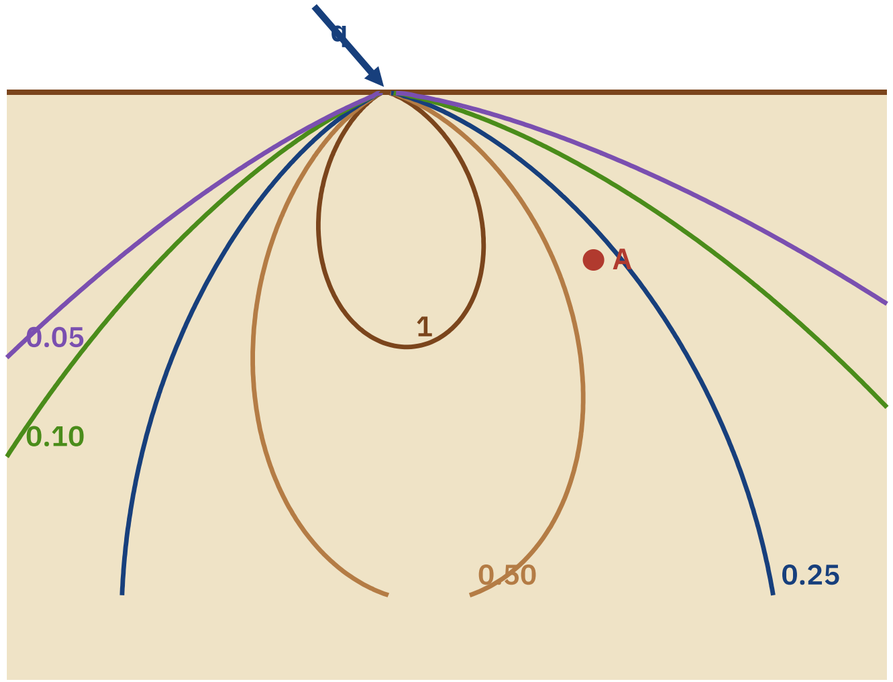
Présentation de cours de géotechnique · Diffusion des contraintes dans le sol

Contrainte sous une charge linéique horizontale

Cours : contrainte verticale engendrée dans le sol par des charges linéiques horizontales et inclinées ; l'exemple d'introduction est résolu à la main de bout en bout avec ses composantes, les profils en profondeur et latéraux étant donnés dans des tableaux.

- Charge linéique horizontale
- Composantes d'une charge inclinée
- Convention de signe
- Superposition
- Courbes d'isocontraintes



Introduction

Que verrons-nous dans ce cours ?

La contrainte verticale due à une charge linéique **horizontale** en surface (frottement à la base d'un mur, force de freinage, poussée d'un arc) : $\Delta\sigma_z = (2q/\pi) \times z^2/(x^2 + z^2)^2$

Convention de signe : du côté vers lequel la charge pousse ($x > 0$) la contrainte augmente, de l'autre côté elle diminue, et elle est nulle à l'aplomb de la charge ; la valeur maximale se situe en $x/z = 1/\sqrt{3}$

Décomposition d'une charge linéique inclinée en ses composantes : $q_V = q \cos \alpha$, $q_H = q \sin \alpha$; superposition des deux contraintes

Effet de l'inclinaison, de la profondeur et de la position latérale sur la contrainte ; **superposition** pour plusieurs charges

L'exemple initial du module ($q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$) traité **de bout en bout à la main** ; la contribution de chaque composante dans les tableaux

DÉROULÉ DU COURS

Chaque thème est traité en **trois étapes** :

1 · **Théorie** : formule et justification

2 · **Énoncé** : données et à déterminer

3 · **Solution** : étape par étape, avec les valeurs numériques

Exemple : $q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$ par rapport à la verticale ; point A : $x = 5$ m, $z = 4$ m.

Charges linéiques horizontales et inclinées

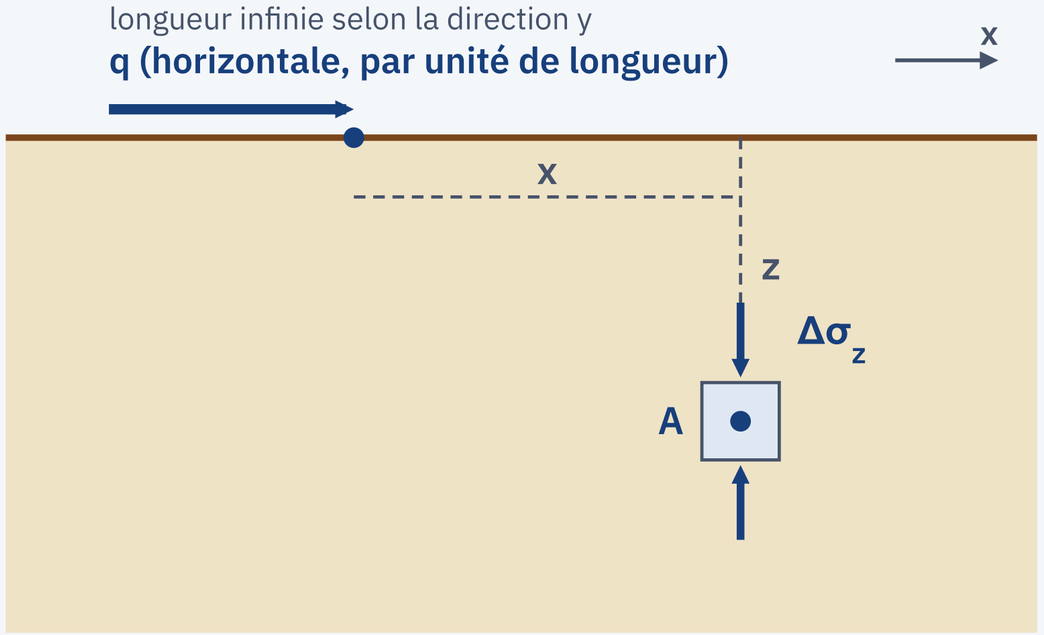
THÉORIE

Une charge linéique peut aussi, au lieu de presser la surface vers le bas, la pousser le long de la surface ; le frottement à la base d'un mur, la force de freinage ferroviaire et la poussée d'une voûte en sont des exemples.

Le module calcule l'accroissement de contrainte verticale sous une charge linéique horizontale, ainsi que sous une charge linéique inclinée par superposition de ses deux composantes.

La charge linéique flexible est de longueur infinie dans la direction y, q est la charge par unité de longueur, et l'état de déformation plane est valable dans chaque section transversale.

Le sol est un massif semi-infini homogène, isotrope et élastique linéaire ; $\Delta\sigma_z$ n'est que l'accroissement de contrainte dû à la charge.



Valeur de $\Delta\sigma_z$ d'une charge linéique horizontale

THÉORIE

Pour une charge linéique horizontale, la solution élastique donne l'accroissement de contrainte verticale au point A sous la forme $\Delta\sigma_z = (2q/\pi) \times z^2/(x^2 + z^2)^2$.

Le signe de la contrainte dépend de la valeur de x : la contrainte verticale augmente du côté vers lequel la charge pousse (x > 0), diminue de l'autre côté et est nulle à l'aplomb de la charge (x = 0).

Sous forme adimensionnelle : **$\Delta\sigma_z/(q/z) = (2/\pi)(x/z) / [(x/z)^2 + 1]^2$** ; une seule courbe sert pour tout q et tout z.

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q}{\pi}\,\frac{x\,z^2}{(x^2+z^2)^2}$$

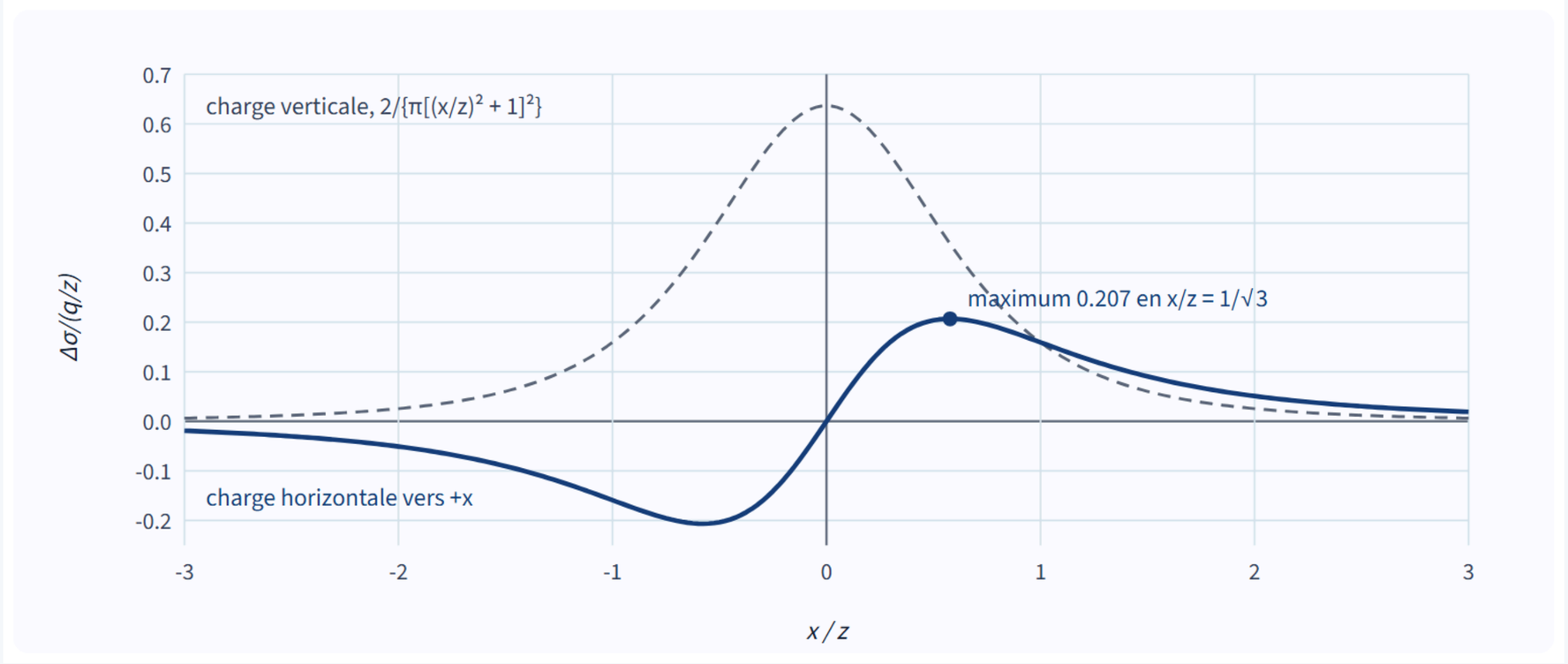
$$\frac{\Delta\sigma_z}{q/z} = \frac{2}{\pi}\,\frac{x/z}{\left[(x/z)^2+1\right]^2}$$

VALEURS DE $\Delta\sigma_z/(q/z)$ (MODULE)

x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$
0.00	0.000	0.70	0.201
0.10	0.062	0.80	0.189
0.20	0.118	0.90	0.175
0.30	0.161	1.00	0.159
0.40	0.189	1.25	0.121
0.50	0.204	1.50	0.090
0.60	0.207	2.00	0.051

$\Delta\sigma_z/(q/z)$ en fonction de x/z

THÉORIE



Δσz/(q/z) en fonction de x/z sous une charge linéique horizontale (trait plein) et, en tirets, sous une charge verticale de même intensité. La charge horizontale agit vers +x.

Composantes et superposition

THÉORIE

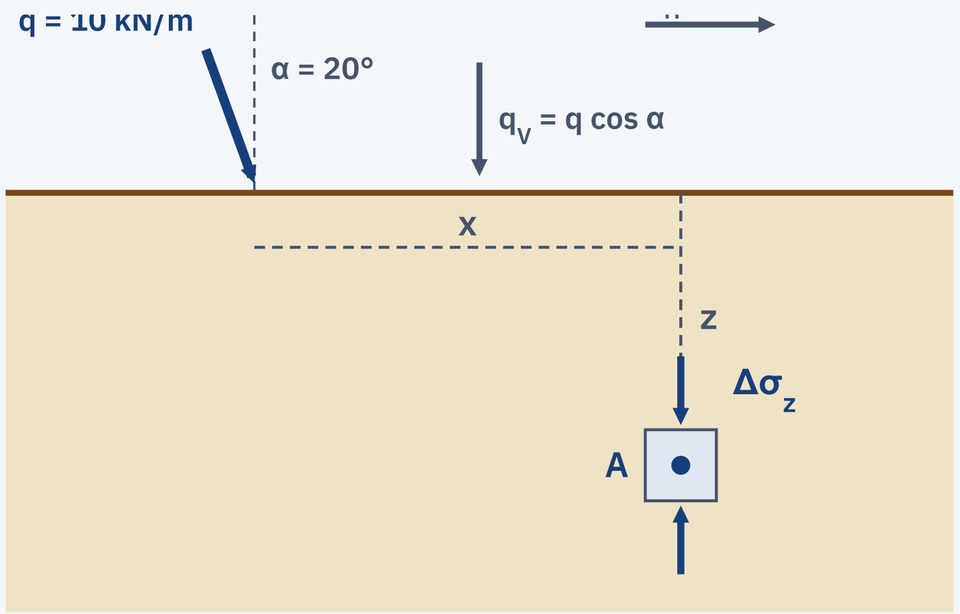
Une charge linéique inclinée est la somme des composantes d'une charge linéique q inclinée d'un angle α par rapport à la verticale ; le sol étant élastique, les contraintes des composantes s'ajoutent.

α = 90° correspond à une charge entièrement horizontale, α = 0 à une charge verticale.

Des charges linéiques supplémentaires, chacune définie par sa propre intensité, son inclinaison et sa position, sont saisies une à une avec Ajouter une charge linéique (huit au maximum ; deux ne peuvent pas occuper la même position).

$$q_V = q\cos\alpha, \qquad q_H = q\sin\alpha$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_V\, z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} + \frac{2q_H}{\pi}\,\frac{x\, z^2}{(x^2+z^2)^2}$$



Énoncé

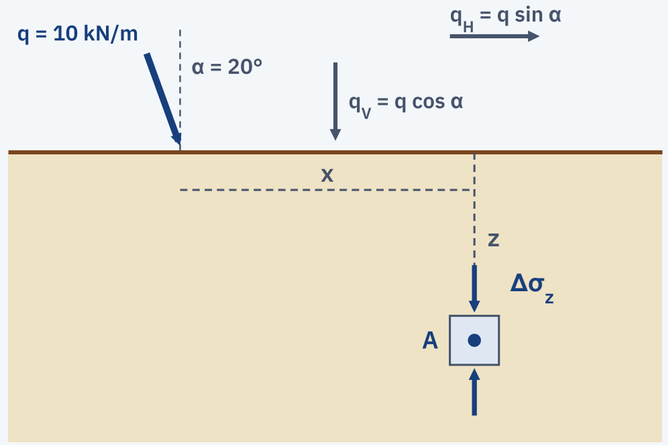
EXEMPLE

Données

Charge	**charge linéique $q = 10$ kN/m, inclinée de $\alpha = 20°$ par rapport à la verticale (composante horizontale dans la direction $+x$), $x_L = 0$**
Point A	$x = 5$ m, $z = 4$ m
Sol	**milieu semi-infini homogène et élastique ; déformation plane**

À DÉTERMINER

q_V, **q_H** ; valeur de **$\Delta\sigma_z$** pour chaque composante et **$\Delta\sigma_z$** total.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Composantes de la charge inclinée (α = 20°)

$$q_V = q\cos\alpha = 10\cos 20^\circ = \mathbf{9.397}\ \mathrm{kN/m}$$

$$q_H = q\sin\alpha = 10\sin 20^\circ = \mathbf{3.420}\ \mathrm{kN/m}$$

2 Contrainte de la composante verticale (x = 5, z = 4)

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2q_V z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{1{,}202.8}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.22776}\ \mathrm{kPa}$$

La composante verticale seule donne **0.22776 kPa** ; la contribution de la composante horizontale figure sur la page suivante.

Solution (2/2)

SOLUTION

3 Contrainte de la composante horizontale (x = 5 m : côté vers lequel la charge pousse, signe positif)

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2q_H}{\pi}\,\frac{xz^2}{(x^2+z^2)^2} = \frac{2(3.420)(5)(4^2)}{\pi(5^2+4^2)^2} = \frac{547.23}{\pi\,(1{,}681)} = \mathbf{0.10362}\ \text{kPa}$$

4 Superposition

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(V)} + \Delta\sigma_{z(H)} = 0.22776 + 0.10362 = \mathbf{0.33138}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.33138 kPa (verticale 0.22776 + horizontale 0.10362). Vérification : pour x/z = 1.25, $\Delta\sigma_{z(V)}/(q_V/z)$ = 0.0970, $\Delta\sigma_{z(H)}/(q_H/z)$ = 0.1212 ; les produits sont 0.22776 et 0.10362 kPa. Le module donne la même valeur.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

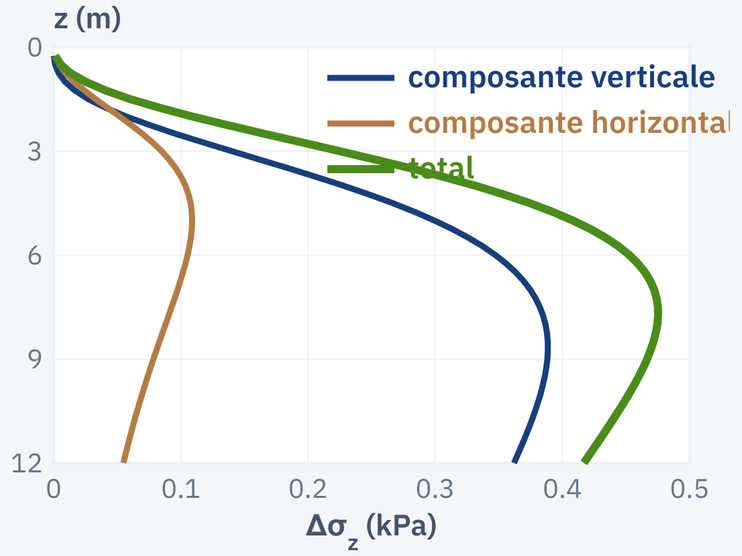
EXEMPLE

Données

Charge	**Charge de l'exemple 1 : $q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$, $x_L = 0$**
Points	$x_A = 5$ **m ;** $z = 1.2$ **;** 2.4 **; … ;** 12 **m (lignes de profil du module)**

À DÉTERMINER

Pour chaque profondeur : $\Delta\sigma_{z(V)}$, $\Delta\sigma_{z(H)}$ et le total ; solution détaillée pour z = 5 m ; profondeurs auxquelles les composantes sont maximales.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Composante verticale (x = 5, z = 5 : $x^2 + z^2 = 50$)

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(5^3)}{\pi(50)^2} = \frac{2{,}349.2}{7{,}854.0} = \mathbf{0.29911}\ \text{kPa}$$

2 Composante horizontale

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(5)(5^2)}{\pi(50)^2} = \frac{855.05}{7{,}854.0} = \mathbf{0.10887}\ \text{kPa}$$

3 Total

$$\Delta\sigma_z = 0.29911 + 0.10887 = \mathbf{0.40798}\ \text{kPa}$$

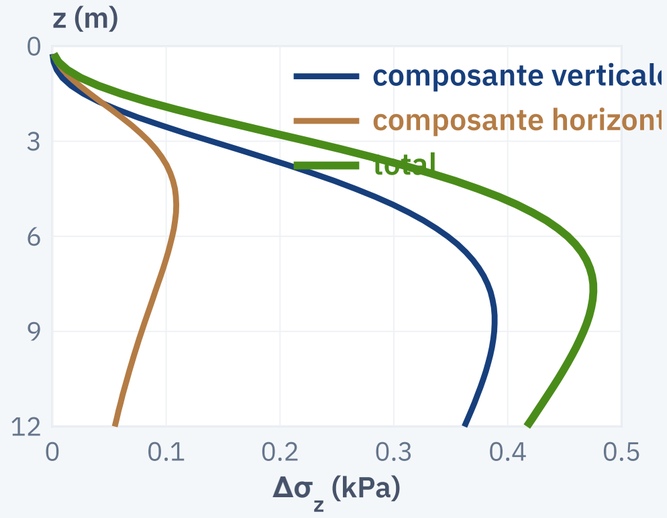
En z = 5 m, $\Delta\sigma_z$ = 0.40798 kPa ; cette valeur est supérieure à celle obtenue en z = 4 m (0.33138 kPa). Le tableau se trouve à la page suivante.

Solution (2/2)

SOLUTION

z (m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
1.2	0.01479	0.02243	**0.03721**
2.4	0.08740	0.06628	**0.15368**
3.6	0.19370	0.09792	**0.29161**
4.8	0.28667	0.10869	**0.39536**
6.0	0.34726	0.10533	**0.45259**
7.2	0.37817	0.09559	**0.47376**
8.4	0.38829	0.08412	**0.47241**
9.6	0.38559	0.07309	**0.45868**
10.8	0.37563	0.06330	**0.43893**
12.0	0.36194	0.05489	**0.41683**

La contrainte due à la composante horizontale est maximale à la profondeur z = x = 5 m ($q_H/(2\pi x)$ = 0.10887 kPa), puis décroît ; la composante verticale est maximale à z = $\sqrt{3}\cdot x$ = 8.66 m (0.3886 kPa). Le total atteint au plus 0.4753 kPa à z ≈ 7.7 m.



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

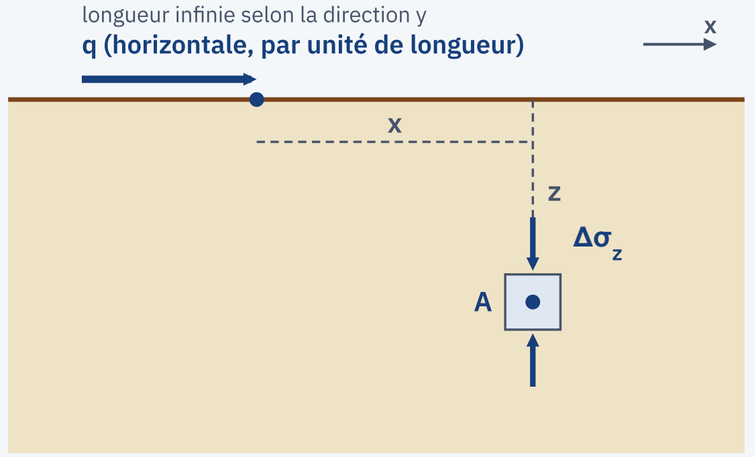
EXEMPLE

Données

Charge	**charge linéique horizontale $q = 20$ kN/m ($\alpha = 90°$), dans la direction $+x$, $x_L = 0$**
Points	$z = 3$ **m;** $x = -6; -3; -1.73; 0; 1.73; 3;$ 6 **m (**$x/z = -2$ **... 2)**

À DÉTERMINER

Pour chaque point : **x/z**, **$\Delta\sigma_z/(q/z)$** et **$\Delta\sigma_z$** ; comparaison avec une charge verticale de même intensité ; valeur maximale.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 x = 3 m (x/z = 1) : côté poussé par la charge

$$\Delta\sigma_z/(q/z) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(1^2+1)^2} = \frac{1}{2\pi} = 0.15915$$

$$\Delta\sigma_z = 0.15915\,(20/3) = \mathbf{1.0610}\ \mathrm{kPa} \qquad (x = -3\ \mathrm{m}:\ -\mathbf{1.0610}\ \mathrm{kPa})$$

2 Valeur maximale : x/z = 1/√3 = 0.5774 (x = 1.732 m)

$$\Delta\sigma_z/(q/z) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{0.5774}{(1/3+1)^2} = 0.20675$$

$$\Delta\sigma_z = 0.20675\,(20/3) = \mathbf{1.3783}\ \mathrm{kPa}$$

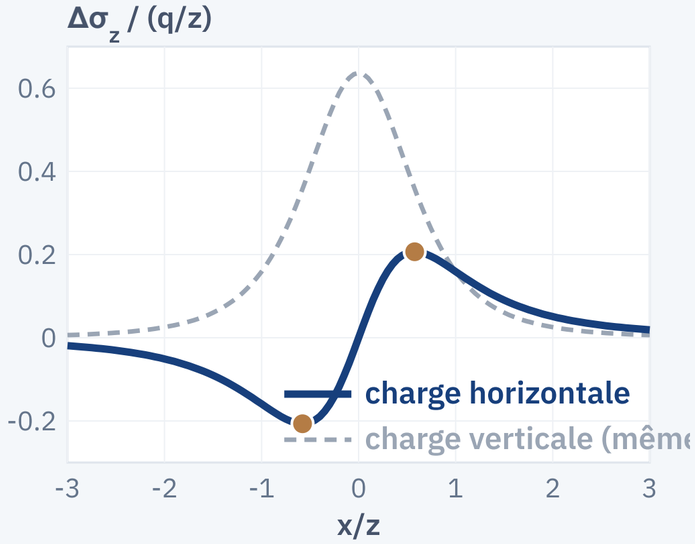
Sous la charge horizontale (x = 0), la contrainte est **nulle** ; elle augmente du côté vers lequel la charge pousse et diminue de la même valeur du côté opposé. La valeur maximale est 0.2067·(q/z) = 1.378 kPa, pour x/z = 0.5774.

Solution (2/2)

SOLUTION

x (m)	x/z	$\Delta\sigma_z/(q/z)$	Charge horizontale $\Delta\sigma_z$ (kPa)	Charge verticale, même q (kPa)
−6.00	−2.000	−0.0509	**−0.3395**	0.1698
−3.00	−1.000	−0.1592	**−1.0610**	1.0610
−1.73	−0.577	−0.2067	**−1.3783**	2.3873
0.00	0.000	0.0000	**0.0000**	4.2441
1.73	0.577	0.2067	**1.3783**	2.3873
3.00	1.000	0.1592	**1.0610**	1.0610
6.00	2.000	0.0509	**0.3395**	0.1698

Pour la charge horizontale, la courbe est **antisymétrique** par rapport à x = 0 (fonction impaire) ; la courbe de la charge verticale est en revanche paire et atteint son maximum sous la charge (4.244 kPa). En x/z = 1, les deux charges donnent la même intensité (1.061 kPa).



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

EXEMPLE

Données

Charge	$q = 10$ **kN/m, inclinée de** α **par rapport à la verticale ;** $x_L = 0$
Point A	$x = 5$ **m,** $z = 4$ **m**
Pentes	$\alpha = 0; 10; 20; 30; 45; 60; 90°$

À DÉTERMINER

Pour chaque inclinaison, $\mathbf{q_V}$, $\mathbf{q_H}$, $\mathbf{\Delta\sigma_{z(V)}}$, $\mathbf{\Delta\sigma_{z(H)}}$ et le total ; détail pour α = 45° ; inclinaison pour laquelle le total est maximal.

Solution (1/2)

SOLUTION

1 Coefficients pour une charge unitaire (x = 5, z = 4) : chaque composante est multipliée par son propre coefficient

$$a = \frac{2z^3}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{128}{5{,}281.0} = 0.024238$$

$$b = \frac{2xz^2}{\pi(x^2+z^2)^2} = \frac{160}{5{,}281.0} = 0.030297 \qquad \Delta\sigma_z = q\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha)$$

2 α = 45° ($q_V = q_H$ = 7,071 kN/m)

$$\Delta\sigma_z = 10\,(0.024238)(0.7071) + 10\,(0.030297)(0.7071)$$
$$= 0.17139 + 0.21423 = \mathbf{0.38562}\ \mathrm{kPa}$$

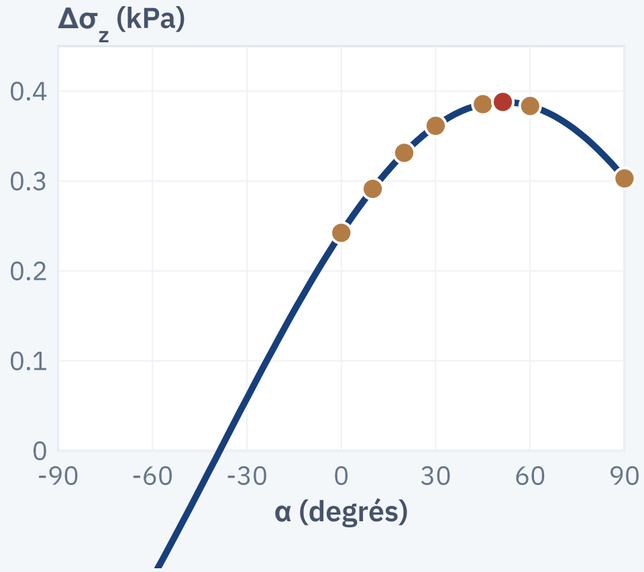
Vérification : x/z = 1.25, donc b/a = 1.25 ; le total est maximal lorsque tan α = b/a = x/z : pour α = 51.34°, $\Delta\sigma_z = q\sqrt{a^2 + b^2}$ = **0.38799 kPa**.

Solution (2/2)

SOLUTION

α (°)	q_V (kN/m)	q_H (kN/m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
0	10.000	0.000	0.24238	0.00000	**0.24238**
10	9.848	1.736	0.23870	0.05261	**0.29131**
20	9.397	3.420	0.22776	0.10362	**0.33138**
30	8.660	5.000	0.20991	0.15149	**0.36139**
45	7.071	7.071	0.17139	0.21423	**0.38562**
60	5.000	8.660	0.12119	0.26238	**0.38357**
90	0.000	10.000	0.00000	0.30297	**0.30297**

Une charge verticale (α = 0) donne 0.24238 kPa ; à mesure que la charge s'incline vers le point A, la composante horizontale intervient et le total augmente : la valeur maximale est de 0.3880 kPa pour α ≈ 51.3°. Pour une charge entièrement horizontale (α = 90°), elle redescend à 0.3030 kPa. Un α négatif oriente la composante horizontale à l'opposé de A et réduit le total (figure).



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

EXEMPLE

Données

Charge	**La charge de l'exemple 1 : $q = 10$ kN/m, $\alpha = 20°$ (poussant dans la direction $+x$), $x_L = 0$**
Points	$z = 4$ **m;** $x = -10; -5; 0; 5; 10$ **m**

À DÉTERMINER

Pour chaque point, $\Delta\sigma_{z(V)}$, $\Delta\sigma_{z(H)}$ et le total ; détail pour x = −5 m et x = 0 ; asymétrie de la courbe.

Solution (1/2)

SOLUTION

1 x = −5 m (côté non poussé par la charge) : composante verticale identique, composante horizontale négative

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi((-5)^2+4^2)^2} = 0.22776\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(-5)(4^2)}{\pi(41)^2} = \mathbf{-0.10362}\ \text{kPa}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.22776 + (-0.10362) = \mathbf{0.12414}\ \text{kPa}$$

2 x = 0 (directement sous la charge) : composante horizontale nulle

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2q_V}{\pi z} = \frac{2(9.397)}{\pi(4)} = \mathbf{1.49557}\ \text{kPa}, \qquad \Delta\sigma_{z(H)} = 0$$

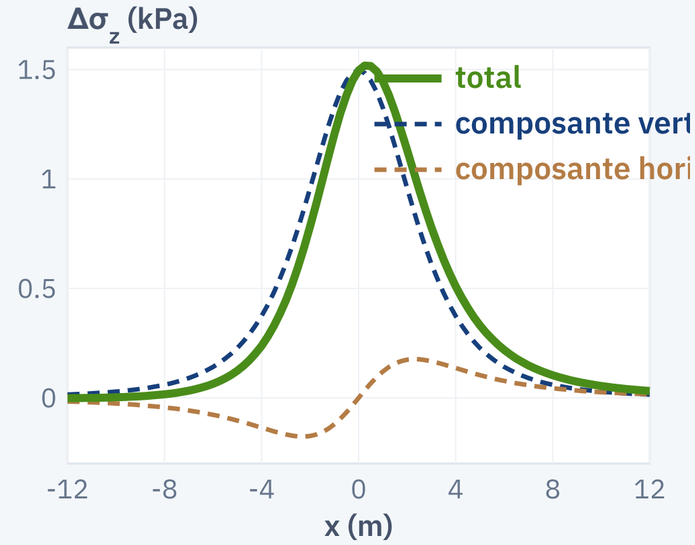
À x = +5 m, 0.3314 kPa ; à x = −5 m, 0.1241 kPa : à la même distance, la contrainte est **2.67 fois** plus grande du côté vers lequel la charge pousse. La composante verticale est une fonction paire, la composante horizontale une fonction impaire.

Solution (2/2)

SOLUTION

x (m)	$\Delta\sigma_{z(V)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_{z(H)}$ (kPa)	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
−10	0.02845	−0.02589	**0.00256**
−5	0.22776	−0.10362	**0.12414**
0	1.49557	0.00000	**1.49557**
5	0.22776	0.10362	**0.33138**
10	0.02845	0.02589	**0.05434**

La courbe totale est maximale sous la charge (x = 0) (1.4956 kPa) et décroît plus lentement du côté vers lequel la charge pousse : à x = 10 m, 0.05434 ; à x = −10 m, seulement 0.00256 kPa.



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

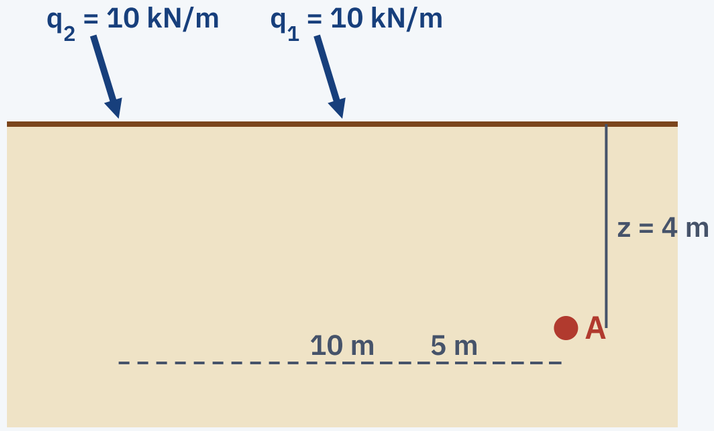
EXEMPLE

Données

Charges	**charge 1 :** $q_1 = 10$ **kN/m,** $\alpha_1 = 20°$, $x_{L1} = 0$ **; charge 2 :** $q_2 = 10$ **kN/m,** $\alpha_2 = 20°$, $x_{L2} = -5$ **m**
Point A	$x_A = 5$ **m ;** $z = 4$ **m (puis** 2 **;** 6 **;** 8 **;** 12 **m)**

À DÉTERMINER

Contribution de la charge 2 (verticale et horizontale), somme des deux charges ; profil en profondeur.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Charge 2 (x = 5 – (–5) = 10 m) : mêmes composantes q_V = 9.397, q_H = 3.420 kN/m

$$\Delta\sigma_{z(V)} = \frac{2(9.397)(4^3)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}202.8}{42{,}273.3} = 0.02845$$

$$\Delta\sigma_{z(H)} = \frac{2(3.420)(10)(4^2)}{\pi(10^2+4^2)^2} = \frac{1{,}094.5}{42{,}273.3} = 0.02589 \qquad \Delta\sigma_{z(2)} = \mathbf{0.05434}\ \mathrm{kPa}$$

2 Total : la contribution de la charge 1 est la valeur de l'exemple 1

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 0.33138 + 0.05434 = \mathbf{0.38573}\ \mathrm{kPa}$$

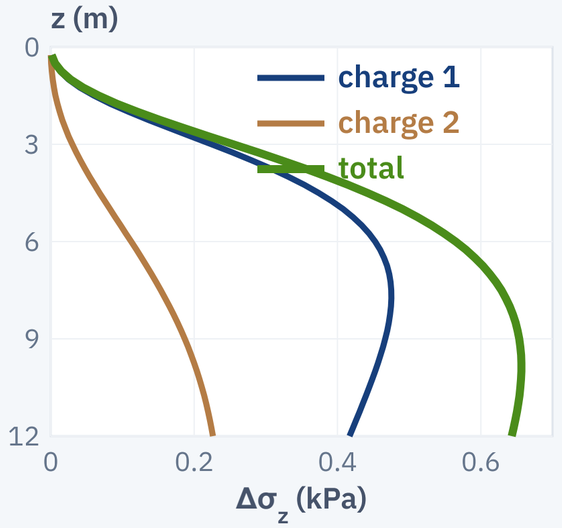
$\Delta\sigma_z$ = 0.38573 kPa (composantes verticales 0.25621, composantes horizontales 0.12951). La charge 2 n'ajoute que 0.05434 kPa : elle est située à 10 m.

Solution (2/2)

SOLUTION

z (m)	Charge 1 : V + H	Charge 2 : V + H	$\Delta\sigma_z$ total (kPa)
2	0.0569 + 0.0518 = 0.1087	0.0044 + 0.0081 = 0.0125	**0.1212**
4	0.2278 + 0.1036 = 0.3314	0.0285 + 0.0259 = 0.0543	**0.3857**
6	0.3473 + 0.1053 = 0.4526	0.0699 + 0.0424 = 0.1122	**0.5648**
8	0.3867 + 0.0880 = 0.4746	0.1139 + 0.0518 = 0.1657	**0.6403**
12	0.3619 + 0.0549 = 0.4168	0.1736 + 0.0527 = 0.2263	**0.6431**

À chaque profondeur, les composantes verticale et horizontale des charges sont additionnées séparément, et le résultat est la somme des deux charges. Le total est de 0.6403 kPa à z = 8 m et de 0.6431 kPa à z = 12 m ; la part de la charge 2 augmente en profondeur.



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Synthèse

Points à retenir

Charge horizontale : $\Delta\sigma_z = (2q/\pi) \times z^2/(x^2 + z^2)^2$; elle augmente du côté vers lequel la charge pousse ($x > 0$), diminue du côté opposé et est nulle à l'aplomb de la charge ; la valeur maximale est $0.2067 \cdot (q/z)$ pour $x/z = 1/\sqrt{3}$

Charge inclinée : $q_V = q \cos\alpha$ et $q_H = q \sin\alpha$; $\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(V)} + \Delta\sigma_{z(H)}$ (dans un sol élastique, les contraintes dues aux composantes s'additionnent)

Exemple (q = 10 kN/m, α = 20° ; A : x = 5, z = 4 m) : $q_V = 9.397$, $q_H = 3.420$ kN/m ; $\Delta\sigma_{z(V)} = 0.22776$ + $\Delta\sigma_{z(H)} = 0.10362$ = **0.33138 kPa**

Inclinaison et profondeur : le total est maximal lorsque $\tan\alpha = x/z$ ($\alpha = 51.3°$) ; la composante horizontale atteint son maximum en $z = x$, la composante verticale en $z = \sqrt{3} \cdot x$

Deux côtés : 0.3314 à $x = +5$ m et 0.1241 kPa à $x = -5$ m ; pour **deux charges**, les composantes sont additionnées séparément (0.3857 kPa dans l'exemple)

Références bibliographiques

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

REMARQUE

Tous les exemples numériques ont été produits avec le moteur de calcul propre du module ; le module donne les mêmes valeurs. Le module s'ouvre avec une charge q = 10 kN/m, α = 20° et le point A (x = 5 m, z = 4 m).

GeoTerva

Calculs géotechniques en ligne

De la théorie à la pratique

Saisir dans GeoTerva ses propres charges linéiques horizontales ou inclinées, leurs inclinaisons, leurs positions et son point d'étude ; le module fournit conjointement la contribution des composantes verticale et horizontale, la valeur totale de $\Delta\sigma_z$, le profil en profondeur, les courbes d'égale contrainte, la solution pas à pas et le rapport.

Ouvrir sur smartphone
Les modules d'essai ne nécessitent pas d'inscription.

Ouvrir le module →

Page de théorie →

Si vous souhaitez les utiliser dans vos cours : info@geoterva.com