inleiding

Wat leren we in dit college?

De verticale spanning door een **horizontale** lijnlast aan het oppervlak (wrijving aan de wandvoet, remkracht, boogstuwkracht): $\Delta\sigma_z = (2q/\pi) \times z^2/(x^2 + z^2)^2$

Tekenafspraak: aan de zijde waar de belasting naartoe drukt ($x > 0$) neemt de spanning toe, aan de andere zijde neemt zij af, en direct onder de belasting is zij nul; de grootste waarde treedt op bij $x/z = 1/\sqrt{3}$

Ontbinding van een schuine lijnbelasting in componenten: $q_V = q \cos \alpha$, $q_H = q \sin \alpha$; superpositie van de twee spanningen

Invloed van helling, diepte en laterale positie op de spanning; **superpositie** bij meerdere belastingen

Het openingsvoorbeeld van de module ($q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$) **volledig met de hand**; de afzonderlijke bijdrage van elke component in tabellen

COLLEGESTRUCTUUR

Elk onderwerp wordt in **drie stappen** behandeld:

1 · **Theorie**: formule en onderbouwing

2 · **Opgave**: gegeven en gevraagd

3 · **Oplossing**: stap voor stap, met getallen

Voorbeeld: $q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$ ten opzichte van de verticaal; punt A: $x = 5$ m, $z = 4$ m.

Horizontale en schuine lijnbelastingen

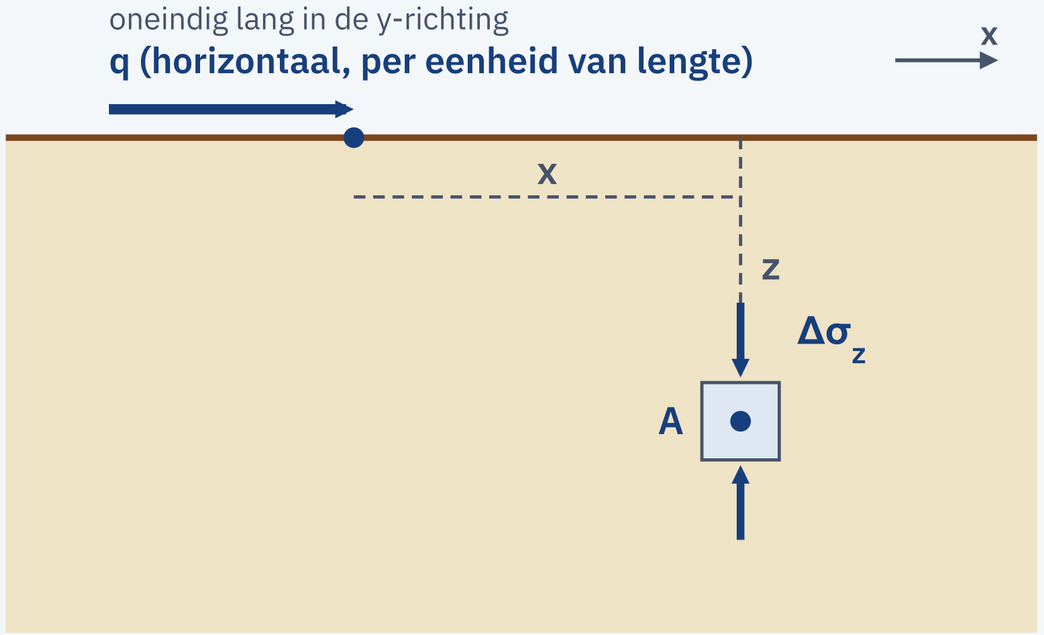
THEORIE

Een lijnbelasting kan ook langs het oppervlak duwen in plaats van er loodrecht op te drukken; wrijving aan de voet van een keermuur, remkracht van een spoorweg en boogstuwkracht zijn hier voorbeelden van.

De module berekent de toename van de verticale spanning onder een horizontale lijnbelasting en onder een schuine lijnbelasting door de twee componenten te superponeren.

De flexibele lijnbelasting is oneindig lang in de y-richting, q is de belasting per lengte-eenheid en in elke doorsnede geldt de vlakke vervormingstoestand.

De grond is een homogene, isotrope, lineair elastische halfruimte; $\Delta\sigma_z$ is alleen de spanningstoename ten gevolge van de belasting.



$\Delta\sigma_z$ van een horizontale lijnbelasting

THEORIE

Voor een horizontale lijnlast geeft de elastische oplossing de verticale spanningstoename in punt A als $\Delta\sigma_z = (2q/\pi) \times z^2/(x^2 + z^2)^2$.

Het teken van de spanning hangt af van de waarde van x: de verticale spanning neemt toe aan de zijde waarheen de belasting drukt (x > 0), neemt af aan de andere zijde en is nul recht onder de belasting (x = 0).

In dimensieloze vorm wordt dit **$\Delta\sigma_z/(q/z) = (2/\pi)(x/z) / [(x/z)^2 + 1]^2$**; één enkele kromme wordt gebruikt voor elke q en elke z.

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi}\,\frac{x\,z^2}{(x^2+z^2)^2}$$

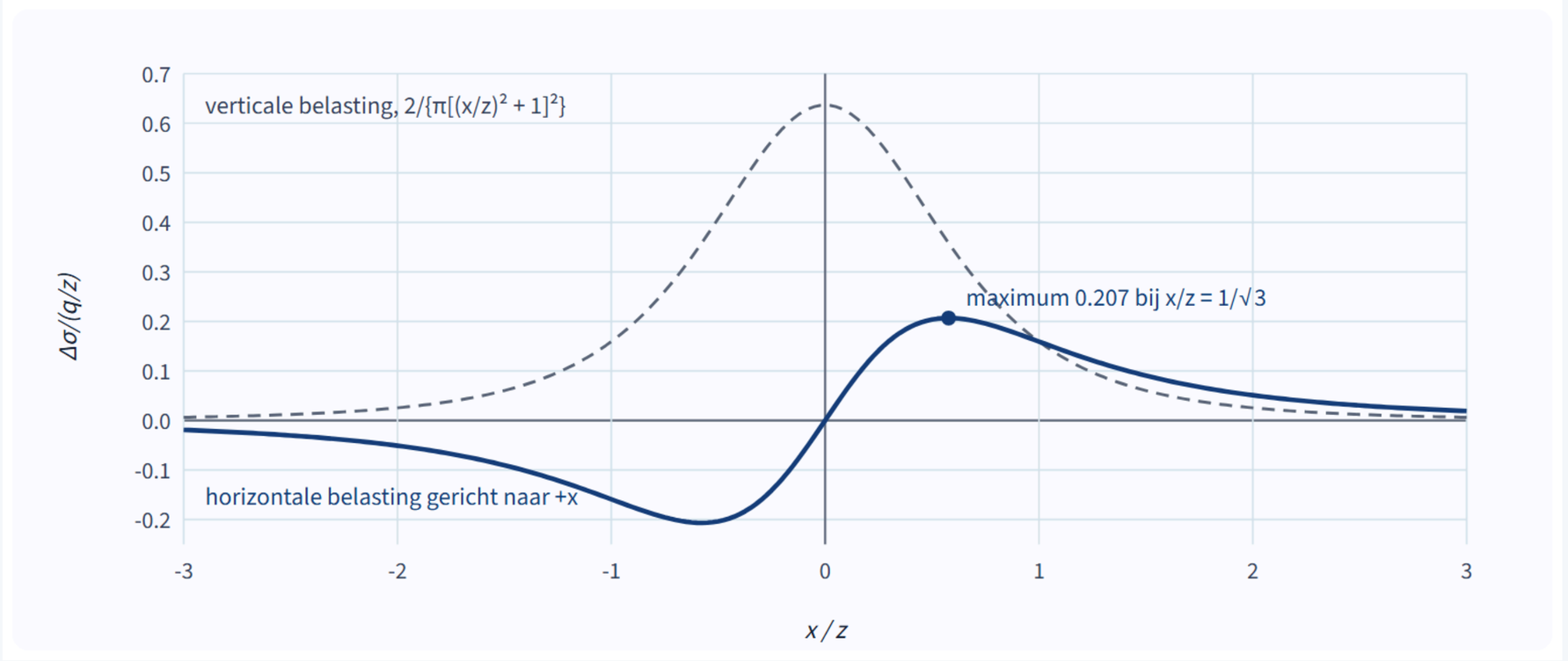
$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi}\,\frac{x/z}{\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

$\Delta\sigma_z/(q/z)$-waarden (module)

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.00	0.000	0.70	0.201
0.10	0.062	0.80	0.189
0.20	0.118	0.90	0.175
0.30	0.161	1.00	0.159
0.40	0.189	1.25	0.121
0.50	0.204	1.50	0.090
0.60	0.207	2.00	0.051

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ tegen x/z

THEORIE



Δσz/(q/z) uitgezet tegen x/z onder een horizontale lijnbelasting (doorgetrokken lijn) en, gestreept, onder een verticale lijnbelasting van dezelfde intensiteit. De horizontale belasting grijpt aan in de richting van +x.

Componenten en superpositie

THEORIE

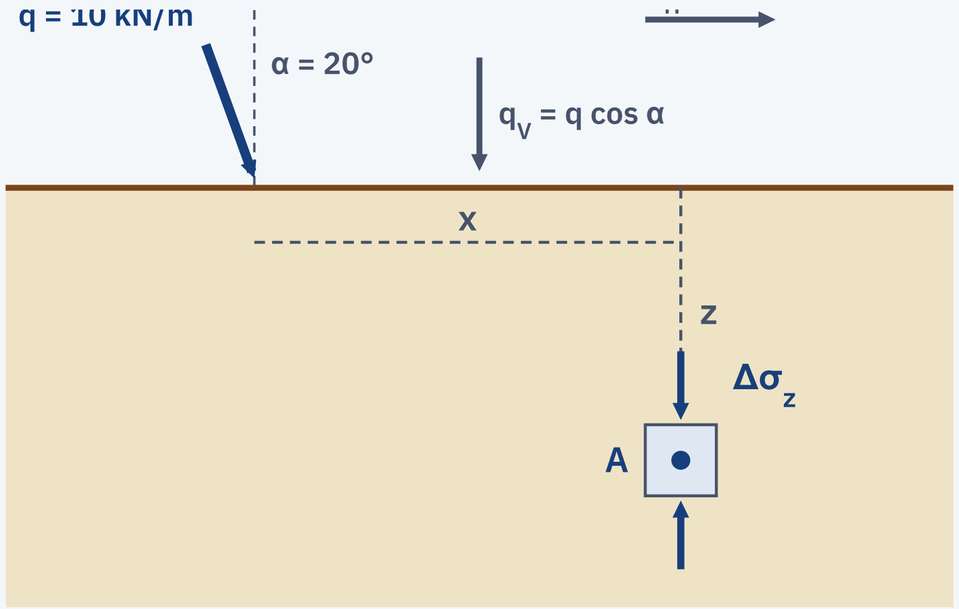
Een schuine lijnbelasting is de som van de componenten van een schuine lijnbelasting q onder een hoek α met de verticaal, en omdat de grond elastisch is, worden de spanningen van de componenten gesuperponeerd.

α = 90° geeft een volledig horizontale belasting, α = 0 geeft een verticale belasting.

Extra lijnbelastingen, elk gedefinieerd door eigen grootte, helling en positie, worden één voor één ingevoerd via Lijnbelasting toevoegen (ten hoogste acht; twee kunnen niet op dezelfde positie liggen).

$$q_V = q\cos\alpha, \qquad q_H = q\sin\alpha$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_V\, z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} + \frac{2q_H}{\pi}\,\frac{x\, z^2}{(x^2+z^2)^2}$$



Opgave

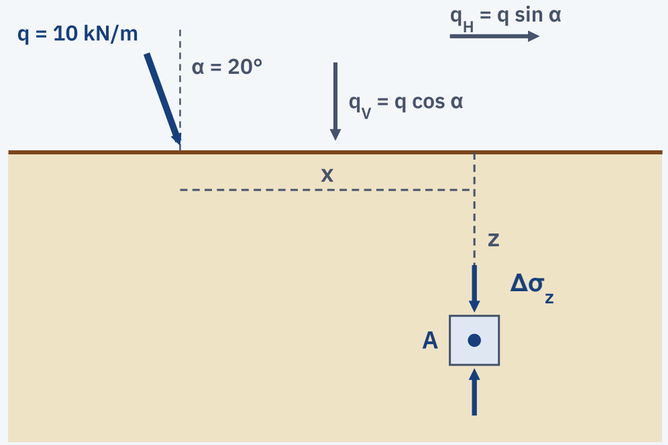
VOORBEELD

Gegeven

Belasting	**lijnbelasting $q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$ hellend ten opzichte van de verticaal (horizontale component in de richting $+x$), $x_L = 0$**
Punt A	$x = 5$ m, $z = 4$ m
Grond	**homogeen, elastisch halfruimte; vlakke vervormingstoestand**

GEVRAAGD

q_V, **q_H**; de **$\Delta\sigma_z$**-waarde van elke component en het totale **$\Delta\sigma_z$**.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Componenten van de schuine belasting (α = 20°)

$$q_V = q\cos\alpha = 10\cos 20^\circ = \mathbf{9.397}\ \mathrm{kN/m}$$

$$q_H = q\sin\alpha = 10\sin 20^\circ = \mathbf{3.420}\ \mathrm{kN/m}$$

2 Spanning door de verticale component (x = 5, z = 4)

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2q_V z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{1{,}202.8}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.22776}\ \mathrm{kPa}$$

De verticale component alleen geeft **0.22776 kPa**; de bijdrage van de horizontale component staat op de volgende pagina.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

3 Spanning van de horizontale component (x = 5 m: de zijde waar de belasting naartoe drukt, teken positief)

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2q_H}{\pi}\,\frac{xz^2}{(x^2+z^2)^2} = \frac{2(3.420)(5)(4^2)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{547.23}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.10362}\ \text{kPa}$$

4 Superpositie

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(V)} + \Delta\sigma_{z(H)} = 0.22776 + 0.10362 = \mathbf{0.33138}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.33138 kPa (verticaal 0.22776 + horizontaal 0.10362). Toets: voor x/z = 1.25 geldt $\Delta\sigma_{z(V)}/(q_V/z)$ = 0.0970, $\Delta\sigma_{z(H)}/(q_H/z)$ = 0.1212; de producten zijn 0.22776 en 0.10362 kPa. De module geeft dezelfde waarde.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

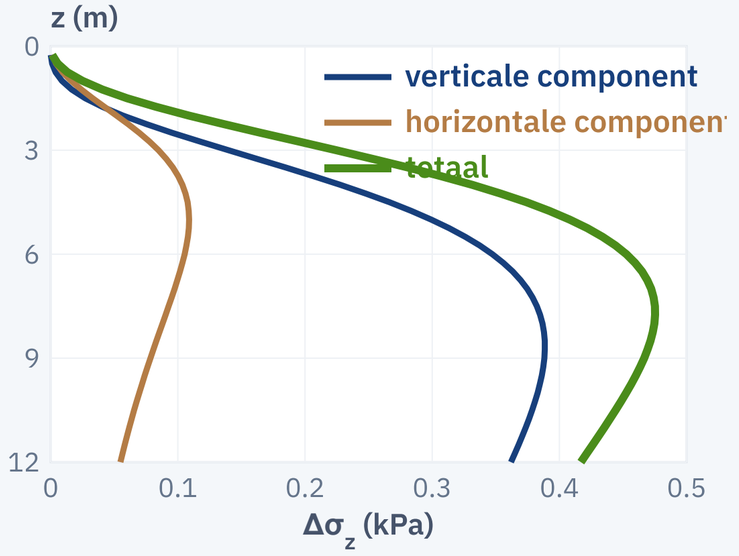
VOORBEELD

Gegeven

Belasting	**Belasting in Voorbeeld 1:** $q = 10$ **kN/m,** $\alpha = 20^\circ$**,** $x_L = 0$
Punten	$x_A = 5$ **m;** $z = 1.2$**;** 2.4**; ...;** 12 **m (profielregels van de module)**

GEVRAAGD

Voor elke diepte $\Delta\sigma_{z(V)}$, $\Delta\sigma_{z(H)}$ en het totaal; uitgewerkte oplossing voor z = 5 m; de diepten waarop de componenten het grootst zijn.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Verticale component (x = 5, z = 5: $x^2 + z^2 = 50$)

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(5^3)}{\pi(50)^2} = \frac{2{,}349.2}{7{,}854.0} = \mathbf{0.29911}\ \text{kPa}$$

2 Horizontale component

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(5)(5^2)}{\pi(50)^2} = \frac{855.05}{7{,}854.0} = \mathbf{0.10887}\ \text{kPa}$$

3 Totaal

$$\Delta\sigma_z = 0.29911 + 0.10887 = \mathbf{0.40798}\ \text{kPa}$$

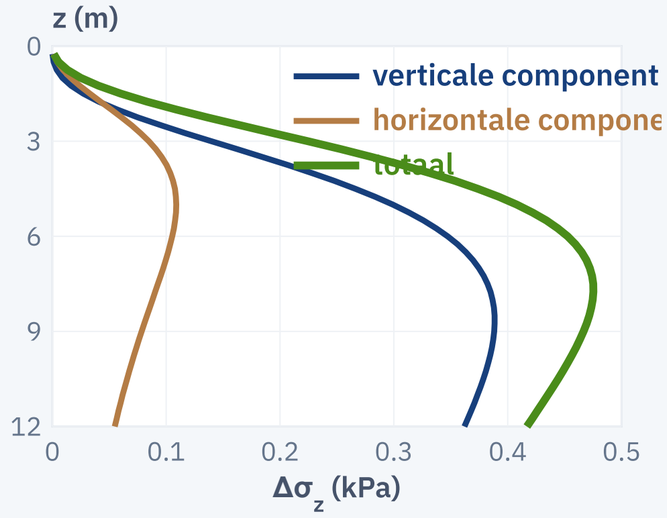
Bij z = 5 m is $\Delta\sigma_z$ = 0.40798 kPa; dit is groter dan de waarde bij z = 4 m (0.33138 kPa). De tabel staat op de volgende pagina.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

z (m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	Totaal $\Delta\sigma_z$ (kPa)
1.2	0.01479	0.02243	**0.03721**
2.4	0.08740	0.06628	**0.15368**
3.6	0.19370	0.09792	**0.29161**
4.8	0.28667	0.10869	**0.39536**
6.0	0.34726	0.10533	**0.45259**
7.2	0.37817	0.09559	**0.47376**
8.4	0.38829	0.08412	**0.47241**
9.6	0.38559	0.07309	**0.45868**
10.8	0.37563	0.06330	**0.43893**
12.0	0.36194	0.05489	**0.41683**

De spanning door de horizontale component is het grootst op diepte z = x = 5 m ($q_H/(2\pi x)$ = 0.10887 kPa) en neemt daarna af; de verticale component is het grootst op z = $\sqrt{3}\cdot x$ = 8.66 m (0.3886 kPa). De totale spanning is maximaal 0.4753 kPa op z ≈ 7.7 m.



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

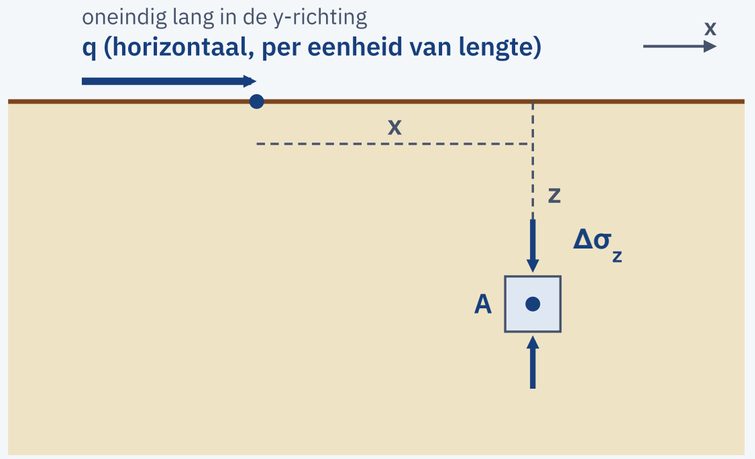
VOORBEELD

Gegeven

Belasting	**horizontale lijnbelasting $q = 20$ kN/m ($\alpha = 90°$), in de richting $+x$, $x_L = 0$**
Punten	$z = 3$ m; $x = -6; -3; -1.73; 0; 1.73; 3; 6$ m ($x/z = -2$ … 2)

GEVRAAGD

Voor elk punt **x/z**, **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** en **$\Delta\sigma_z$**; vergelijking met een verticale belasting van dezelfde intensiteit; de maximale waarde.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 x = 3 m (x/z = 1): zijde waarheen de belasting drukt

$$\Delta\sigma_z/(q/z) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(1^2+1)^2} = \frac{1}{2\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915\,(20/3) = \mathbf{1.0610}\ \mathrm{kPa} \qquad (x = -3\ \mathrm{m}:\ -\mathbf{1.0610}\ \mathrm{kPa})$$

2 Maximale waarde: x/z = 1/√3 = 0.5774 (x = 1.732 m)

$$\Delta\sigma_z/(q/z) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{0.5774}{(1/3+1)^2} = 0.20675$$

$$\Delta\sigma_z = 0.20675\,(20/3) = \mathbf{1.3783}\ \mathrm{kPa}$$

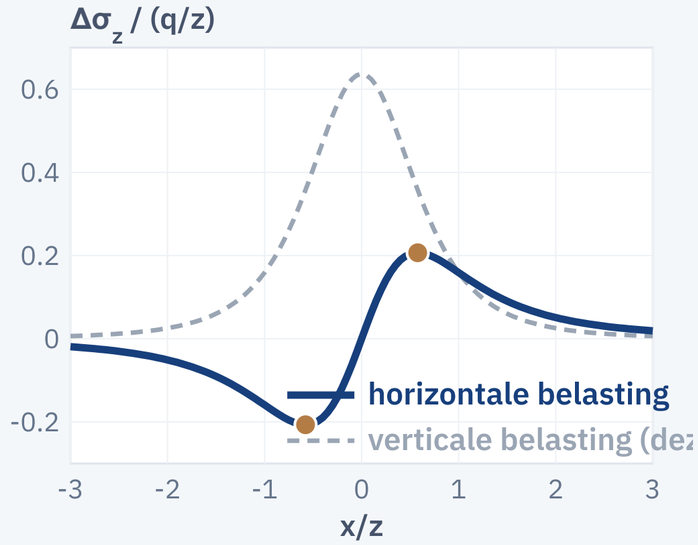
Onder een horizontale belasting (x = 0) is de spanning **nul**; aan de weggedrukte zijde neemt zij toe en aan de tegenoverliggende zijde neemt zij met dezelfde grootte af. De grootste waarde is 0.2067·(q/z) = 1.378 kPa bij x/z = 0.5774.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	Horizontale belasting $\Delta\sigma_z$ (kPa)	Verticale belasting, zelfde q (kPa)
−6.00	−2.000	−0.0509	**−0.3395**	0.1698
−3.00	−1.000	−0.1592	**−1.0610**	1.0610
−1.73	−0.577	−0.2067	**−1.3783**	2.3873
0.00	0.000	0.0000	**0.0000**	4.2441
1.73	0.577	0.2067	**1.3783**	2.3873
3.00	1.000	0.1592	**1.0610**	1.0610
6.00	2.000	0.0509	**0.3395**	0.1698

Voor horizontale belasting is de curve **antisymmetrisch** om x = 0 (oneven functie); de curve van de verticale belasting is even en is het grootst onder de belasting (4.244 kPa). Bij x/z = 1 geven beide belastingen dezelfde grootte (1.061 kPa).



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Belasting	$q = 10$ **kN/m, onder** α **ten opzichte van de verticaal;** $x_L = 0$
Punt A	$x = 5$ **m,** $z = 4$ **m**
Taluds	$\alpha = 0;\ 10;\ 20;\ 30;\ 45;\ 60;\ 90^\circ$

GEVRAAGD

Voor elke hellingshoek q_V, q_H, $\Delta\sigma_{z(V)}$, $\Delta\sigma_{z(H)}$ en het totaal; details voor α = 45°; de hellingshoek waarbij het totaal het grootst is.

Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Coëfficiënten voor eenheidsbelasting (x = 5, z = 4): elke component wordt met haar eigen coëfficiënt vermenigvuldigd

$$a = \frac{2z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{128}{5{,}281.0} = 0.024238$$

$$b = \frac{2xz^2}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{160}{5{,}281.0} = 0.030297 \qquad \Delta\sigma_z = q\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha)$$

2 α = 45° ($q_V = q_H$ = 7,071 kN/m)

$$\Delta\sigma_z = 10\,(0.024238)(0.7071) + 10\,(0.030297)(0.7071)$$
$$= 0.17139 + 0.21423 = \mathbf{0.38562}\ \mathrm{kPa}$$

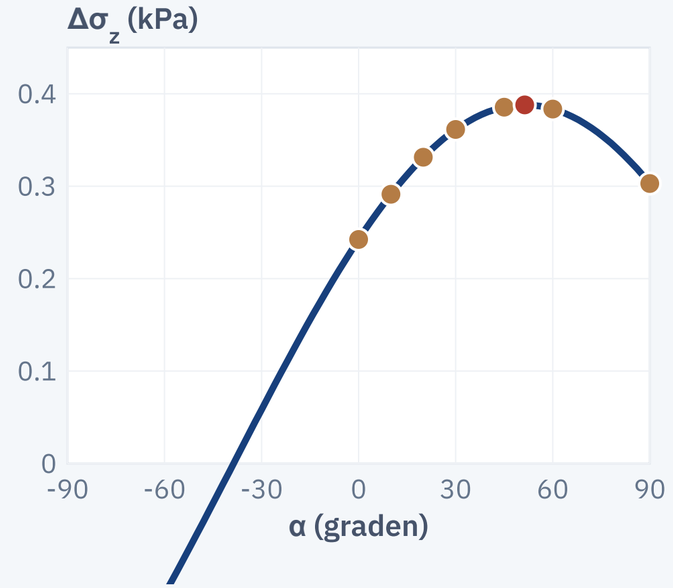
Toets: x/z = 1.25, dus b/a = 1.25; het totaal is het grootst onder de voorwaarde tan α = b/a = x/z: voor α = 51.34° is $\Delta\sigma_z = q\sqrt{(a^2 + b^2)}$ = **0.38799 kPa**.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

α (°)	q_V (kN/m)	q_H (kN/m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	Totaal $\Delta\sigma_z$ (kPa)
0	10.000	0.000	0.24238	0.00000	**0.24238**
10	9.848	1.736	0.23870	0.05261	**0.29131**
20	9.397	3.420	0.22776	0.10362	**0.33138**
30	8.660	5.000	0.20991	0.15149	**0.36139**
45	7.071	7.071	0.17139	0.21423	**0.38562**
60	5.000	8.660	0.12119	0.26238	**0.38357**
90	0.000	10.000	0.00000	0.30297	**0.30297**

Een verticale belasting (α = 0) geeft 0.24238 kPa; naarmate de belasting naar punt A helt, komt de horizontale component in werking en neemt het totaal toe: de grootste waarde is 0.3880 kPa bij α ≈ 51.3°. Bij een volledig horizontale belasting (α = 90°) daalt dit tot 0.3030 kPa. Een negatieve α keert de horizontale component van A af en verkleint het totaal (figuur).



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Belasting	**De belasting uit voorbeeld 1: $q = 10$ kN/m, $\alpha = 20^\circ$ (duwt in de $+x$-richting), $x_L = 0$**
Punten	$z = 4$ **m;** $x = -10; -5; 0; 5; 10$ **m**

GEVRAAGD

Voor elk punt $\Delta\sigma_{z(V)}$, $\Delta\sigma_{z(H)}$ en het totaal; details voor x = −5 m en x = 0; de asymmetrie van de kromme.

Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 x = −5 m (de zijde die niet door de belasting wordt weggeduwd): verticale component gelijk, horizontale component negatief

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi((-5)^2+4^2)^2} = 0.22776\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(-5)(4^2)}{\pi(41)^2} = -\mathbf{0.10362}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.22776 + (-0.10362) = \mathbf{0.12414}\ \text{kPa}$$

2 x = 0 (recht onder de belasting): horizontale component is nul

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2q_V}{\pi z} = \frac{2(9.397)}{\pi(4)} = \mathbf{1.49557}\ \text{kPa}, \qquad \Delta\sigma_{z(H)} = 0$$

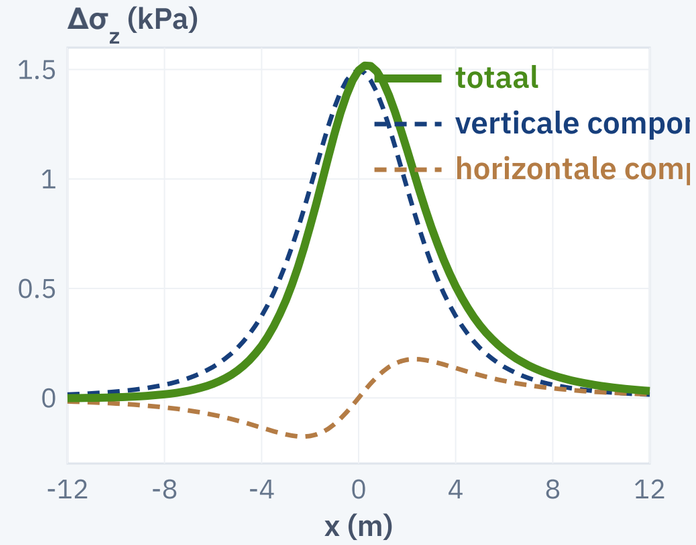
Bij x = +5 m 0.3314 kPa, bij x = −5 m 0.1241 kPa: op dezelfde afstand is de spanning aan de zijde waar de belasting naartoe drukt **2.67 keer** groter. De verticale component is een even functie, de horizontale component een oneven functie.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

x (m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	Totaal $\Delta\sigma_z$ (kPa)
−10	0.02845	−0.02589	**0.00256**
−5	0.22776	−0.10362	**0.12414**
0	1.49557	0.00000	**1.49557**
5	0.22776	0.10362	**0.33138**
10	0.02845	0.02589	**0.05434**

De totale kromme is het hoogst onder de belasting (x = 0) (1.4956 kPa) en neemt aan de zijde waarheen de belasting drukt langzamer af: bij x = 10 m 0.05434, bij x = −10 m slechts 0.00256 kPa.



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

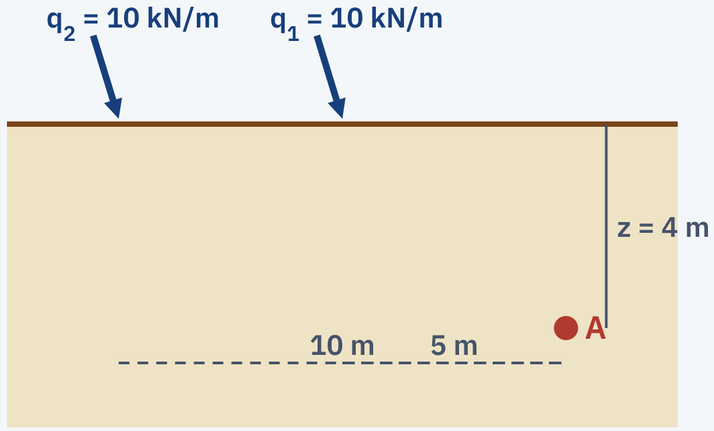
VOORBEELD

Gegeven

Belastingen	**belasting 1:** $q_1 = 10$ **kN/m,** $\alpha_1 = 20^\circ$**,** $x_{L1} = 0$**; belasting 2:** $q_2 = 10$ **kN/m,** $\alpha_2 = 20^\circ$**,** $x_{L2} = -5$ **m**
Punt A	$x_A = 5$ **m;** $z = 4$ **m (daarna** 2**;** 6**;** 8**;** 12 **m)**

GEVRAAGD

Bijdrage van belasting 2 (verticaal en horizontaal), som van de twee belastingen; diepteprofiel.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Belasting 2 (x = 5 – (–5) = 10 m): dezelfde componenten q_V = 9,397, q_H = 3,420 kN/m

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}202.8}{42{,}273.3} = 0.02845$$

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(10)(4^2)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}094.5}{42{,}273.3} = 0.02589 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = \mathbf{0.05434}\ \text{kPa}$$

2 Totaal: de bijdrage van belasting 1 is de waarde uit Voorbeeld 1

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.33138 + 0.05434 = \mathbf{0.38573}\ \text{kPa}$$

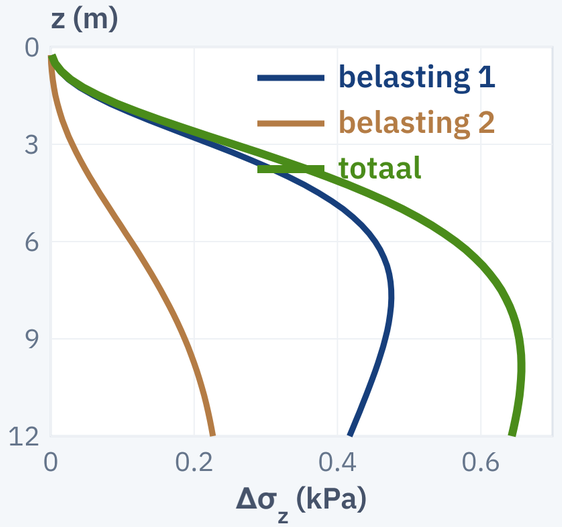
$\Delta\sigma_z$ = 0.38573 kPa (verticale componenten 0.25621, horizontale componenten 0.12951). Belasting 2 voegt slechts 0.05434 kPa toe: zij bevindt zich op 10 m afstand.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

z (m)	Belasting 1: V + H	Belasting 2: V + H	Totaal $\Delta\sigma_z$ (kPa)
2	0.0569 + 0.0518 = 0.1087	0.0044 + 0.0081 = 0.0125	**0.1212**
4	0.2278 + 0.1036 = 0.3314	0.0285 + 0.0259 = 0.0543	**0.3857**
6	0.3473 + 0.1053 = 0.4526	0.0699 + 0.0424 = 0.1122	**0.5648**
8	0.3867 + 0.0880 = 0.4746	0.1139 + 0.0518 = 0.1657	**0.6403**
12	0.3619 + 0.0549 = 0.4168	0.1736 + 0.0527 = 0.2263	**0.6431**

Op elke diepte worden de verticale en horizontale componenten van de belastingen afzonderlijk gesommeerd, en het resultaat is de som van de twee belastingen. Het totaal is 0.6403 kPa op z = 8 m en 0.6431 kPa op z = 12 m; het aandeel van belasting 2 neemt met de diepte toe.



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Samenvatting

Belangrijkste punten

Horizontale belasting: $\Delta\sigma_z = (2q/\pi) \times z^2/(x^2 + z^2)^2$; aan de zijde waarop zij drukt ($x > 0$) neemt de spanning toe, aan de tegenoverliggende zijde af en recht onder de belasting is zij nul; de maximale waarde is $0.2067 \cdot (q/z)$ voor $x/z = 1/\sqrt{3}$

Schuine belasting: $q_V = q \cos\alpha$ en $q_H = q \sin\alpha$; $\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(V)} + \Delta\sigma_{z(H)}$ (in een elastische ondergrond worden de spanningen van de componenten gesuperponeerd)

Voorbeeld (q = 10 kN/m, α = 20°; A: x = 5, z = 4 m): $q_V = 9.397$, $q_H = 3.420$ kN/m; $\Delta\sigma_{z(V)} = 0.22776$ + $\Delta\sigma_{z(H)} = 0.10362$ = **0.33138 kPa**

Helling en diepte: het totaal is het grootst wanneer $\tan\alpha = x/z$ ($\alpha = 51.3°$); de horizontale component bereikt een maximum bij $z = x$, de verticale component bij $z = \sqrt{3} \cdot x$

Twee zijden: 0.3314 bij $x = +5$ m en 0.1241 kPa bij $x = -5$ m; bij **twee belastingen** worden de componenten afzonderlijk gesommeerd (in het voorbeeld 0.3857 kPa)

Literatuur

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

OPMERKING

Alle numerieke voorbeelden zijn gegenereerd met de eigen berekeningsmotor van de module; de module geeft dezelfde waarden. De module opent met q = 10 kN/m, een belasting met α = 20° en punt A (x = 5 m, z = 4 m).

GeoTerva

Online geotechnische berekeningen

Van theorie naar praktijk

Voer uw eigen horizontale of schuine lijnbelastingen, hun hellingen, posities en uw punt in GeoTerva in; de module levert de bijdrage van de verticale en horizontale componenten, de totale $\Delta\sigma_z$-waarde, het diepteprofiel, de isolijnen, de stapsgewijze oplossing en het rapport samen.

Module openen → | **Theoriepagina →**

Openen op de smartphone
Proefmodules vereisen geen registratie.