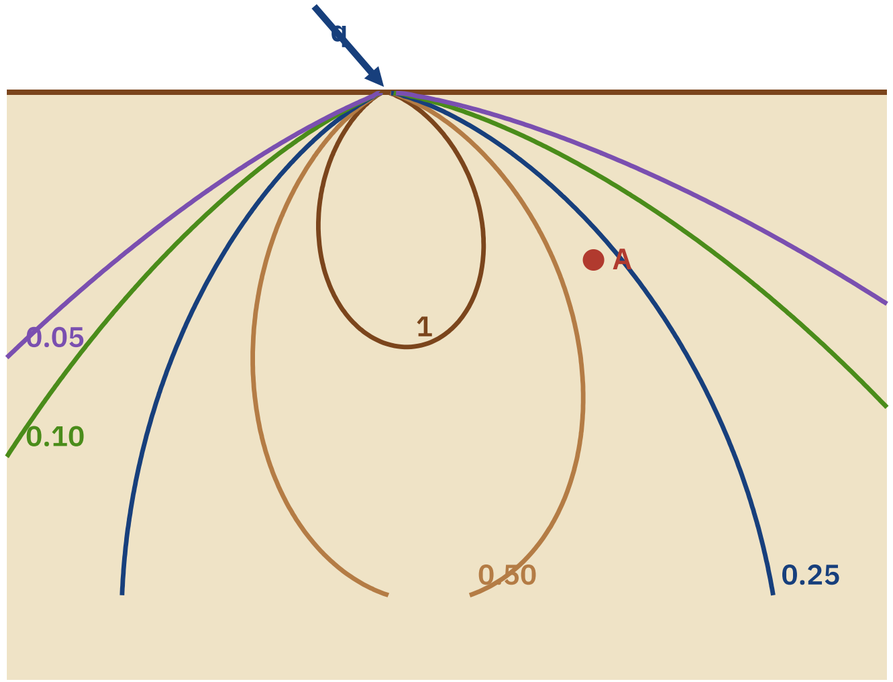
地盤工学の講義資料・地盤中の応力分布

水平線荷重下の応力

講義：水平および傾斜した線荷重が地盤中に生じさせる鉛直応力；導入例を成分ごとに最初から最後まで手計算で解き、深さ方向および横方向の分布は表で示す。

- 水平線荷重
- 傾斜荷重の成分
- 符号の規約
- 重ね合わせ
- 等応力曲線



はじめに

この講義で学ぶこと

地表面の**水平**線荷重（壁底面の摩擦、制動力、アーチスラスト）による鉛直応力：$\Delta\sigma_z = (2q/\pi) \times z^2/(x^2+z^2)^2$

符号の規約：載荷が押す側（$x > 0$）では応力が増加し、反対側では減少し、載荷直下では零となる。最大値は$x/z = 1/\sqrt{3}$で生じる。

斜め線荷重を成分に分解する：$q_V = q\cos\alpha$、$q_H = q\sin\alpha$；2つの応力の重ね合わせ

勾配、深さおよび水平位置が応力に及ぼす影響；複数の荷重に対する**重ね合わせ**

モジュールの初期例題（$q = 10$ kN/m、$\alpha = 20°$）を**最初から最後まで手計算**で；各成分の寄与を個別に表に示す

講義の流れ

各項目は**3つの手順**で扱う：

1 · **理論**：式とその根拠

2 · **問題**：与条件と求めるもの

3 · **解答**：数値を用いて手順ごとに

例題：$q = 10$ kN/m、鉛直から$\alpha = 20°$；点A：$x = 5$ m、$z = 4$ m。

水平および傾斜した線荷重

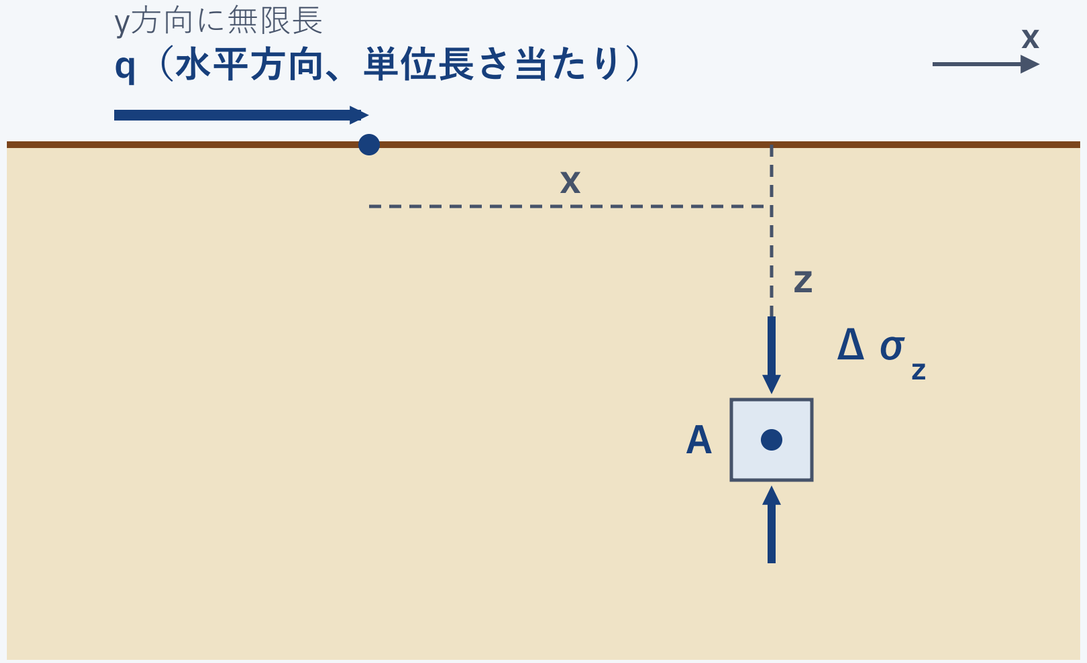
理論

線状荷重は、地表面を下向きに押し付けるだけでなく、地表面に沿って押すこともある。擁壁底面の摩擦、鉄道の制動力、アーチの推力がその例である。

モジュールは、水平な線荷重下および2成分の重ね合わせによる傾斜した線荷重下の鉛直応力増分を計算する。

弾性線荷重はy方向に無限の長さを持ち、qは単位長さ当たりの荷重であり、すべての断面で平面ひずみ状態が成立する。

地盤は均質・等方・線形弾性の半無限体である；$\Delta\sigma_z$は荷重による応力増分のみである。



水平線荷重による Δ σz

理論

水平線荷重に対する弾性解は、点Aにおける鉛直応力の増分を Δ σz = (2q/π) x z²/(x² + z²)²の形で与える。

応力の符号はxの値に依存する：鉛直応力は荷重が押す側（x > 0）で増加し、反対側で減少し、荷重の真下（x = 0）ではゼロである。

無次元形では **Δ σz/(q/z) = (2/π)(x/z) / [(x/z)² + 1]²** となり、単一の曲線をすべてのqとすべてのzに対して用いる。

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi}\,\frac{x\,z^2}{(x^2+z^2)^2}$$

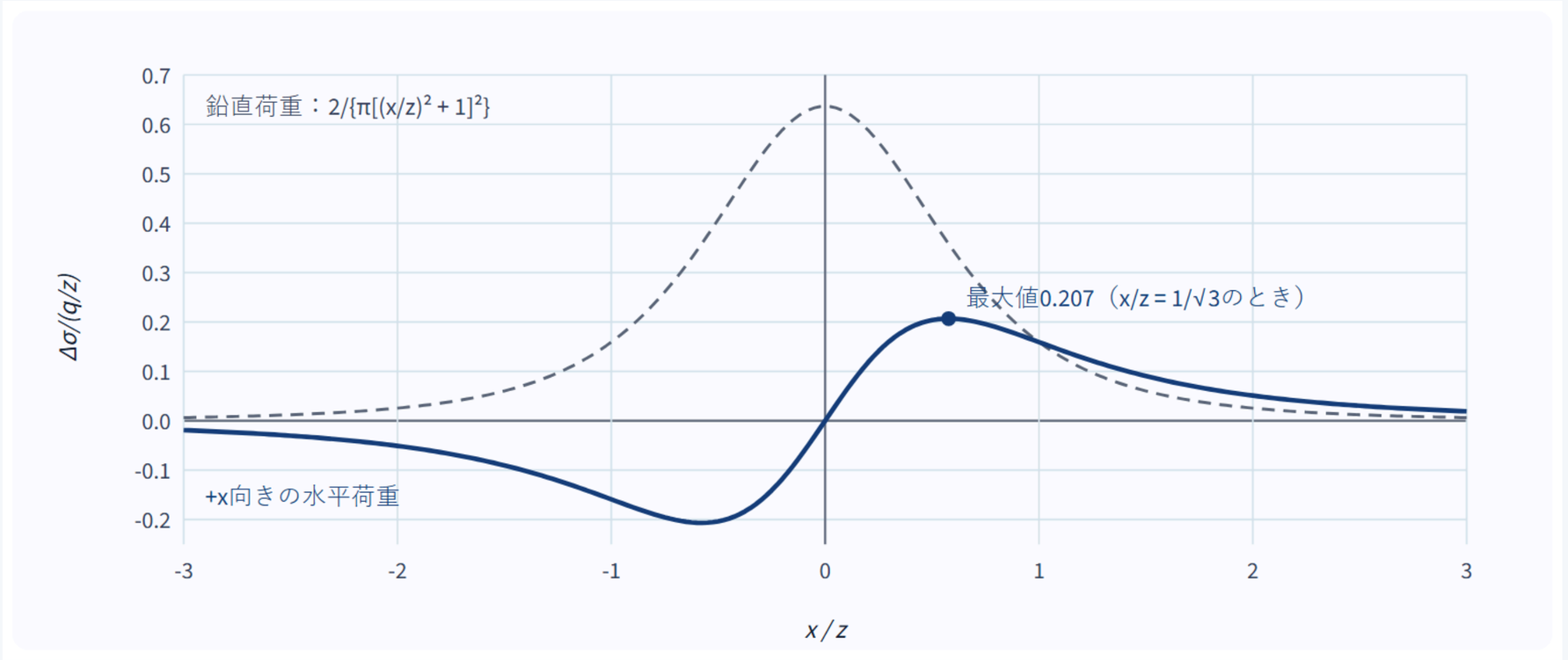
$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi}\,\frac{x/z}{\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

Δ σz/(q/z) の値（モジュール）

x/z	Δ σz/(q/z)	x/z	Δ σz/(q/z)
0.00	0.000	0.70	0.201
0.10	0.062	0.80	0.189
0.20	0.118	0.90	0.175
0.30	0.161	1.00	0.159
0.40	0.189	1.25	0.121
0.50	0.204	1.50	0.090
0.60	0.207	2.00	0.051

Δ σz/(q/z)とx/z

理論



Δ σz/(q/z)とx/zの関係。水平線荷重の下（実線）と、同じ強さの鉛直線荷重の下（破線）。水平荷重は+x方向に作用する。

成分と重ね合わせ

理論

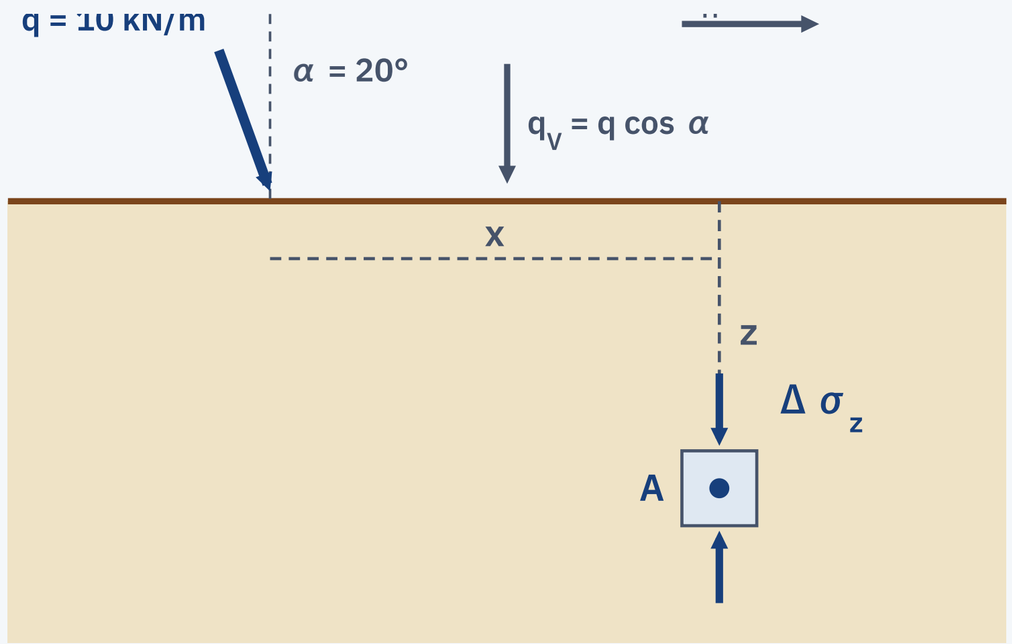
傾斜線荷重は、鉛直から α の角度をなす傾斜線荷重 q の成分の和であり、地盤は弾性であるから各成分の応力を重ね合わせる。

α = 90°は完全な水平荷重を、α = 0は鉛直荷重を与える。

それぞれ独自の大きさ、傾きおよび位置で定義される追加の線荷重は線荷重を追加で1つずつ入力する（最大8つ；2つを同じ位置に置くことはできない）。

$$q_V = q\cos\alpha, \qquad q_H = q\sin\alpha$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_V\, z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} + \frac{2q_H}{\pi}\,\frac{x\, z^2}{(x^2+z^2)^2}$$



問題

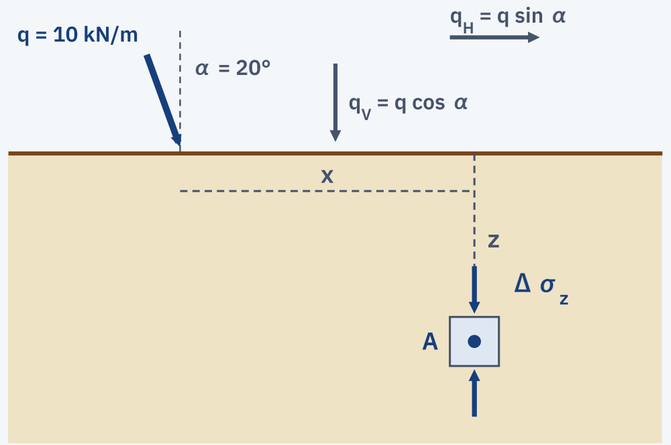
例題

与条件

荷重	線荷重$q = 10$ kN/m、鉛直から$\alpha = 20°$傾斜（水平成分は$+x$方向）、$x_L = 0$
点A	$x = 5$ m, $z = 4$ m
地盤	均質な弾性半無限体；平面ひずみ

求めるもの

q_V、q_H。各成分の$\Delta\sigma_z$の値および合計の$\Delta\sigma_z$。



解答 (1/2)

解答

1 傾斜荷重の成分（α = 20°）

$$q_V = q\cos\alpha = 10\cos 20^\circ = \mathbf{9.397}\ \text{kN/m}$$

$$q_H = q\sin\alpha = 10\sin 20^\circ = \mathbf{3.420}\ \text{kN/m}$$

2 鉛直成分による応力（x = 5, z = 4）

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2q_V z^3}{\pi\left(x^2+z^2\right)^2} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{1{,}202.8}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.22776}\ \text{kPa}$$

鉛直成分のみでは**0.22776 kPa**となる；水平成分の寄与は次のページで示す。

解答 (2/2)

解答

3 水平成分による応力（x = 5 m：荷重が押す側、符号は正）

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2q_H}{\pi}\,\frac{xz^2}{(x^2+z^2)^2} = \frac{2(3.420)(5)(4^2)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{547.23}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.10362}\ \text{kPa}$$

4 重ね合わせ

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(V)} + \Delta\sigma_{z(H)} = 0.22776 + 0.10362 = \mathbf{0.33138}\ \text{kPa}$$

Δ σ$_z$ = 0.33138 kPa（鉛直0.22776＋水平0.10362）。照査：x/z = 1.25に対して Δ σ$_{z(V)}$/(q$_V$/z) = 0.0970、Δ σ$_{z(H)}$/(q$_H$/z) = 0.1212であり、積は0.22776および0.10362 kPaである。モジュールは同じ値を与える。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

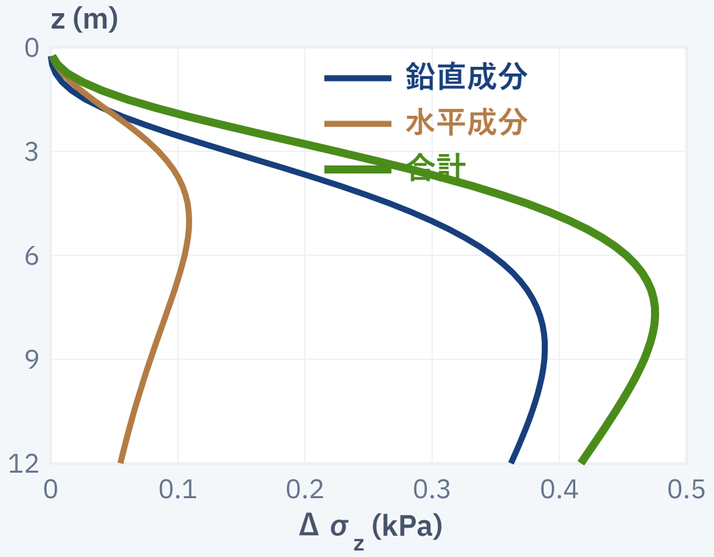
例題

与条件

荷重	**例題1の荷重：$q = 10$ kN/m、$\alpha = 20^\circ$、$x_L = 0$**
点	$x_A = 5$ m；$z = 1.2$；2.4；…；12 m（**モジュールの土層構成行**）

求めるもの

各深さについて$\Delta\sigma_{z(V)}$、$\Delta\sigma_{z(H)}$および合計を求める。z = 5 mについての詳細な解答。各成分が最大となる深さ。



解答 (1/2)

解答

1 鉛直成分（x = 5、z = 5：$x^2 + z^2 = 50$）

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(5^3)}{\pi(50)^2} = \frac{2{,}349.2}{7{,}854.0} = \mathbf{0.29911}\ \text{kPa}$$

2 水平成分

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(5)(5^2)}{\pi(50)^2} = \frac{855.05}{7{,}854.0} = \mathbf{0.10887}\ \text{kPa}$$

3 合計

$$\Delta\sigma_z = 0.29911 + 0.10887 = \mathbf{0.40798}\ \text{kPa}$$

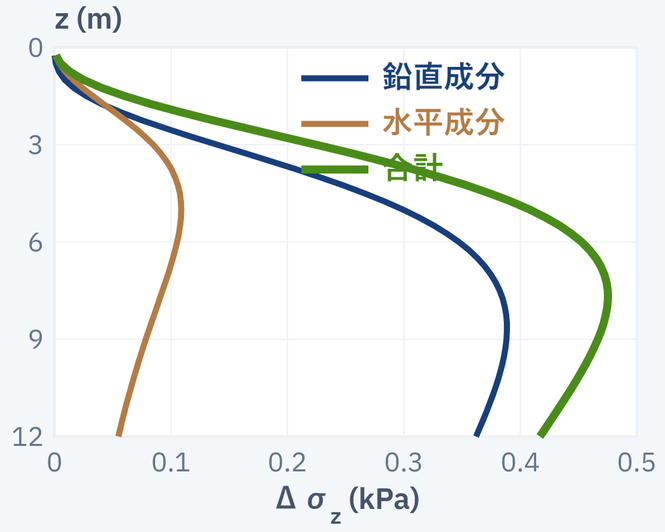
z = 5 mで$\Delta\sigma_z$ = 0.40798 kPaであり、z = 4 mの値（0.33138 kPa）より大きい。表は次ページに示す。

例題2・深さによる変化：表

解答 (2/2)

解答

z (m)	Δ $\sigma_{z(V)}$ (kPa)	Δ $\sigma_{z(H)}$ (kPa)	全Δ σ_z (kPa)
1.2	0.01479	0.02243	**0.03721**
2.4	0.08740	0.06628	**0.15368**
3.6	0.19370	0.09792	**0.29161**
4.8	0.28667	0.10869	**0.39536**
6.0	0.34726	0.10533	**0.45259**
7.2	0.37817	0.09559	**0.47376**
8.4	0.38829	0.08412	**0.47241**
9.6	0.38559	0.07309	**0.45868**
10.8	0.37563	0.06330	**0.43893**
12.0	0.36194	0.05489	**0.41683**



水平成分による応力は深さ z = x = 5 m で最大となり（$q_H/(2\pi x)$ = 0.10887 kPa）、その後減少する；鉛直成分は z = $\sqrt{3}$·x = 8.66 m で最大となる（0.3886 kPa）。合計は z ≈ 7.7 m で最大 0.4753 kPa となる。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

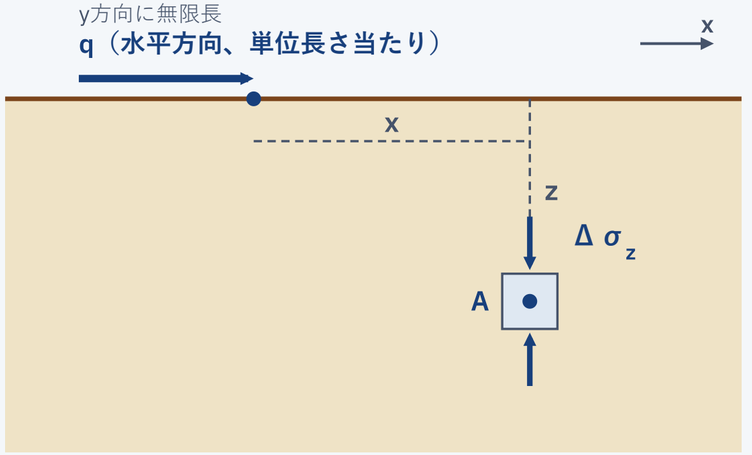
例題

与条件

荷重	**水平線荷重**$q = 20$ **kN/m**（$\alpha = 90°$）、$+x$**方向**、$x_L = 0$
点	$z = 3$ **m;** $x = -6; -3; -1.73; 0; 1.73; 3;$ **6 m (**$x/z = -2 \ldots 2$**)**

求めるもの

各点について**x/z**、**Δ σ$_z$/(q/z)**および**Δ σ$_z$**；同じ強さの鉛直荷重との比較；最大値。



解答 (1/2)

解答

1 x = 3 m（x/z = 1）：載荷により押される側

$$\Delta\sigma_z/(q/z) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(1^2+1)^2} = \frac{1}{2\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915\,(20/3) = \mathbf{1.0610}\ \text{kPa} \qquad (x = -3\ \text{m}:\ -\mathbf{1.0610}\ \text{kPa})$$

2 最大値：x/z = 1/√3 = 0.5774（x = 1.732 m）

$$\Delta\sigma_z/(q/z) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{0.5774}{(1/3+1)^2} = 0.20675$$

$$\Delta\sigma_z = 0.20675\,(20/3) = \mathbf{1.3783}\ \text{kPa}$$

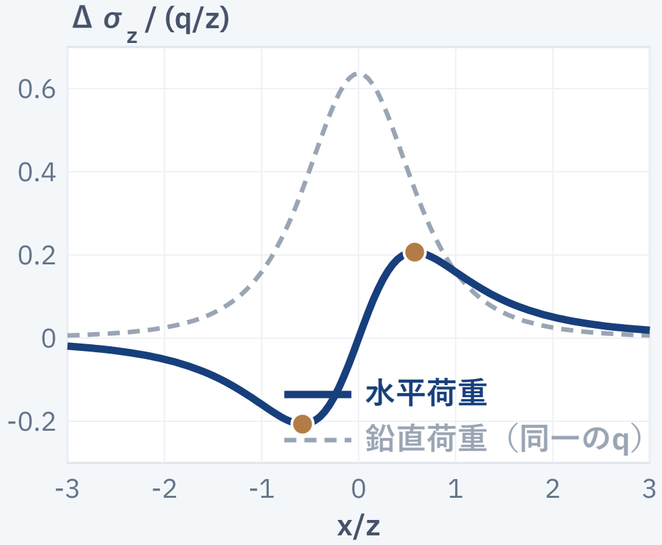
水平荷重下（x = 0）では応力は**ゼロ**である。押される側で増加し、反対側では同じ大きさだけ減少する。最大値はx/z = 0.5774で0.2067·(q/z) = 1.378 kPaである。

解答 (2/2)

解答

x (m)	x/z	Δ σ_z/(q/z)	水平荷重 Δ σ_z (kPa)	鉛直荷重、同一のq (kPa)
−6.00	−2.000	−0.0509	**−0.3395**	0.1698
−3.00	−1.000	−0.1592	**−1.0610**	1.0610
−1.73	−0.577	−0.2067	**−1.3783**	2.3873
0.00	0.000	0.0000	**0.0000**	4.2441
1.73	0.577	0.2067	**1.3783**	2.3873
3.00	1.000	0.1592	**1.0610**	1.0610
6.00	2.000	0.0509	**0.3395**	0.1698

水平荷重に対する曲線はx = 0に関して**逆対称**である（奇関数）；鉛直荷重の曲線は偶関数であり荷重直下で最大となる（4.244 kPa）。x/z = 1では2つの荷重は同じ大きさを与える（1.061 kPa）。



GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

例題

与条件

荷重	$q = 10$ kN/m、鉛直からα傾斜；$x_L = 0$
点A	$x = 5$ m, $z = 4$ m
勾配	$\alpha = 0; 10; 20; 30; 45; 60; 90^\circ$

求めるもの

各勾配についてq_V、q_H、$\Delta\sigma_{z(V)}$、$\Delta\sigma_{z(H)}$と合計；α = 45°の場合の詳細；合計が最大となる勾配。

解答 (1/2)

解答

1 単位荷重に対する係数（x = 5、z = 4）：各成分にそれぞれの係数を乗じる

$$a = \frac{2z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{128}{5{,}281.0} = 0.024238$$

$$b = \frac{2xz^2}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{160}{5{,}281.0} = 0.030297 \qquad \Delta\sigma_z = q\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha)$$

2 α = 45° ($q_V = q_H$ = 7,071 kN/m)

$$\Delta\sigma_z = 10\,(0.024238)(0.7071) + 10\,(0.030297)(0.7071)$$
$$= 0.17139 + 0.21423 = \mathbf{0.38562}\ \text{kPa}$$

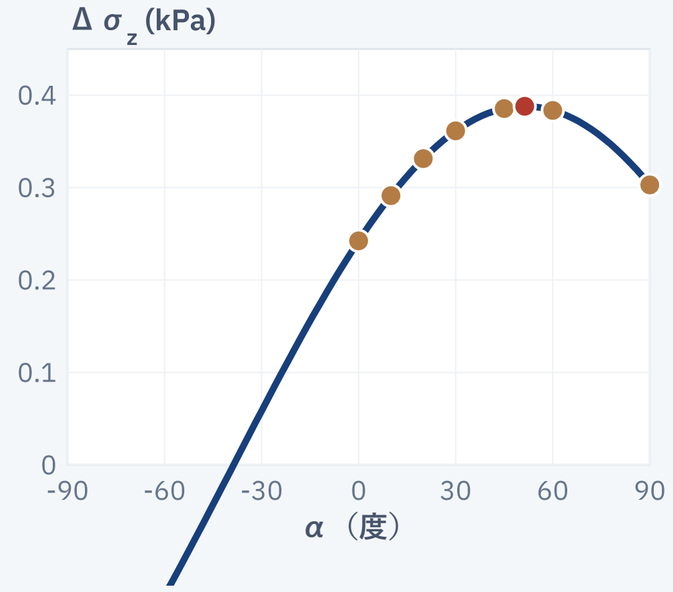
照査：x/z = 1.25であるからb/a = 1.25；合計はtan α = b/a = x/zの条件で最大となる：α = 51.34°に対して Δ σ_z = q$\sqrt{}$(a² + b²) = **0.38799 kPa**。

解答 (2/2)

解答

α (°)	q_V (kN/m)	q_H (kN/m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	全 $\Delta\sigma_z$ (kPa)
0	10.000	0.000	0.24238	0.00000	**0.24238**
10	9.848	1.736	0.23870	0.05261	**0.29131**
20	9.397	3.420	0.22776	0.10362	**0.33138**
30	8.660	5.000	0.20991	0.15149	**0.36139**
45	7.071	7.071	0.17139	0.21423	**0.38562**
60	5.000	8.660	0.12119	0.26238	**0.38357**
90	0.000	10.000	0.00000	0.30297	**0.30297**

鉛直荷重（$\alpha = 0$）では0.24238 kPaとなる。荷重が点Aの方向へ傾くにつれて水平成分が寄与し、合計は増加する：最大値は $\alpha \approx 51.3°$ で0.3880 kPaである。完全な水平荷重（$\alpha = 90°$）では0.3030 kPaまで低下する。負の α は水平成分をAから遠ざける向きに変え、合計を減少させる（図）。



GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

例題

与条件

荷重	**例題1の荷重：$q = 10$ kN/m、$\alpha = 20^\circ$（$+x$方向に押す）、$x_L = 0$**
点	$z = 4$ m; $x = -10; -5; 0; 5; 10$ m

求めるもの

各点について$\Delta\sigma_{z(V)}$、$\Delta\sigma_{z(H)}$およびその合計；x = −5 mとx = 0の詳細；曲線の非対称性。

解答 (1/2)

解答

1 x = −5 m（荷重に押されない側）：鉛直成分は同じ、水平成分は負

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi((-5)^2+4^2)^2} = 0.22776 \text{ kPa}$$

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(-5)(4^2)}{\pi(41)^2} = \mathbf{-0.10362} \text{ kPa}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.22776 + (-0.10362) = \mathbf{0.12414} \text{ kPa}$$

2 x = 0（荷重の直下）：水平成分はゼロ

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2q_V}{\pi z} = \frac{2(9.397)}{\pi(4)} = \mathbf{1.49557} \text{ kPa}, \qquad \Delta\sigma_{z(H)} = 0$$

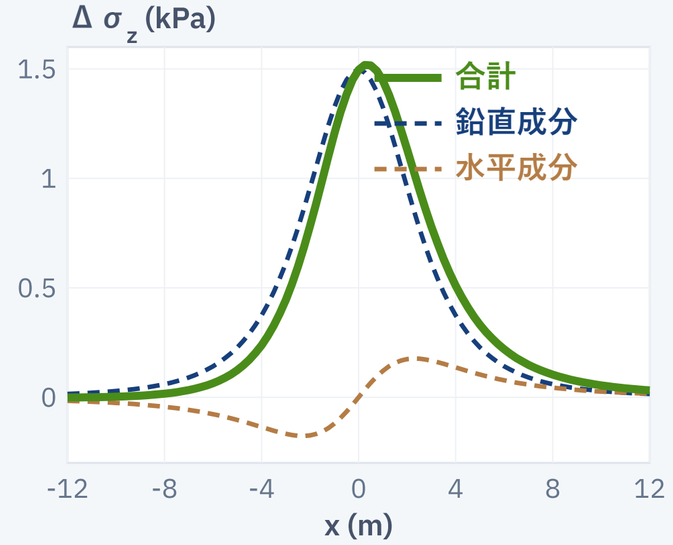
x = +5 mで0.3314 kPa、x = −5 mで0.1241 kPa：同じ距離で、荷重が押す側の応力は**2.67倍**大きい。鉛直成分は偶関数、水平成分は奇関数である。

解答 (2/2)

解答

x (m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	全$\Delta\sigma_z$ (kPa)
−10	0.02845	−0.02589	**0.00256**
−5	0.22776	−0.10362	**0.12414**
0	1.49557	0.00000	**1.49557**
5	0.22776	0.10362	**0.33138**
10	0.02845	0.02589	**0.05434**

合計曲線は荷重直下（x = 0）で最も高く（1.4956 kPa）、荷重が押す側でより緩やかに減衰する：x = 10 mで0.05434、x = −10 mではわずか0.00256 kPaである。



GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

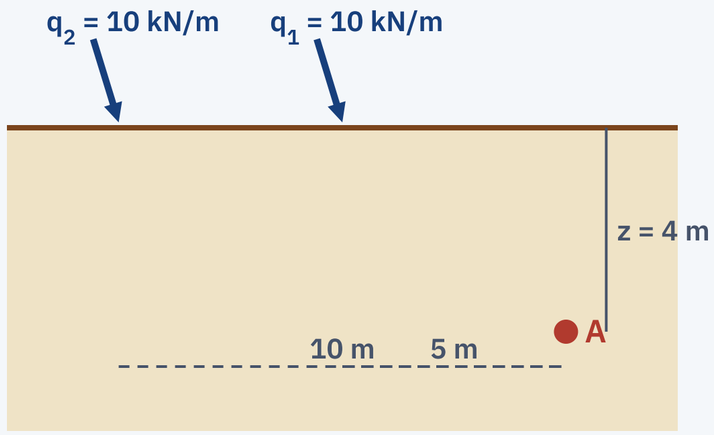
例題

与条件

荷重	**荷重1：$q_1 = 10$ kN/m、$\alpha_1 = 20^\circ$、$x_{L1} = 0$；荷重2：$q_2 = 10$ kN/m、$\alpha_2 = 20^\circ$、$x_{L2} = -5$ m**
点A	**$x_A = 5$ m、$z = 4$ m（続いて2、6、8、12 m）**

求めるもの

荷重2の寄与（鉛直および水平）、2つの荷重の和；深さ方向の分布。



解答 (1/2)

解答

1 荷重2（x = 5 − (−5) = 10 m）：同じ成分で$q_V = 9.397$、$q_H = 3.420$ kN/m

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}202.8}{42{,}273.3} = 0.02845$$

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(10)(4^2)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}094.5}{42{,}273.3} = 0.02589 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = \mathbf{0.05434}\ \text{kPa}$$

2 合計：荷重1の寄与は例題1の値である

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.33138 + 0.05434 = \mathbf{0.38573}\ \text{kPa}$$

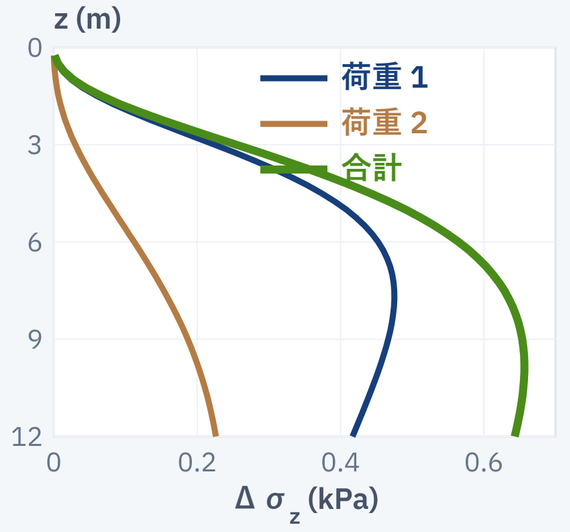
Δ σ_z = 0.38573 kPa（鉛直成分 0.25621、水平成分 0.12951）。荷重2は 0.05434 kPa しか加えない。10 m 離れているためである。

解答 (2/2)

解答

z (m)	荷重1：V + H	荷重2：V + H	全 Δ σ_z (kPa)
2	0.0569 + 0.0518 = 0.1087	0.0044 + 0.0081 = 0.0125	**0.1212**
4	0.2278 + 0.1036 = 0.3314	0.0285 + 0.0259 = 0.0543	**0.3857**
6	0.3473 + 0.1053 = 0.4526	0.0699 + 0.0424 = 0.1122	**0.5648**
8	0.3867 + 0.0880 = 0.4746	0.1139 + 0.0518 = 0.1657	**0.6403**
12	0.3619 + 0.0549 = 0.4168	0.1736 + 0.0527 = 0.2263	**0.6431**

各深度で荷重の鉛直成分と水平成分を別々に合計し、結果は2つの荷重の和である。合計はz = 8 mで0.6403 kPa、z = 12 mで0.6431 kPaである。荷重2の寄与は深部で増加する。



GeoTervaで解答を確認する ↗

まとめ

ポイントのまとめ

水平荷重：$\Delta\sigma_z = (2q/\pi) \times z^2/(x^2+z^2)^2$。押す側（$x > 0$）では増加し、反対側では減少し、直下ではゼロである。最大値は$x/z = 1/\sqrt{3}$のとき$0.2067\cdot(q/z)$である

傾斜荷重：$q_V = q\cos\alpha$、$q_H = q\sin\alpha$；$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(V)} + \Delta\sigma_{z(H)}$（弾性地盤では各成分の応力を重ね合わせる）。

例題（$q = 10$ kN/m、$\alpha = 20°$；A：$x = 5$、$z = 4$ m）：$q_V = 9.397$、$q_H = 3.420$ kN/m；$\Delta\sigma_{z(V)} = 0.22776$ + $\Delta\sigma_{z(H)} = 0.10362$ = **0.33138 kPa**

勾配と深さ：$\tan\alpha = x/z$のとき（$\alpha = 51.3°$）全応力が最大となる。水平成分は$z = x$で、鉛直成分は$z = \sqrt{3}\cdot x$でピークとなる。

両側：$x = +5$ mで0.3314、$x = -5$ mで0.1241 kPa；**2つの荷重**に対しては成分をそれぞれ別々に合計する（例では0.3857 kPa）。

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

注記

数値例はすべてモジュール自身の計算エンジンで作成したものであり、モジュールは同じ値を与える。モジュールは $q = 10\ \mathrm{kN/m}$、$\alpha = 20°$ の荷重および点A（$x = 5\ \mathrm{m}$、$z = 4\ \mathrm{m}$）で起動する。

GeoTerva

オンライン地盤工学計算

理論から実務へ

GeoTervaに独自の水平または斜めの線状荷重、その勾配、位置、および対象点を入力する。モジュールは鉛直成分と水平成分の寄与、合計Δ σ_z値、深さ方向の分布、等応力曲線、手順ごとの解答、およびレポートをまとめて出力する。

モジュールを開く →

理論ページ →

スマートフォンで開く

お試しモジュールは登録不要です。

講義で使用したい場合：info@geoterva.com