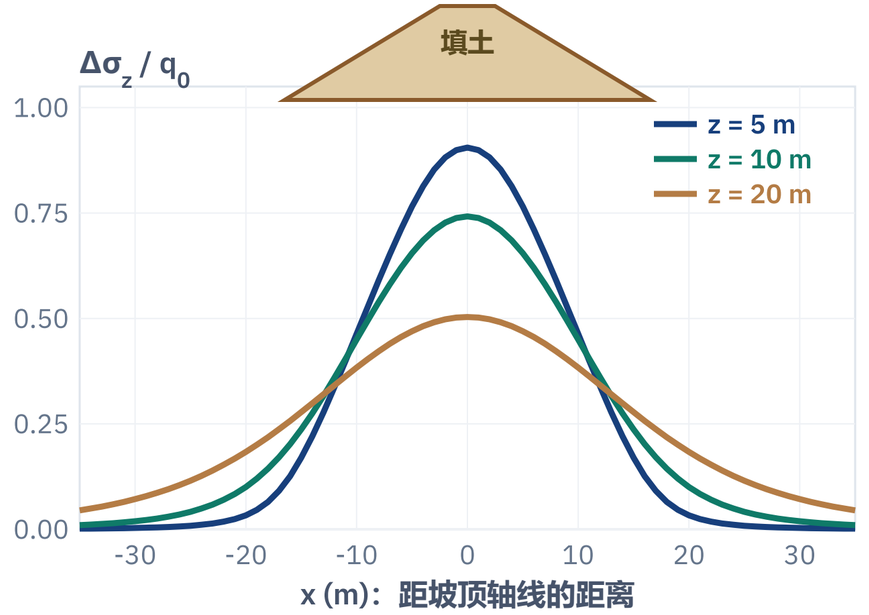
岩土工程讲义 · 土体中的应力

路堤下的应力

讲义：路堤（梯形荷载）下的竖向应力；Osterberg 解、条形荷载叠加以及手算算例。

- $q_0 = \gamma H$
- Osterberg I_2
- 三个条形荷载
- 坡下与坡侧
- 多个路堤



引言

本讲内容

地面上长条形、**梯形断面路堤**（公路路堤、铁路路堤、堤坝）下方的竖向附加应力：荷载$q_0 = \gamma H$，问题为二维问题

Osterberg解：对于半幅路堤，$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$；$I_2$仅取决于$B_1/z$和$B_2/z$

路堤顶下方，两个半部分**相加**；路堤侧旁，则由较大的一半**减去**较小的一半

得到相同结果的**三个条带之和**：顶部条带加两个三角形条带；模块即按此方式计算

多个填方的应力**可以叠加**

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：公式及其依据

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

算例填方：H = 7 m，γ = 17.5 kN/m³，顶面宽5 m，边坡宽14 m。A_1位于顶面中心下方，A_2位于距左坡脚5 m处的点下方；二者均位于深度z = 5 m处。

梯形断面填土

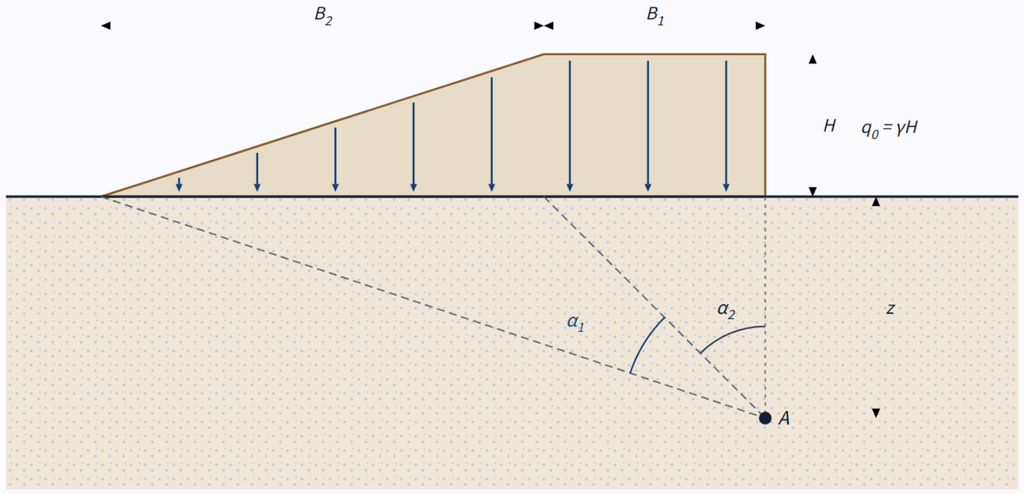
理论

公路或铁路路堤、堤防、长条形堆载：作用于地基上的**梯形截面**填土荷载

单位面积上的重量在路堤顶之下为$q_0 = \gamma H$，并在坡脚处线性减小至**零**

填方很长：问题为**二维问题**（平面应变），与条形荷载的情形相同

填方的自身刚度忽略不计，作为柔性荷载作用于地表；土体为均质、各向同性的线弹性半空间；$\Delta\sigma_z$仅为填方所引起的增量



$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$

理论

对于A点位于宽度B_1内边缘所在铅垂线下方的**半幅填方**（$q_0 = \gamma H$；角度以弧度计）：

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[\frac{B_1 + B_2}{B_2}\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) - \frac{B_1}{B_2}\,\alpha_2\right]$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{B_1 + B_2}{z} - \tan^{-1}\frac{B_1}{z} \qquad \alpha_2 = \tan^{-1}\frac{B_1}{z}$$

简言之，**$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$**：影响系数$I_2$仅取决于**$B_1/z$**和**$B_2/z$**(Osterberg 1957)

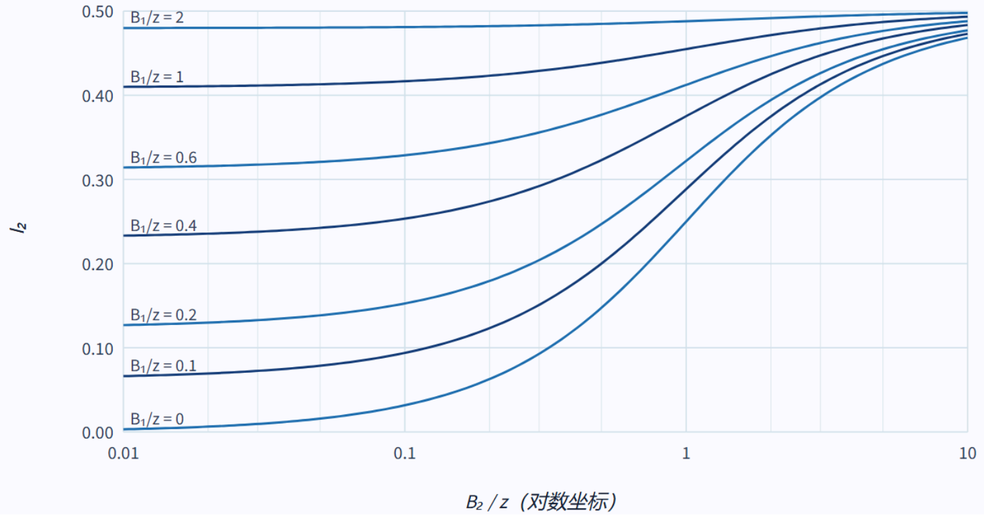
I_2与两个半块

理论

坡顶下方的一点将填方分为左、右**两半**；I_2值相加：$\Delta\sigma_z = q_0(I_{2,left} + I_{2,right})$

对填方**旁侧**的某点，应从较大的半部分中**减去**较小的半部分

每一半的贡献至多为**0.5**



任意点，任意倾角

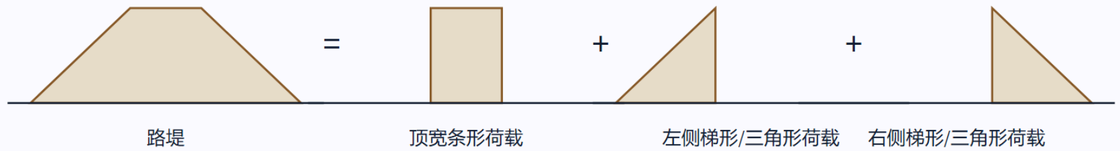
理论

梯形荷载=宽度为B_c、强度为q_0的**均布条形荷载**+在坡脚处由零增至堤顶边缘处q_0的**两个三角形条形荷载**

模块按此方式工作：无需区分情形，也无需查图；填方顶面下方的$q_0(I_{2,left} + I_{2,right})$可精确得到，且这一验算也显示在计算步骤中

边坡宽度可以不同；**$B_c = 0$**给出三角形断面的填方

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(\text{坡顶})} + \Delta\sigma_{z(\text{左侧边坡})} + \Delta\sigma_{z(\text{右侧边坡})}$$



叠加原理

理论

每个路堤由其自身的**γ、H、路堤顶、边坡**以及顶面轴线位置x_c确定（模块中最多八个）

两个填方从坡脚到坡脚所占的地面**不能共用**；两个坡脚可以相互接触

由于土体为弹性体，各路堤的应力按**相对于顶面轴线**的距离$(x - x_c)$计算，再将各应力叠加

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_{0,k}\,[\,\text{坡顶} + \text{左侧边坡} + \text{右侧边坡}\,]$$

题目

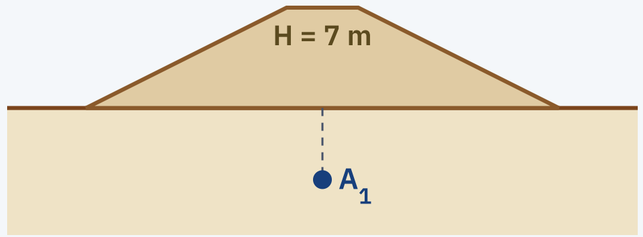
算例

已知条件

填土	$H = 7$ m，$\gamma = 17.5$ kN/m³；堤顶$B_c = 5$ m，边坡$L_1 = L_2 = 14$ m
点A_1	坡顶轴线下方，$z = 5$ m

求

$\Delta\sigma_z$：采用Osterberg解（两个半部分）以及三个条形荷载之和。



解答 (1/2)

解答

1 荷载、比值和角度（每一半：B_1 = 2.5 m；B_2 = 14 m；z = 5 m）

$$q_0 = \gamma H = 17.5\,(7) = \mathbf{122.5}\ \text{kPa} \qquad B_1/z = 0.5 \qquad B_2/z = 2.8$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}(2.5/5) = 0.4636 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}(16.5/5) - \alpha_2 = 1.2766 - 0.4636 = 0.8129$$

2 影响值与应力

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{16.5}{14}(1.2766) - \frac{2.5}{14}(0.4636)\right] = \frac{1.4217}{\pi} = \mathbf{0.4525}$$

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(I_{2,\text{左}} + I_{2,\text{右}}) = 122.5\,(0.4525 + 0.4525) = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

路堤顶中心下方5 m处**$\Delta\sigma_z$ = 110.87 kPa**：为路堤荷载(q_0 = 122.5 kPa)的90.5%。

解答 (2/2)

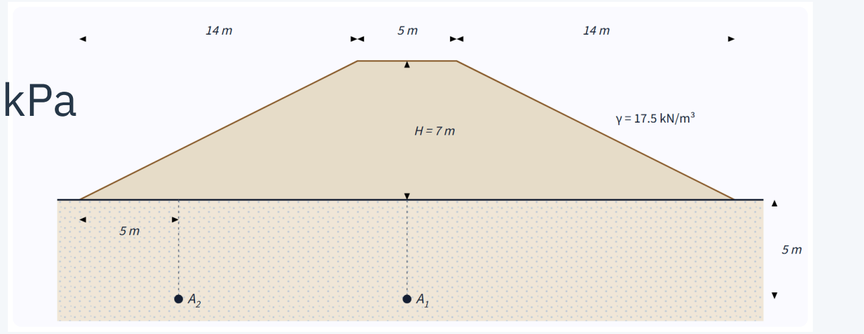
解答

1 顶面条带(q_0, B_c = 5 m)：$F(u) = \tan^{-1}(u/z) + zu/(u^2 + z^2)$

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[F(2.5) - F(-2.5)\right] = \frac{122.5}{\pi}\left(2 \times 0.8636\right) = \mathbf{67.35}\ \text{kPa}$$

2 左侧边坡（L_1 = 14 m；距左坡脚x' = 16.5 m）：$G(u) = (x'/2)[zu/(u^2 + z^2) + \tan^{-1}(u/z)] + z^3/[2(u^2 + z^2)]$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_0}{\pi L_1}\left[G(16.5) - G(2.5)\right] = \frac{245}{14\pi}\left(13.0316 - 9.1251\right) = \mathbf{21.76}\ \text{kPa}$$



3 右侧边坡（对称）与总和

$$\Delta\sigma_z = 67.35 + 21.76 + 21.76 = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

三个条带之和与Osterberg解相同：**110.87 kPa**。模块即按此途径计算，并在堤顶下方同时给出Osterberg值作为校核。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

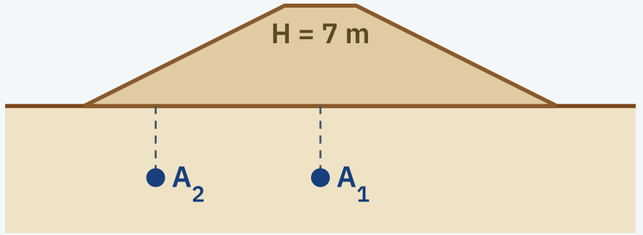
算例

求

$\Delta\sigma_z$：采用I_2值的加减（三个部分）计算，以及采用三个条带计算。

已知条件

填土	**算例1中的填土：$q_0 = 122.5$ kPa**
点A_2	**距左侧墙踵向内5 m ($x = -11.5$ m)，$z = 5$ m**



解答 (1/2)

解答

1 过A_2的竖线处划分：x = −11.5 m；高度5 m × 7/14 = 2.5 m → q = 2.5 × 17.5 = 43.75 kPa

部分	q (kPa)	B_1 (m)	B_2 (m)	B_1/z	B_2/z	I_2	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
(+)左侧小梯形荷载	43.75	0	5	0	1.0	0.25000	**10.94**
(+)右侧全高：矩形+斜坡形	122.5	14	14	2.8	2.8	0.49669	**60.84**
(−)边坡下方叠加的三角形	78.75	0	9	0	1.8	0.33859	**26.66**

2 I_2值(z = 5 m)

$$I_2(0;\,5) = \frac{1}{\pi}\,\frac{5}{5}\,\tan^{-1}1 = 0.25000 \qquad I_2(14;\,14) = \frac{1}{\pi}\left[2\,(1.3941) - 1.2278\right] = 0.49669$$

$$I_2(0;\,9) = \frac{1}{\pi}\,\tan^{-1}1.8 = 0.33859 \qquad \Delta\sigma_z = 10.94 + 60.84 - 26.66 = \mathbf{45.12}\ \text{kPa}$$

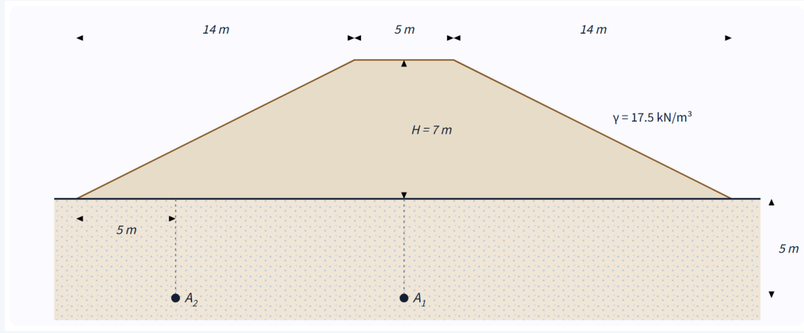
在A_2点处，**$\Delta\sigma_z$ = 45.12 kPa** ($\Delta\sigma_z/q_0$ = 0.3683)：约为堤顶中心下方数值(110.87 kPa)的41%。

解答 (2/2)

解答

条形	荷载	宽度 (m)	相对于该点的位置	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
坡顶条带	q_0 = 122.5	5	x = −11.5：u = x ± 2.5 = −9与−14	2.195
左侧边坡（三角形）	q_0 = 122.5	14	x′ = −11.5 + 16.5 = 5（自左侧坡脚起算）	42.304
右侧边坡（三角形）	q_0 = 122.5	14	x′ = 16.5 + 11.5 = 28	0.620
合计				**45.119**

三个条形荷载之和为**45.12 kPa**；与按分段方式由I_2求得的45.12 kPa相同。该点下方的大部分应力由**左侧边坡**承担(42.30 kPa)；坡顶条形荷载仅贡献2.19 kPa。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

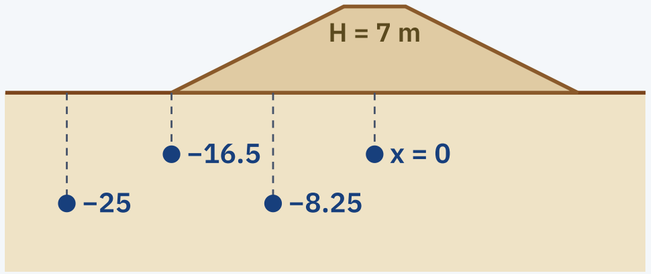
算例

求

各位置处的$\Delta\sigma_z$和$\Delta\sigma_z/q_0$；随深度变化规律的说明。

已知条件

填土	**算例1中的填土**（$q_0 = 122.5$ kPa）
位置	$x = 0$（顶面轴线）；-8.25（坡面中点）；-16.5（左坡脚）；-25 m（坡脚外8.5 m）
深度	$z = 2; 5; 10; 15; 20; 30$ m



解答 (1/2)

解答

z (m)	x = 0 m	x = -8.25 m	x = -16.50 m	x = -25 m	x = 0: $\Delta\sigma_z/q_0$
2	120.81	72.03	5.52	0.08	0.986
5	110.87	70.42	13.17	1.03	0.905
10	90.88	64.71	22.78	5.08	0.742
15	74.26	57.80	28.12	10.02	0.606
20	61.67	51.17	30.28	14.12	0.503
30	45.06	40.38	29.66	18.60	0.368

路堤顶面轴线下方的应力起始值接近q_0，并随深度减小(120.8 → 45.1 kPa)。**边坡中部**为72.0 → 40.4 kPa；**左坡脚**处近地表时较小(5.5 kPa)，在深处增大(29.7 kPa)；在距坡脚外侧8.5 m处，由0.08 kPa增至18.6 kPa。

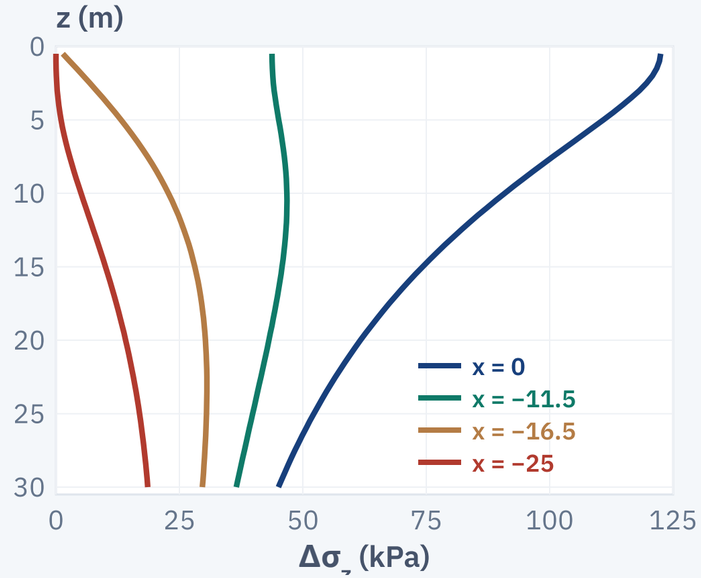
解答 (2/2)

解答

1 墙踵处及其外侧的最大应力（已扫描至120 m深度）

位置	最大$\Delta\sigma_z$ (kPa)	深度z(m)
x = −16.5（坡脚）	30.57	23.2
x = −25（位于外部）	19.62	39.9

路堤顶面轴线下方的应力随深度单调减小；在**坡脚**处和**坡脚外侧**，应力先增大后减小：路堤荷载随深度向两侧扩散。坡脚处最大值出现在z ≈ 23.2 m处，为30.6 kPa；在坡脚外侧8.5 m处，最大值出现得更深(z ≈ 39.9 m)且更小(19.6 kPa)。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

表	**对于**I_2，$B_1/z = 0 \ldots 2$**与**$B_2/z = 0.1 \ldots 10$
手动	$B_1 = B_2 = z$**:** $I_2(1;\ 1)$

求

I_2表；极限值；$B_1 = B_2 = z$时的详细计算。

解答 (1/2)

解答

$B_2/z \setminus B_1/z$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	1.0	2.0
0.1	0.0317	0.0939	0.1527	0.2534	0.3287	0.4166	0.4809
0.5	0.1476	0.2001	0.2470	0.3230	0.3769	0.4385	0.4847
1.0	0.2500	0.2885	0.3221	0.3751	0.4123	0.4548	0.4879
2.0	0.3524	0.3749	0.3943	0.4250	0.4465	0.4714	0.4916
5.0	0.4372	0.4465	0.4546	0.4674	0.4764	0.4869	0.4958
10.0	0.4683	0.4730	0.4770	0.4834	0.4879	0.4933	0.4978

各值均小于**0.5**；随着B_1/z和B_2/z增大，I_2趋近于0.5（$B_1 \to \infty$时，$I_2 = 0.5$）。由于堤顶下方两个半部分相加，$\Delta\sigma_z$最大为q_0。

解答 (2/2)

解答

1 角度($z = 1$; $B_1 = B_2 = 1$)

$$\alpha_2 = \tan^{-1} 1 = 0.7854$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1 = 1.1071 - 0.7854 = 0.3218$$

2 影响值

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{1}(1.1071) - \frac{1}{1}(0.7854)\right] = \frac{1.4289}{\pi} = \mathbf{0.45483}$$

$I_2(1; 1) = 0.45483$：与表中$B_1/z = 1$, $B_2/z = 1$的值相同。对于该半部荷载下方的点，$\Delta\sigma_z = 0.455\ q_0$。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

共同	$\gamma = 17.5$ kN/m³，$H = 7$ m($q_0 = 122.5$ kPa)；**堤顶位于轴线下方**$z = 2$；5；10；20 m
形状	(1) $B_c = 5$，$L = 14$；(2) $B_c = 0$，$L = 16.5$（基底同为33 m）；(3) $B_c = 5$，$L = 7$；(4) $B_c = 20$，$L = 14$

求

顶面轴线下的$\Delta\sigma_z$；形状的影响；三角形填方的手算验算。

解答 (1/2)

解答

格式	底部(m)	z = 2 m	z = 5 m	z = 10 m	z = 20 m	z = 5: $\Delta\sigma_z/q_0$
梯形（初始）	33	120.81	110.87	90.88	61.67	0.905
三角形（底宽同为33 m）	33	113.09	99.55	80.01	53.79	0.813
陡坡(L = 7 m)	19	119.33	102.06	73.59	43.47	0.833
宽坡顶(20 m)	48	122.38	120.87	113.47	91.29	0.987

在相同高度下，**宽堤顶**可使荷载传递到更深处（z = 20 m时为91.3 kPa），而**三角形**和**陡坡**路堤则较少（53.8和43.5 kPa）。z = 5 m处的排序为：三角形99.6 < 陡坡102.1 < 梯形110.9 < 宽堤顶120.9 kPa。

解答 (2/2)

解答

1 每一半：B_1 = 0；B_2 = 16.5 m (z = 5 m)

$$\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}\frac{16.5}{5} = 1.2766$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\,\frac{16.5}{16.5}\,\alpha_1 = 0.40634$$

2 应力

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(2\,I_2) = 122.5\,(2 \times 0.40634) = \mathbf{99.55}\ \text{kPa}$$

三角形填方顶部以下5 m处为**99.55 kPa**：比同底梯形填方(110.87 kPa)小11.32 kPa；三角形断面所需的填方体积比同底梯形断面更小。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

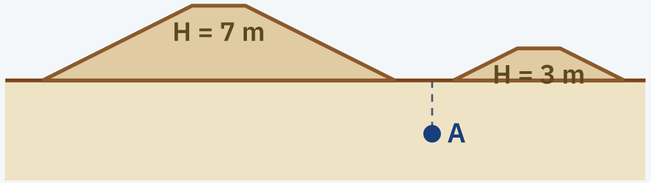
算例

已知条件

填土1	$\gamma = 17.5$，$H = 7$ m，$B_c = 5$，$L_1 = L_2 = 14$ m；**堤顶轴线**$x = 0$
填土2	$\gamma = 17.5$，$H = 3$ m，$B_c = 4$，$L_1 = L_2 = 6$ m；**堤顶轴线**$x = 30$ m
点A	$x = 20$ m（**两路堤之间**），$z = 5$ m；**另有2 – 30 m**

求

每个路堤的三个条带、各路堤及合计的 $\Delta\sigma_z$；深度分布。



解答 (1/2)

解答

1 重叠验算（坡脚：路堤1 → 16.5 m；路堤2 → 22 m）及每个路堤的三个条带

填土	q_0 (kPa)	dx = x − x_c	坡顶条带	左侧边坡	右侧边坡	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1 (H = 7 m)	122.5	20	0.282	0.133	3.654	**4.069**
2 (H = 3 m)	52.5	−10	1.160	3.992	0.276	**5.427**

2 叠加原理

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 4.069 + 5.427 = \mathbf{9.497}\ \text{kPa}$$

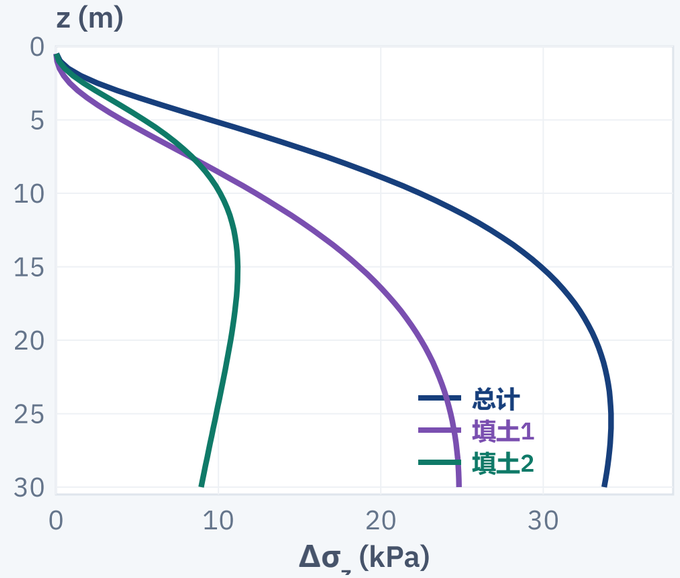
A点距填土1右侧坡脚3.5 m，距填土2左侧坡脚2 m。**填土2**虽低但距离近，贡献了总量的大部分(5.43 kPa)；总计**$\Delta\sigma_z$ = 9.50 kPa**。

解答 (2/2)

解答

z (m)	填土1	填土2	总计
2	0.48	1.06	**1.53**
5	4.07	5.43	**9.50**
10	12.30	10.11	**22.41**
15	18.67	11.19	**29.86**
20	22.48	10.75	**33.23**
30	24.82	8.94	**33.76**

总应力在z ≈ 25.5 m处达到最大值(34.18 kPa)；随深度增加，高路堤1的占比增大（z = 30 m：24.82和8.94 kPa）。



在GeoTerva中验算解答 ↗

小结

要点回顾

荷载： $q_0 = \gamma H = 122.5$ kPa；**Osterberg：** $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2(B_1/z, B_2/z)$，每一半至多为0.5；坡顶下方两半叠加

A_1（堤顶下方，z = 5 m）： $I_2 = 0.4525$；$\Delta\sigma_z = 122.5\ (2 \times 0.4525) =$ **110.87 kPa**；三个条带：67.35 + 21.76 + 21.76

A_2（坡面下方）： 10.94 + 60.84 − 26.66 = **45.12 kPa**；在路堤一侧，用较大的半部分减去较小的半部分；三个条带给出相同结果

位置： 在坡脚及其外侧，应力先增大后减小；在坡顶下方则单调减小。**形状：** 宽顶面可将更多荷载传至深处；三角形填土在同一基底处为99.6 kPa（梯形为110.9）

两个填方： 按各自顶面轴线分别计算应力后叠加：4.07 + 5.43 = 9.50 kPa

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Osterberg, J.O. (1957). Influence values for vertical stresses in a semi-infinite mass due to an embankment loading. Proc. 4th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, Vol. 1, 393–394.

注

全部数值算例均由模块自身的计算引擎生成；模块给出相同的数值。模块的初始状态为H = 7 m、γ = 17.5 kN/m³的填方和A_1点(x = 0; z = 5 m)。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入路堤（γ、H、堤顶、边坡、位置）、A点和深度；模块一并给出三个条带、Osterberg验算、$\Delta\sigma_z$值、等应力曲线、深度剖面、分步解答和报告。

打开模块→

理论页面 →

用手机打开

试用模块无需注册。

如需在课堂教学中使用：info@geoterva.com