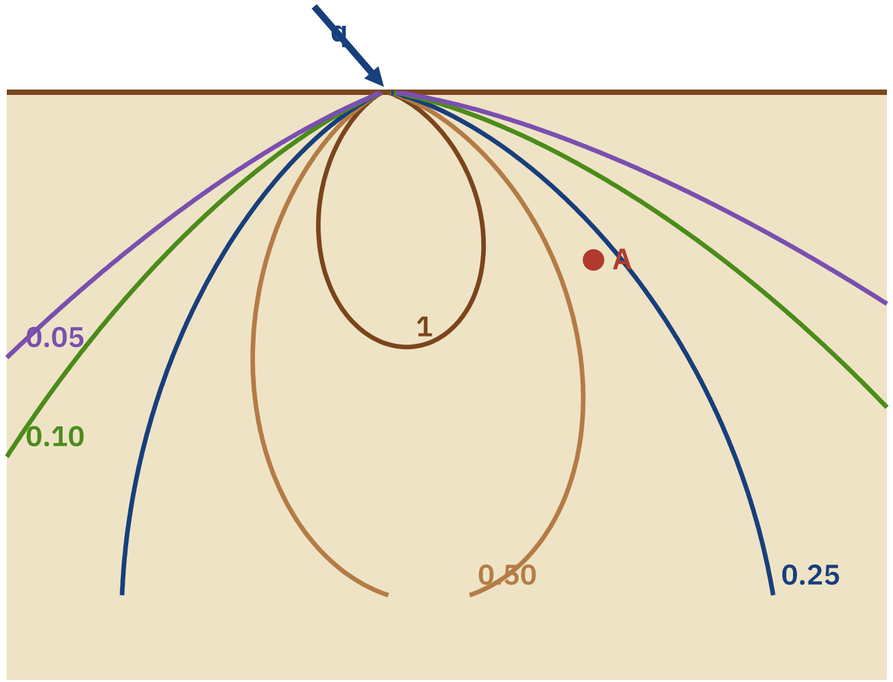
Presentazione didattica di geotecnica · Distribuzione delle tensioni nel terreno

Tensione sotto un carico lineare orizzontale

Lezione: tensione verticale indotta nel terreno da un carico lineare orizzontale e inclinato; l'esempio introduttivo risolto a mano dall'inizio alla fine con le sue componenti, i profili in profondità e laterali presentati in tabelle.

- Carico lineare orizzontale
- Componenti di un carico inclinato
- Convenzione dei segni
- Sovrapposizione degli effetti
- Curve isostatiche



Introduzione

Che cosa si impara in questa lezione?

La tensione verticale prodotta da un carico lineare **orizzontale** in superficie (attrito alla base del muro, forza di frenata, spinta d'arco): $\Delta\sigma_z = (2q/\pi)\ x\ z^2/(x^2 + z^2)^2$

Convenzione dei segni: dal lato verso cui il carico spinge ($x > 0$) la tensione aumenta, dal lato opposto diminuisce, e direttamente sotto il carico è nulla; il valore massimo si ha per $x/z = 1/\sqrt{3}$

Scomposizione di un carico lineare inclinato nelle sue componenti: $q_V = q \cos\alpha$, $q_H = q \sin\alpha$; sovrapposizione delle due tensioni

Effetto della pendenza, della profondità e della posizione laterale sulla tensione; **sovrapposizione** per più carichi

L'esempio iniziale del modulo ($q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$) **svolto interamente a mano**; il contributo separato di ciascuna componente in tabelle

SVOLGIMENTO DELLA LEZIONE

Ogni argomento è trattato in **tre passaggi**:

1 · **Teoria**: formula e relativa motivazione

2 · **Traccia**: dati e richiesto

3 · **Soluzione**: passo per passo, con i numeri

Esempio: $q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$ rispetto alla verticale; punto A: $x = 5$ m, $z = 4$ m.

Carichi lineari orizzontali e inclinati

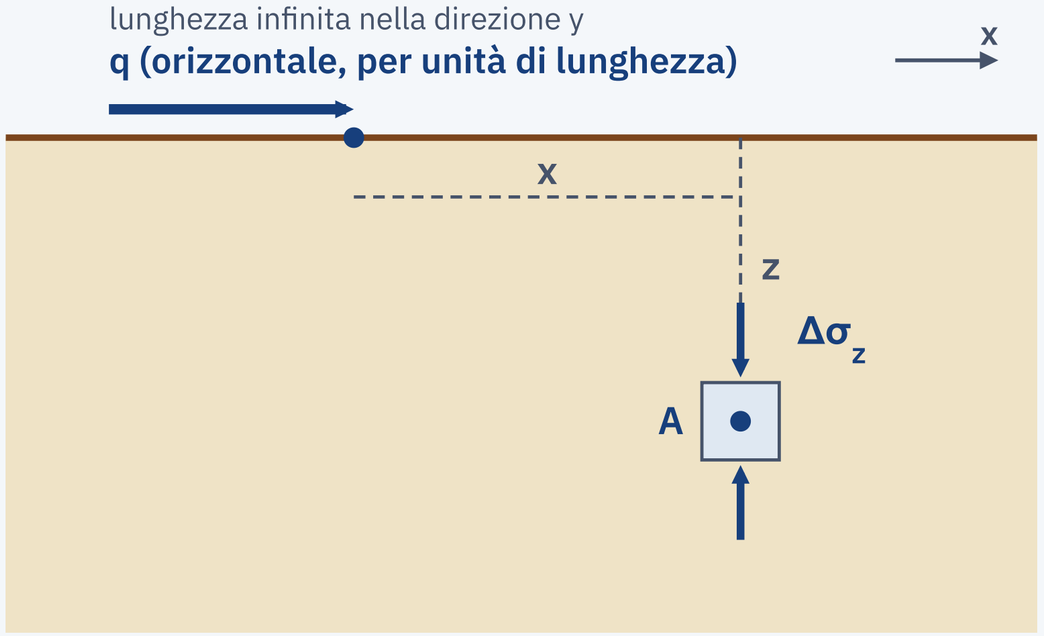
TEORIA

Un carico lineare può anche spingere lungo la superficie invece di premere verso il basso su di essa; l'attrito alla base di un muro, la forza di frenata ferroviaria e la spinta di un arco ne sono esempi.

Il modulo calcola l'incremento di tensione verticale sotto un carico lineare orizzontale e sotto un carico lineare inclinato mediante la sovrapposizione delle due componenti.

Il carico lineare flessibile è infinitamente lungo nella direzione y, q è il carico per unità di lunghezza e in ogni sezione trasversale vale la condizione di deformazione piana.

Il terreno è un semispazio omogeneo, isotropo e linearmente elastico; $\Delta\sigma_z$ è soltanto l'incremento di tensione prodotto dal carico.



Valore di $\Delta\sigma_z$ di un carico lineare orizzontale

TEORIA

Per un carico lineare orizzontale, la soluzione elastica fornisce l'incremento di tensione verticale nel punto A nella forma $\Delta\sigma_z = (2q/\pi) \times z^2/(x^2 + z^2)^2$.

Il segno della tensione dipende dal valore di x: la tensione verticale aumenta dal lato verso cui spinge il carico (x > 0), diminuisce dall'altro lato ed è nulla esattamente sotto il carico (x = 0).

In forma adimensionale si ottiene **$\Delta\sigma_z/(q/z) = (2/\pi)(x/z) / [(x/z)^2 + 1]^2$**; un'unica curva vale per ogni q e per ogni z.

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi}\,\frac{x\,z^2}{(x^2+z^2)^2}$$

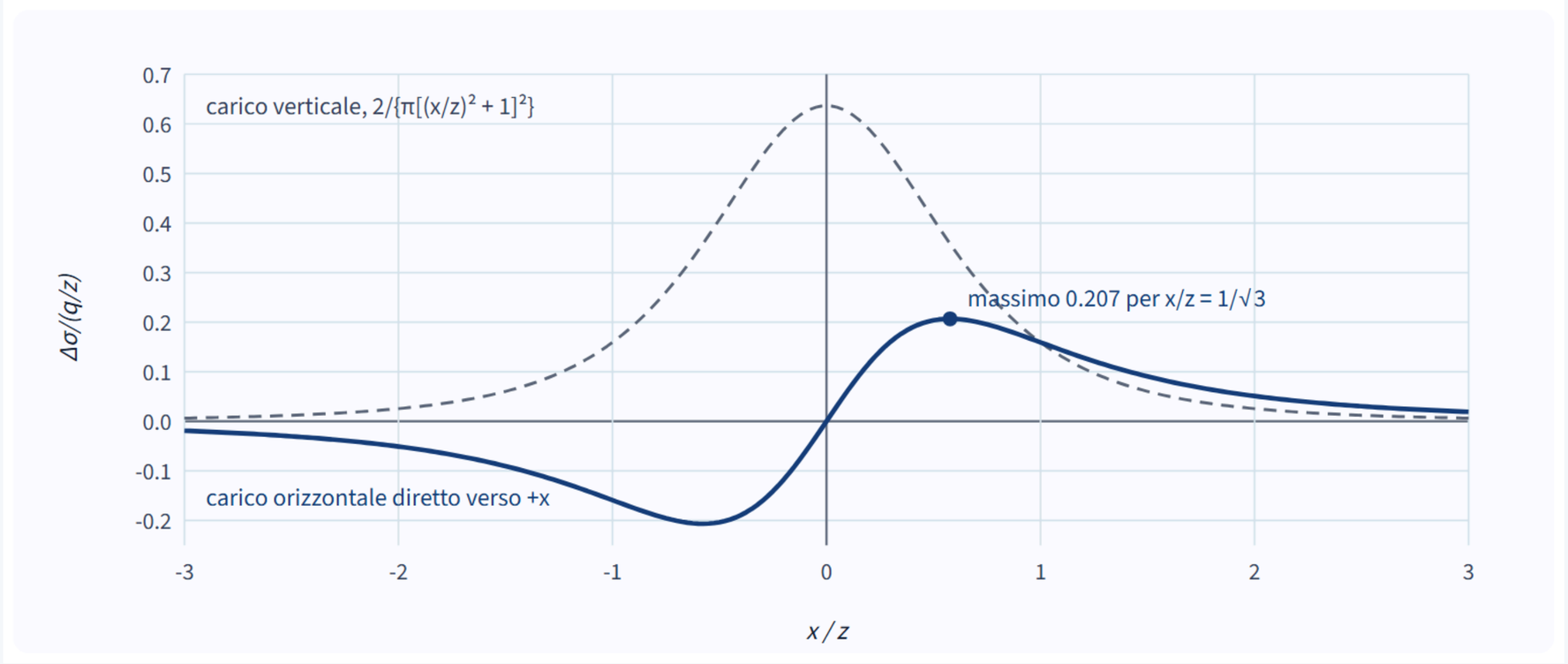
$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi}\,\frac{x/z}{\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

VALORI DI $\Delta\sigma_z/(q/z)$ (MODULO)

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.00	0.000	0.70	0.201
0.10	0.062	0.80	0.189
0.20	0.118	0.90	0.175
0.30	0.161	1.00	0.159
0.40	0.189	1.25	0.121
0.50	0.204	1.50	0.090
0.60	0.207	2.00	0.051

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ in funzione di x/z

TEORIA



Andamento di Δσz/(q/z) in funzione di x/z al di sotto di un carico lineare orizzontale (linea continua) e sotto un carico verticale di pari intensità (linea tratteggiata). Il carico orizzontale spinge verso +x.

Componenti e sovrapposizione

TEORIA

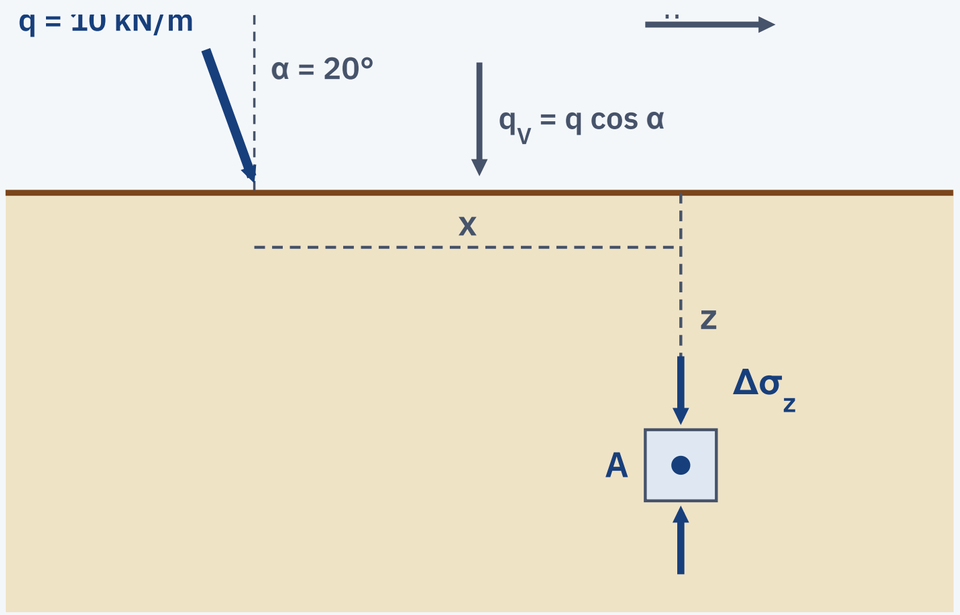
Un carico lineare inclinato è la somma delle componenti di un carico lineare q inclinato di un angolo α rispetto alla verticale e, poiché il terreno è elastico, le tensioni delle componenti si sommano.

α = 90° dà un carico completamente orizzontale, α = 0 dà un carico verticale.

I carichi lineari aggiuntivi, ciascuno definito dalla propria intensità, inclinazione e posizione, si inseriscono uno per uno con Aggiungi carico lineare (al massimo otto; due non possono trovarsi nella stessa posizione).

$$q_V = q\cos\alpha, \qquad q_H = q\sin\alpha$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_V\, z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} + \frac{2q_H}{\pi}\,\frac{x\, z^2}{(x^2+z^2)^2}$$



Traccia

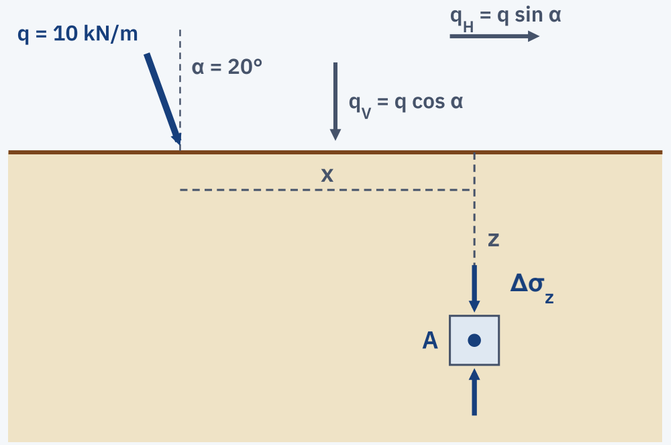
ESEMPIO

Dati

Carico	**carico lineare $q = 10$ kN/m, inclinato di $\alpha = 20°$ rispetto alla verticale (componente orizzontale nella direzione $+x$), $x_L = 0$**
Punto A	**$x = 5$ m, $z = 4$ m**
Terreno	**mezzo semispazio elastico omogeneo; deformazione piana**

RICHIESTO

q_V, **q_H**; il valore di **$\Delta\sigma_z$** di ciascuna componente e il **$\Delta\sigma_z$** totale.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Componenti del carico inclinato (α = 20°)

$$q_V = q\cos\alpha = 10\cos 20^\circ = \mathbf{9.397}\ \mathrm{kN/m}$$

$$q_H = q\sin\alpha = 10\sin 20^\circ = \mathbf{3.420}\ \mathrm{kN/m}$$

2 Tensione della componente verticale (x = 5, z = 4)

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2q_V z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{1{,}202.8}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.22776}\ \mathrm{kPa}$$

La sola componente verticale fornisce **0.22776 kPa**; il contributo della componente orizzontale è nella pagina successiva.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

3 Tensione della componente orizzontale (x = 5 m: lato spinto dal carico, segno positivo)

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2q_H}{\pi}\,\frac{xz^2}{(x^2+z^2)^2} = \frac{2(3.420)(5)(4^2)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{547.23}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.10362}\ \text{kPa}$$

4 Sovrapposizione

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(V)} + \Delta\sigma_{z(H)} = 0.22776 + 0.10362 = \mathbf{0.33138}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.33138 kPa (verticale 0.22776 + orizzontale 0.10362). Verifica: per x/z = 1.25, $\Delta\sigma_{z(V)}/(q_V/z)$ = 0.0970, $\Delta\sigma_{z(H)}/(q_H/z)$ = 0.1212; i prodotti sono 0.22776 e 0.10362 kPa. Il modulo fornisce lo stesso valore.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

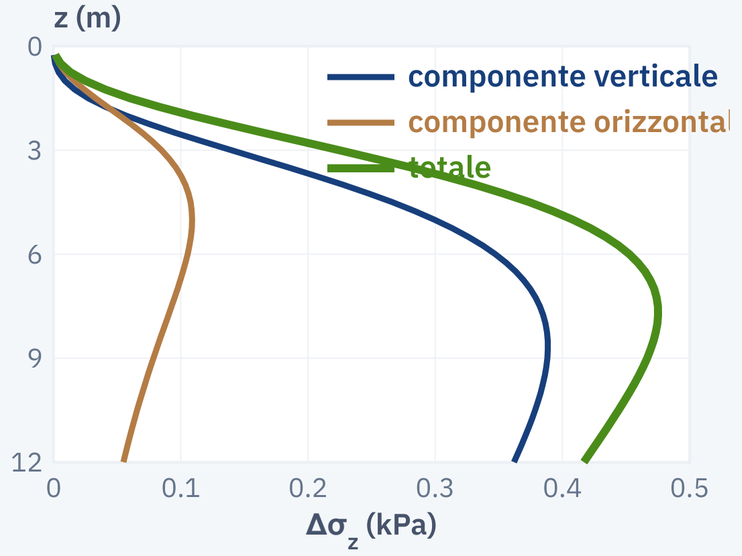
ESEMPIO

Dati

Carico	**Carico nell'Esempio 1: $q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$, $x_L = 0$**
Punti	**$x_A = 5$ m; $z = 1.2; 2.4;$ ...; 12 m (righe del profilo del modulo)**

RICHIESTO

Per ogni profondità $\Delta\sigma_{z(V)}$, $\Delta\sigma_{z(H)}$ e il totale; soluzione dettagliata per z = 5 m; le profondità in cui le componenti sono massime.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Componente verticale (x = 5, z = 5: $x^2 + z^2 = 50$)

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(5^3)}{\pi(50)^2} = \frac{2{,}349.2}{7{,}854.0} = \mathbf{0.29911}\ \text{kPa}$$

2 Componente orizzontale

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(5)(5^2)}{\pi(50)^2} = \frac{855.05}{7{,}854.0} = \mathbf{0.10887}\ \text{kPa}$$

3 Totale

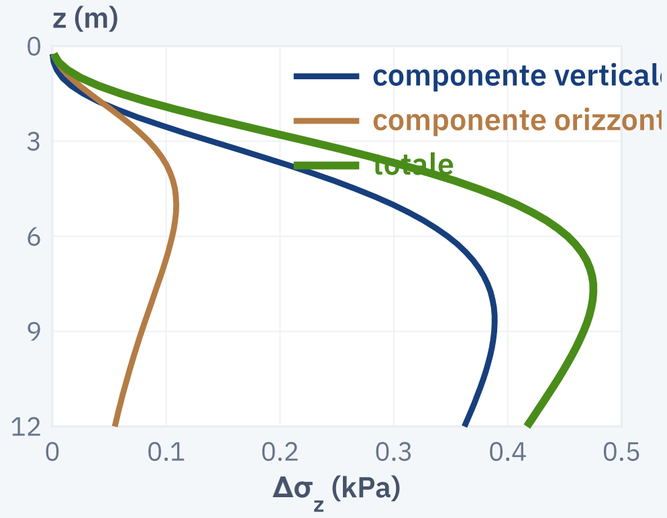
$$\Delta\sigma_z = 0.29911 + 0.10887 = \mathbf{0.40798}\ \text{kPa}$$

A z = 5 m, $\Delta\sigma_z$ = 0.40798 kPa; tale valore è maggiore di quello a z = 4 m (0.33138 kPa). La tabella è riportata nella pagina seguente.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

z (m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$ totale (kPa)
1.2	0.01479	0.02243	**0.03721**
2.4	0.08740	0.06628	**0.15368**
3.6	0.19370	0.09792	**0.29161**
4.8	0.28667	0.10869	**0.39536**
6.0	0.34726	0.10533	**0.45259**
7.2	0.37817	0.09559	**0.47376**
8.4	0.38829	0.08412	**0.47241**
9.6	0.38559	0.07309	**0.45868**
10.8	0.37563	0.06330	**0.43893**
12.0	0.36194	0.05489	**0.41683**



La tensione della componente orizzontale è massima alla profondità z = x = 5 m ($q_H/(2\pi x)$ = 0.10887 kPa), poi diminuisce; la componente verticale è massima a z = $\sqrt{3}\cdot$x = 8.66 m (0.3886 kPa). Il totale vale al massimo 0.4753 kPa a z ≈ 7.7 m.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

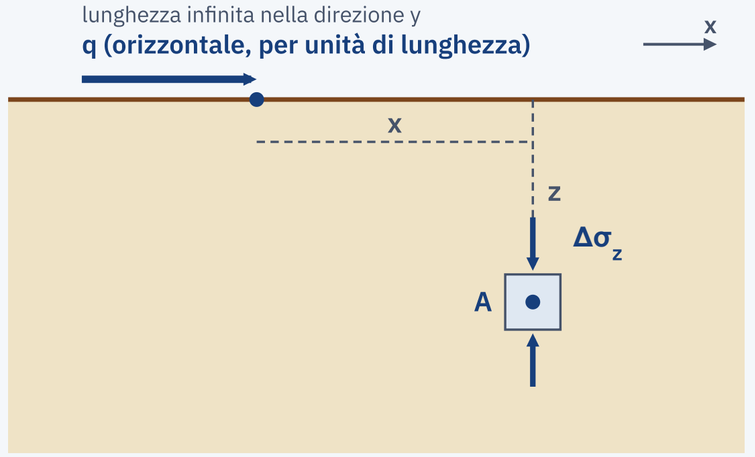
ESEMPIO

Dati

Carico	**carico lineare orizzontale $q = 20$ kN/m ($\alpha = 90°$), nella direzione $+x$, $x_L = 0$**
Punti	$z = 3$ **m;** $x = -6; -3; -1.73; 0; 1.73; 3;$ 6 **m** ($x/z = -2$ **…** 2**)**

RICHIESTO

Per ogni punto **x/z**, **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** e **$\Delta\sigma_z$**; confronto con un carico verticale della stessa intensità; il valore massimo.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 x = 3 m (x/z = 1): lato caricato dal carico

$$\Delta\sigma_z/(q/z) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(1^2+1)^2} = \frac{1}{2\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915\,(20/3) = \mathbf{1.0610}\ \mathrm{kPa} \qquad (x = -3\ \mathrm{m}:\ -\mathbf{1.0610}\ \mathrm{kPa})$$

2 Valore massimo: x/z = 1/√3 = 0.5774 (x = 1.732 m)

$$\Delta\sigma_z/(q/z) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{0.5774}{(1/3+1)^2} = 0.20675$$

$$\Delta\sigma_z = 0.20675\,(20/3) = \mathbf{1.3783}\ \mathrm{kPa}$$

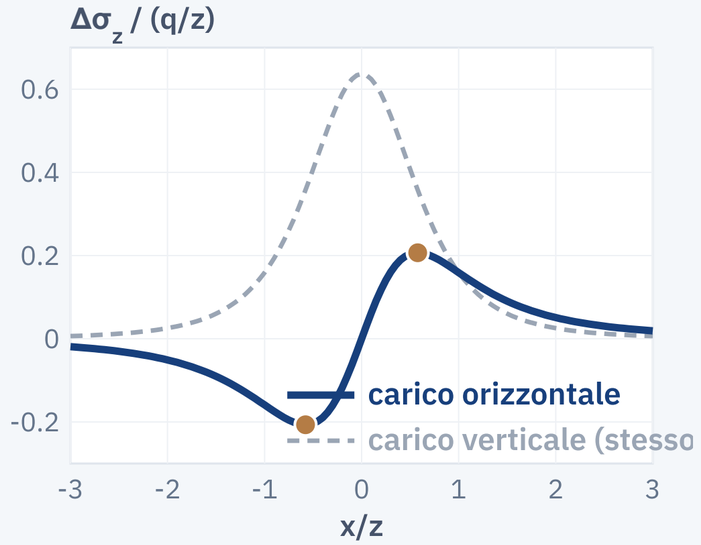
Sotto un carico orizzontale (x = 0) la tensione è **nulla**; aumenta sul lato spinto e diminuisce della stessa entità sul lato opposto. Il valore massimo è 0.2067·(q/z) = 1.378 kPa per x/z = 0.5774.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	Carico orizzontale $\Delta\sigma_z$ (kPa)	Carico verticale, stesso q (kPa)
−6.00	−2.000	−0.0509	**−0.3395**	0.1698
−3.00	−1.000	−0.1592	**−1.0610**	1.0610
−1.73	−0.577	−0.2067	**−1.3783**	2.3873
0.00	0.000	0.0000	**0.0000**	4.2441
1.73	0.577	0.2067	**1.3783**	2.3873
3.00	1.000	0.1592	**1.0610**	1.0610
6.00	2.000	0.0509	**0.3395**	0.1698

Per il carico orizzontale la curva è **antisimmetrica** rispetto a x = 0 (funzione dispari); la curva del carico verticale è invece pari ed è massima sotto il carico (4.244 kPa). Per x/z = 1 i due carichi danno la stessa grandezza (1.061 kPa).



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

ESEMPIO

Dati

Carico	$q = 10$ **kN/m, inclinato di** α **rispetto alla verticale;** $x_L = 0$
Punto A	$x = 5$ **m,** $z = 4$ **m**
Pendenze	$\alpha = 0; 10; 20; 30; 45; 60; 90^\circ$

RICHIESTO

Per ciascuna inclinazione del pendio $\mathbf{q_V}$, $\mathbf{q_H}$, $\mathbf{\Delta\sigma_{z(V)}}$, $\mathbf{\Delta\sigma_{z(H)}}$ e il totale; dettaglio per α = 45°; l'inclinazione del pendio per cui il totale è massimo.

Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Coefficienti per carico unitario (x = 5, z = 4): ciascuna componente è moltiplicata per il proprio coefficiente

$$a = \frac{2z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{128}{5{,}281.0} = 0.024238$$

$$b = \frac{2xz^2}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{160}{5{,}281.0} = 0.030297 \qquad \Delta\sigma_z = q\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha)$$

2 α = 45° ($q_V = q_H$ = 7,071 kN/m)

$$\Delta\sigma_z = 10\,(0.024238)(0.7071) + 10\,(0.030297)(0.7071)$$
$$= 0.17139 + 0.21423 = \mathbf{0.38562}\ \text{kPa}$$

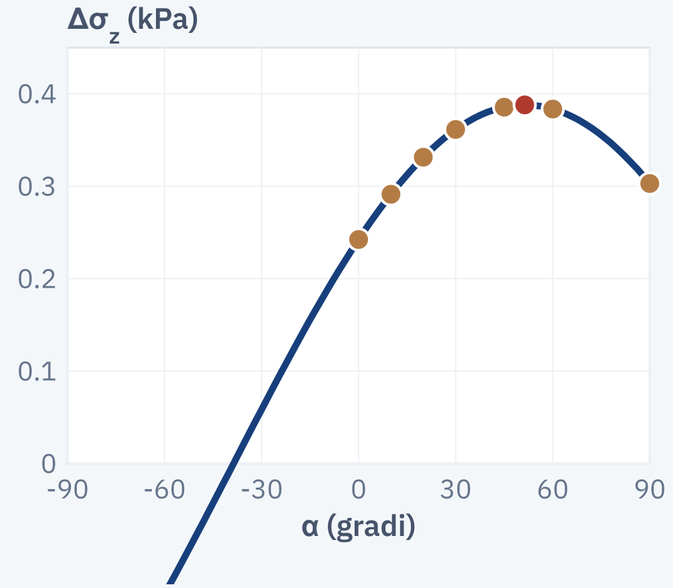
Verifica: essendo x/z = 1.25, si ha b/a = 1.25; il totale è massimo nella condizione tan α = b/a = x/z: per α = 51.34° si ottiene $\Delta\sigma_z = q\sqrt{(a^2 + b^2)}$ = **0.38799 kPa**.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

α (°)	q_V (kN/m)	q_H (kN/m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$ totale (kPa)
0	10.000	0.000	0.24238	0.00000	**0.24238**
10	9.848	1.736	0.23870	0.05261	**0.29131**
20	9.397	3.420	0.22776	0.10362	**0.33138**
30	8.660	5.000	0.20991	0.15149	**0.36139**
45	7.071	7.071	0.17139	0.21423	**0.38562**
60	5.000	8.660	0.12119	0.26238	**0.38357**
90	0.000	10.000	0.00000	0.30297	**0.30297**

Un carico verticale (α = 0) fornisce 0.24238 kPa; inclinando il carico verso il punto A entra in gioco la componente orizzontale e il totale aumenta: il valore massimo è 0.3880 kPa per α ≈ 51.3°. Con carico completamente orizzontale (α = 90°) scende a 0.3030 kPa. Un α negativo orienta la componente orizzontale in direzione opposta ad A e riduce il totale (figura).



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

ESEMPIO

Dati

Carico	**Il carico dell'Esempio 1: $q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$ (spinge nella direzione $+x$), $x_L = 0$**
Punti	$z = 4$ **m;** $x = -10; -5; 0; 5; 10$ **m**

RICHIESTO

Per ogni punto $\Delta\sigma_{z(V)}$, $\Delta\sigma_{z(H)}$ e il totale; dettaglio per x = −5 m e x = 0; l'asimmetria della curva.

Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 x = −5 m (il lato non caricato dal carico): componente verticale invariata, componente orizzontale negativa

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi((-5)^2+4^2)^2} = 0.22776\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(-5)(4^2)}{\pi(41)^2} = \mathbf{-0.10362}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.22776 + (-0.10362) = \mathbf{0.12414}\ \text{kPa}$$

2 x = 0 (direttamente sotto il carico): componente orizzontale nulla

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2q_V}{\pi z} = \frac{2(9.397)}{\pi(4)} = \mathbf{1.49557}\ \text{kPa}, \qquad \Delta\sigma_{z(H)} = 0$$

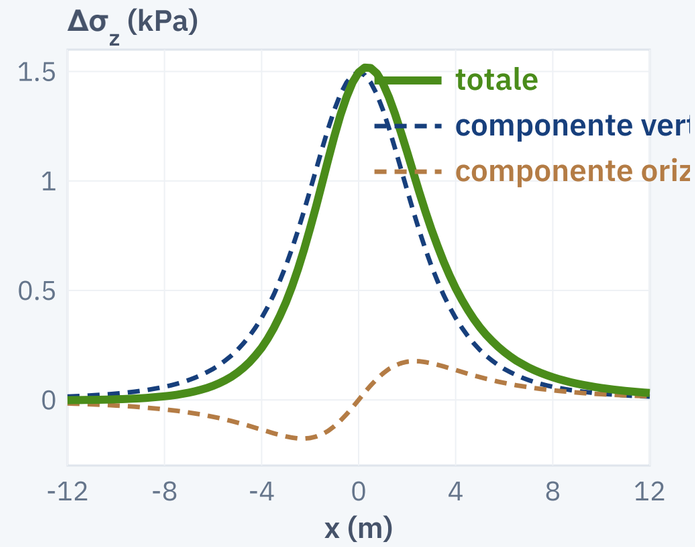
A x = +5 m, 0.3314 kPa; a x = −5 m, 0.1241 kPa: alla stessa distanza, la tensione è **2.67 volte** maggiore dal lato verso cui spinge il carico. La componente verticale è una funzione pari, la componente orizzontale una funzione dispari.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

x (m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$ totale (kPa)
−10	0.02845	−0.02589	**0.00256**
−5	0.22776	−0.10362	**0.12414**
0	1.49557	0.00000	**1.49557**
5	0.22776	0.10362	**0.33138**
10	0.02845	0.02589	**0.05434**

La curva totale è massima sotto il carico (x = 0) (1.4956 kPa) e decresce più lentamente dal lato verso cui il carico spinge: a x = 10 m 0.05434, a x = −10 m solo 0.00256 kPa.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

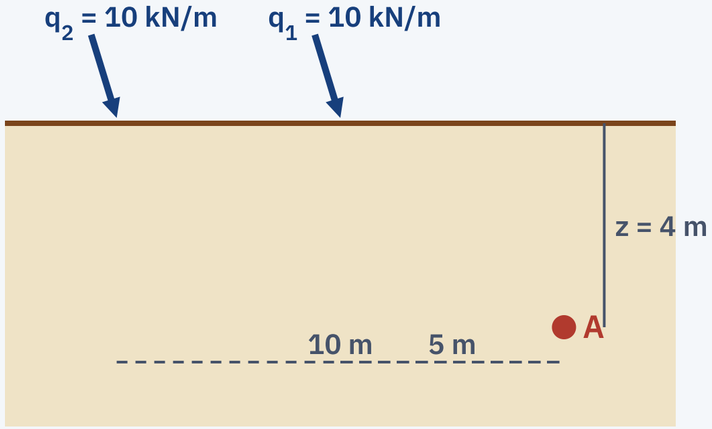
ESEMPIO

Dati

Carichi	**carico 1:** $q_1 = 10$ **kN/m,** $\alpha_1 = 20°$, $x_{L1} = 0$**; carico 2:** $q_2 = 10$ **kN/m,** $\alpha_2 = 20°$, $x_{L2} = -5$ **m**
Punto A	$x_A = 5$ **m;** $z = 4$ **m (poi** $2; 6; 8; 12$ **m)**

RICHIESTO

Contributo del carico 2 (verticale e orizzontale), somma dei due carichi; profilo con la profondità.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Carico 2 (x = 5 − (−5) = 10 m): le stesse componenti $q_V = 9.397$, $q_H = 3.420$ kN/m

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}202.8}{42{,}273.3} = 0.02845$$

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(10)(4^2)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}094.5}{42{,}273.3} = 0.02589 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = \mathbf{0.05434}\ \text{kPa}$$

2 Totale: il contributo del carico 1 è il valore dell'Esempio 1

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.33138 + 0.05434 = \mathbf{0.38573}\ \text{kPa}$$

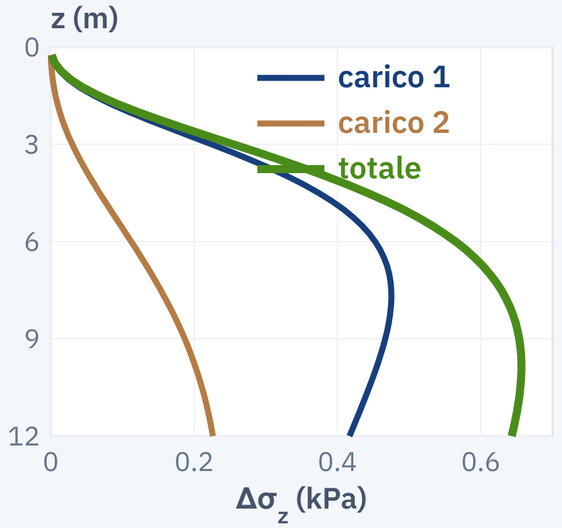
$\Delta\sigma_z$ = 0.38573 kPa (componenti verticali 0.25621, componenti orizzontali 0.12951). Il carico 2 aggiunge solo 0.05434 kPa: dista 10 m.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

z (m)	Carico 1: V + H	Carico 2: V + H	$\Delta\sigma_z$ totale (kPa)
2	0.0569 + 0.0518 = 0.1087	0.0044 + 0.0081 = 0.0125	**0.1212**
4	0.2278 + 0.1036 = 0.3314	0.0285 + 0.0259 = 0.0543	**0.3857**
6	0.3473 + 0.1053 = 0.4526	0.0699 + 0.0424 = 0.1122	**0.5648**
8	0.3867 + 0.0880 = 0.4746	0.1139 + 0.0518 = 0.1657	**0.6403**
12	0.3619 + 0.0549 = 0.4168	0.1736 + 0.0527 = 0.2263	**0.6431**

A ogni profondità le componenti verticali e orizzontali dei carichi sono sommate separatamente e il risultato è la somma dei due carichi. Il totale è 0.6403 kPa a z = 8 m e 0.6431 kPa a z = 12 m; il contributo del carico 2 aumenta con la profondità.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Sintesi

Punti chiave

Carico orizzontale: $\Delta\sigma_z = (2q/\pi) \times z^2/(x^2 + z^2)^2$; aumenta dal lato verso cui spinge ($x > 0$), diminuisce dal lato opposto ed è nulla sotto di esso; il valore massimo è $0.2067 \cdot (q/z)$ per $x/z = 1/\sqrt{3}$

Carico inclinato: $q_V = q \cos\alpha$ e $q_H = q \sin\alpha$; $\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(V)} + \Delta\sigma_{z(H)}$ (anche in un terreno elastico le tensioni delle componenti si sommano)

Esempio (q = 10 kN/m, α = 20°; A: x = 5, z = 4 m): $q_V = 9.397$, $q_H = 3.420$ kN/m; $\Delta\sigma_{z(V)} = 0.22776$ + $\Delta\sigma_{z(H)} = 0.10362$ = **0.33138 kPa**

Inclinazione e profondità: il totale è massimo quando $\tan\alpha = x/z$ ($\alpha = 51.3°$); la componente orizzontale ha il picco per $z = x$, la componente verticale per $z = \sqrt{3} \cdot x$

Due lati: 0.3314 a $x = +5$ m e 0.1241 kPa a $x = -5$ m; per **due carichi** le componenti si sommano separatamente (0.3857 kPa nell'esempio)

Bibliografia

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

NOTA

Tutti gli esempi numerici sono stati prodotti con il motore di calcolo del modulo stesso; il modulo restituisce gli stessi valori. Il modulo si apre con q = 10 kN/m, un carico con α = 20° e il punto A (x = 5 m, z = 4 m).

GeoTerva

Calcoli geotecnici online

Dalla teoria alla pratica

Inserire in GeoTerva i propri carichi lineari orizzontali o inclinati, le loro inclinazioni, le posizioni e il punto di interesse; il modulo fornisce il contributo delle componenti verticale e orizzontale, il valore totale $\Delta\sigma_z$, il profilo con la profondità, le curve di isovalore della tensione, la soluzione passo per passo e la relazione.

Aprire il modulo → **Pagina di teoria →**

Aprire dallo smartphone
I moduli di prova non richiedono registrazione.

Se si desidera utilizzarli nelle proprie lezioni: info@geoterva.com