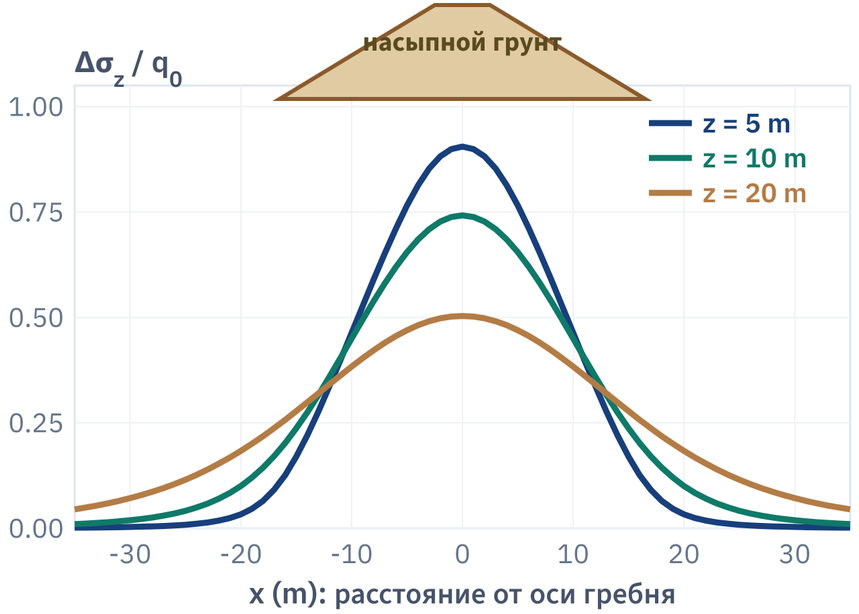
Презентация к лекции по геотехнике · Напряжения в грунтовом массиве

Напряжение под насыпью

Лекция: вертикальное напряжение под насыпью (трапециевидная нагрузка); решение Osterberg, суперпозиция полос и примеры, решаемые вручную.

- $q_0 = \gamma H$
- Osterberg I_2
- Три полосы
- Под откосом и рядом с ним
- Несколько насыпей



Что мы изучим на этой лекции?

Приращение вертикального напряжения под длинной **насыпью трапециевидного сечения** (насыпь автомобильной или железной дороги, дамба) на грунте: нагрузка $q_0 = \gamma H$, задача двумерная

Решение Osterberg: для полунасыпи $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$; I_2 зависит только от B_1/z и B_2/z

Сложение двух половин под гребнем, **вычитание** меньшей половины из большей рядом с насыпью

Сумма **трёх полос**, дающая тот же результат: гребневая полоса + две треугольные полосы; модуль работает именно так

То, что напряжения от нескольких насыпей **суммируются**

ХОД ЛЕКЦИИ

Каждая тема излагается **в три шага**:

1 · **Теория**: формула и обоснование

2 · **Условие**: дано и требуется определить

3 · **Решение**: пошагово, с числами

Пример насыпи: H = 7 m, γ = 17.5 kN/m³, гребень 5 m, откосы 14 m. A_1 расположена под центром гребня, A_2 — под точкой, удалённой на 5 m от левой подошвы насыпи; обе на глубине z = 5 m.

Насыпь трапециевидного сечения

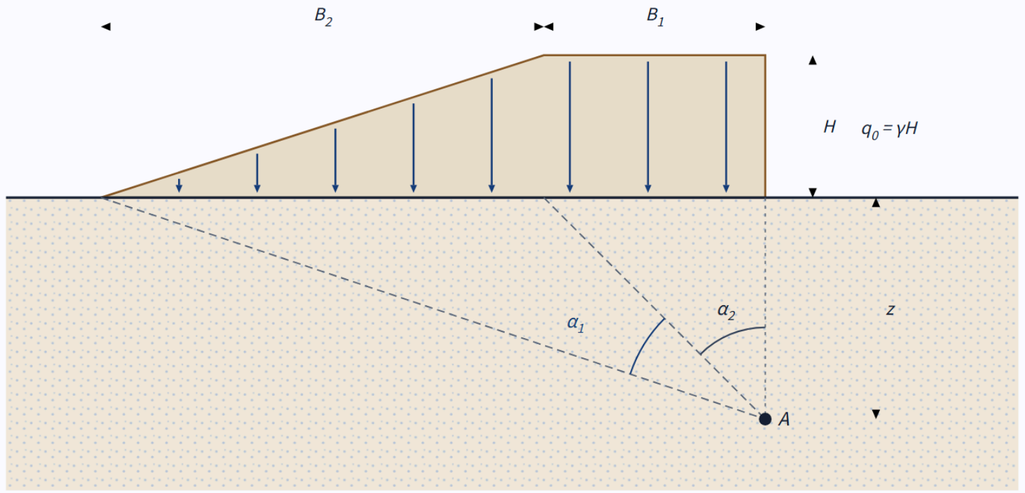
ТЕОРИЯ

Насыпь автомобильной или железной дороги, отсыпка, длинный отвал: нагрузка от насыпи **трапециевидного сечения** на грунт

Вес, приходящийся на единицу площади, под гребнем равен $q_0 = \gamma H$ и линейно убывает до **нуля** у подошв откосов

Насыпь длинная: задача **двумерная** (плоская деформация), как и для полосовых нагрузок

Насыпь действует как гибкая нагрузка на поверхность грунта, при этом её собственная жёсткость не учитывается; грунт — однородное, изотропное, линейно-упругое полупространство; $\Delta\sigma_z$ — только приращение от насыпи



$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$

ТЕОРИЯ

Для **половины насыпи**, когда точка A лежит под вертикалью, проходящей через внутреннюю кромку ширины B_1 ($q_0 = \gamma H$; углы в радианах):

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[\frac{B_1 + B_2}{B_2}\,(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{B_1}{B_2}\,\alpha_2\right]$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{B_1 + B_2}{z} - \tan^{-1}\frac{B_1}{z} \qquad \alpha_2 = \tan^{-1}\frac{B_1}{z}$$

Коротко: **$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$**: коэффициент влияния I_2 зависит только от **B_1/z** и **B_2/z** (Osterberg 1957)

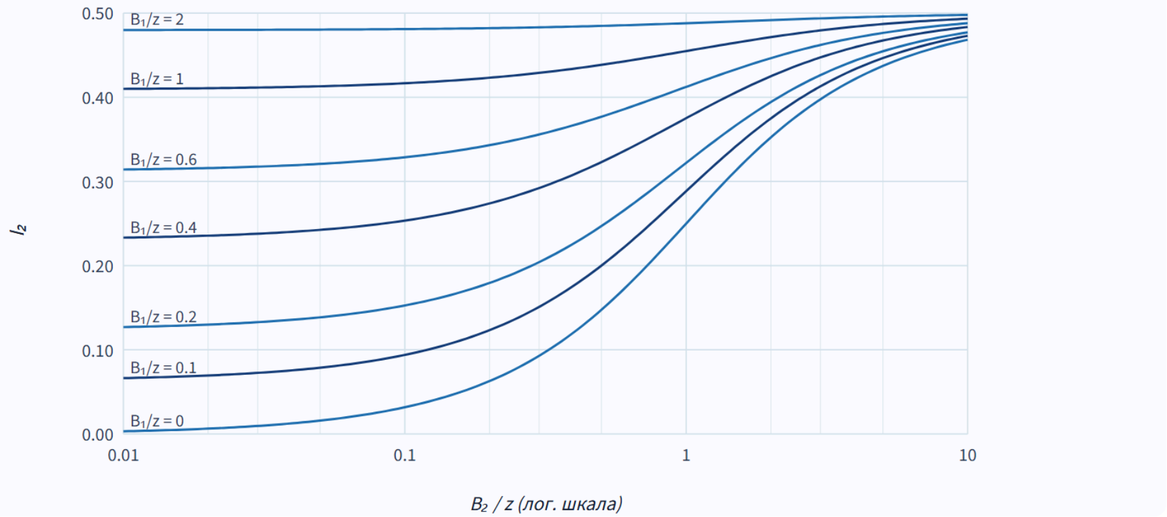
I_2 и две половины

ТЕОРИЯ

Точка под гребнем делит насыпь на **две половины** — левую и правую; значения I_2 складываются: $\Delta\sigma_z = q_0(I_{2,left} + I_{2,right})$

Для точки **рядом** с насыпью из большей половины **вычитается** меньшая половина

Вклад каждой половины не превышает **0.5**



Произвольная точка, произвольные наклоны

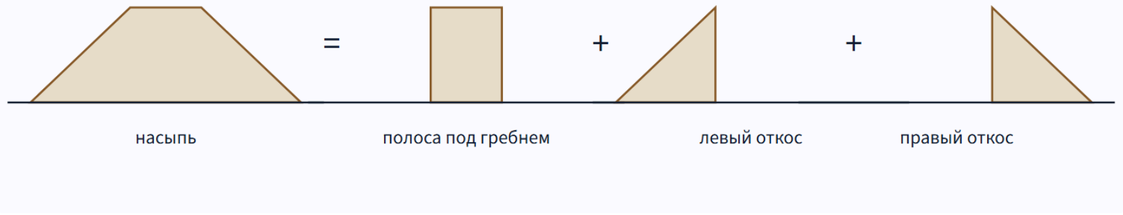
ТЕОРИЯ

Трапеция = **равномерная полоса** шириной B_c с интенсивностью q_0 + **две треугольные полосы**, нарастающие от нуля у подошв откосов до q_0 у краёв гребня

Модуль работает именно так: различения случаев и номограммы нет; под гребнем $q_0(I_{2,left} + I_{2,right})$ получается точно, и эта проверка также показана в шагах расчёта

Откосы могут иметь разную ширину; **$B_c = 0$** даёт насыпь треугольного сечения

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(\text{гребень})} + \Delta\sigma_{z(\text{левый откос})} + \Delta\sigma_{z(\text{правый откос})}$$



Суперпозиция

ТЕОРИЯ

Каждая насыпь задаётся своими параметрами **γ, H, гребень, откосы** и положением оси гребня x_C (в модуле не более восьми)

Участок грунта, занимаемый двумя насыпями от подошвы до подошвы, **не может быть общим**; подошвы двух насыпей могут касаться друг друга

Так как грунт упруг, напряжение от каждой насыпи вычисляется **относительно оси гребня** ($x - x_C$), а напряжения суммируются

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_{0,k}\,[\,\text{гребень} + \text{левый откос} + \text{правый откос}\,]$$

Условие

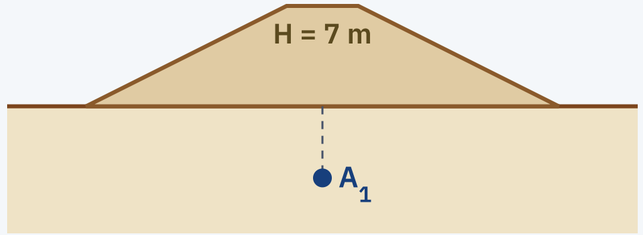
ПРИМЕР

Дано

Насыпной грунт	$H = 7$ m, $\gamma = 17.5$ kN/m³; гребень $B_c = 5$ m, откосы $L_1 = L_2 = 14$ m
Точка A_1	под осью гребня, $z = 5$ m

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

$\Delta\sigma_z$: по решению Osterberg (две половины) и как сумма трёх полос.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Нагрузка, отношения и углы (каждая половина: B_1 = 2.5 m; B_2 = 14 m; z = 5 m)

$$q_0 = \gamma H = 17.5\,(7) = \mathbf{122.5}\ \text{kPa} \qquad B_1/z = 0.5 \qquad B_2/z = 2.8$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}(2.5/5) = 0.4636 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}(16.5/5) - \alpha_2 = 1.2766 - 0.4636 = 0.8129$$

2 Значение влияния и напряжение

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{16.5}{14}(1.2766) - \frac{2.5}{14}(0.4636)\right] = \frac{1.4217}{\pi} = \mathbf{0.4525}$$

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(I_{2,\text{левый}} + I_{2,\text{правый}}) = 122.5\,(0.4525 + 0.4525) = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

На 5 m ниже центра гребня **$\Delta\sigma_z$ = 110.87 kPa**: 90.5% нагрузки от насыпи (q_0 = 122.5 kPa).

Решение (2/2)

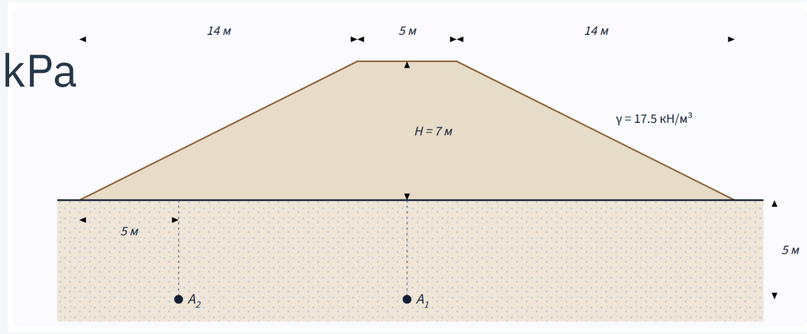
РЕШЕНИЕ

1 Полоса по гребню (q_0, B_c = 5 m): $F(u) = \tan^{-1}(u/z) + zu/(u^2 + z^2)$

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[F(2.5) - F(-2.5)\right] = \frac{122.5}{\pi}\left(2 \times 0.8636\right) = \mathbf{67.35}\ \text{kPa}$$

2 Левый откос (L_1 = 14 m; x' = 16.5 m от левой подошвы): $G(u) = (x'/2)[zu/(u^2 + z^2) + \tan^{-1}(u/z)] + z^3/[2(u^2 + z^2)]$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_0}{\pi L_1}\left[G(16.5) - G(2.5)\right] = \frac{245}{14\pi}\left(13.0316 - 9.1251\right) = \mathbf{21.76}\ \text{kPa}$$



3 Правый откос (симметричный) и сумма

$$\Delta\sigma_z = 67.35 + 21.76 + 21.76 = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

Сумма трёх полос совпадает с решением Osterberg: **110.87 kPa**. Модуль работает именно так и, кроме того, показывает значение Osterberg под гребнем в качестве проверки.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

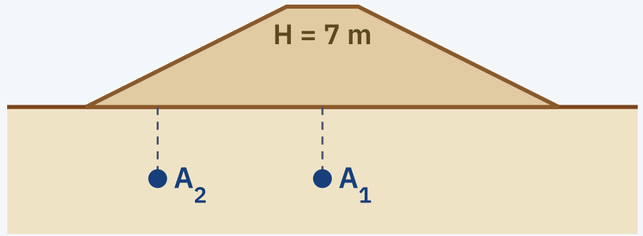
ПРИМЕР

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

$\Delta\sigma_z$: сложением и вычитанием значений I_2 (три части) и по трём полосам.

Дано

Насыпной грунт	**Насыпь в примере 1: $q_0 = 122.5$ kPa**
Точка A_2	**на 5 m внутрь от левого края подошвы ($x = -11.5$ m), $z = 5$ m**



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Разделение по вертикали, проходящей через A_2: x = −11.5 m; высота 5 m × 7/14 = 2.5 m → q = 2.5 × 17.5 = 43.75 kPa

Часть	q (kPa)	B_1 (m)	B_2 (m)	B_1/z	B_2/z	I_2	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
(+) малая трапециевидная нагрузка слева	43.75	0	5	0	1.0	0.25000	**10.94**
(+) полная высота справа: прямоугольник + треугольная рампа	122.5	14	14	2.8	2.8	0.49669	**60.84**
(−) треугольник, добавленный под откосом	78.75	0	9	0	1.8	0.33859	**26.66**

2 Значения I_2 (z = 5 m)

$$I_2(0;\,5) = \frac{1}{\pi}\,\frac{5}{5}\,\tan^{-1}1 = 0.25000 \qquad I_2(14;\,14) = \frac{1}{\pi}\left[2\,(1.3941) - 1.2278\right] = 0.49669$$

$$I_2(0;\,9) = \frac{1}{\pi}\,\tan^{-1}1.8 = 0.33859 \qquad \Delta\sigma_z = 10.94 + 60.84 - 26.66 = \mathbf{45.12}\ \text{kPa}$$

В точке A_2 **$\Delta\sigma_z$ = 45.12 kPa** ($\Delta\sigma_z/q_0$ = 0.3683): около 41% значения под центром гребня (110.87 kPa).

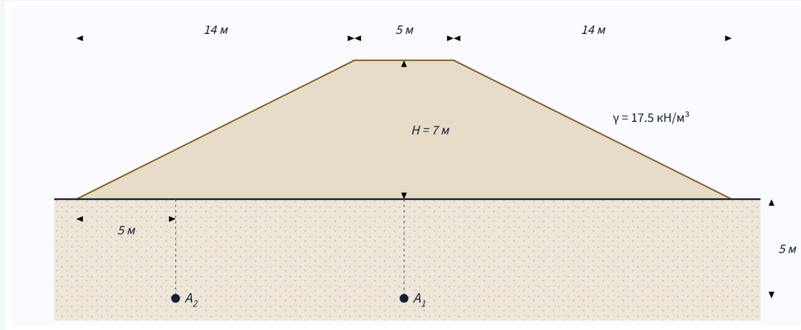
Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

Полоса	Нагрузка	Ширина (m)	Положение относительно точки	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
Полоса на гребне	q_0 = 122.5	5	x = −11.5: u = x ± 2.5 = −9 и −14	2.195
Левый откос (треугольный)	q_0 = 122.5	14	x′ = −11.5 + 16.5 = 5 (от левой подошвы откоса)	42.304
Правый откос (треугольный)	q_0 = 122.5	14	x′ = 16.5 + 11.5 = 28	0.620
Итого				**45.119**

Сумма трёх полос равна **45.12 kPa**; это совпадает со значением 45.12 kPa, найденным по частям через I_2.

Большую часть напряжения под точкой воспринимает **левый откос** (42.30 kPa); полоса гребня даёт лишь 2.19 kPa.



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

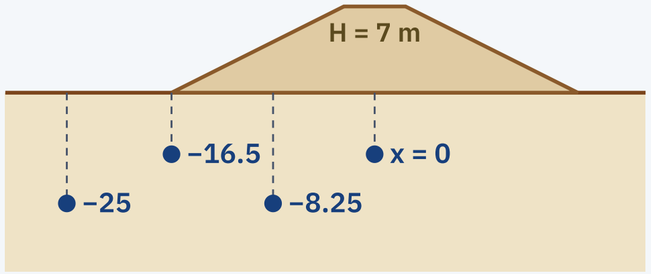
ПРИМЕР

Дано

Насыпной грунт	**Насыпь в примере 1 ($q_0 = 122.5$ kPa)**
Положения	**$x = 0$ (ось гребня); -8.25 (середина откоса); -16.5 (левая подошва откоса); -25 m (на 8.5 m за подошвой)**
Глубины	**$z = 2; 5; 10; 15; 20; 30$ m**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

В каждой точке **$\Delta\sigma_z$** и $\Delta\sigma_z/q_0$; интерпретация изменения с глубиной.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

z (m)	x = 0 m	x = -8.25 m	x = -16.50 m	x = -25 m	x = 0: $\Delta\sigma_z/q_0$
2	120.81	72.03	5.52	0.08	0.986
5	110.87	70.42	13.17	1.03	0.905
10	90.88	64.71	22.78	5.08	0.742
15	74.26	57.80	28.12	10.02	0.606
20	61.67	51.17	30.28	14.12	0.503
30	45.06	40.38	29.66	18.60	0.368

Под осью гребня напряжение начинается вблизи q_0 и уменьшается с глубиной (120.8 → 45.1 kPa). **На середине откоса** 72.0 → 40.4 kPa; **у левой подошвы** вблизи поверхности оно мало (5.5 kPa) и возрастает на глубине (29.7 kPa); на расстоянии 8.5 m за пределами подошвы оно возрастает с 0.08 kPa до 18.6 kPa.

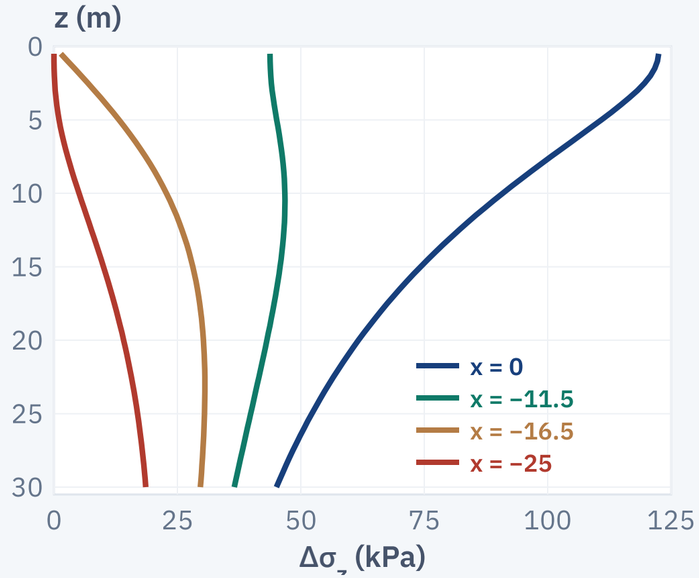
Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 Максимальное напряжение у пятки и за её пределами (диапазон глубин просчитан до 120 m)

Положение	наибольшее $\Delta\sigma_z$ (kPa)	глубина z (m)
x = −16.5 (подошва откоса)	30.57	23.2
x = −25 (за пределами)	19.62	39.9

Под осью гребня насыпи напряжение монотонно уменьшается с глубиной; **у подошвы** и **за её пределами** оно сначала возрастает, затем уменьшается: нагрузка от насыпи на глубине распространяется в стороны. У подошвы наибольшее значение 30.6 kPa достигается при z ≈ 23.2 m; на расстоянии 8.5 m за её пределами оно достигается на большей глубине (z ≈ 39.9 m) и меньше (19.6 kPa).



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

ПРИМЕР

Дано

Таблица	$B_1/z = 0$ **...** 2 **и** $B_2/z = 0.1$ **...** 10 **для** I_2
Вручную	$B_1 = B_2 = z$**:** $I_2(1;\ 1)$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Таблица I_2; предельное значение; подробный расчёт для $B_1 = B_2 = z$.

Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

$B_2/z \setminus B_1/z$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	1.0	2.0
0.1	0.0317	0.0939	0.1527	0.2534	0.3287	0.4166	0.4809
0.5	0.1476	0.2001	0.2470	0.3230	0.3769	0.4385	0.4847
1.0	0.2500	0.2885	0.3221	0.3751	0.4123	0.4548	0.4879
2.0	0.3524	0.3749	0.3943	0.4250	0.4465	0.4714	0.4916
5.0	0.4372	0.4465	0.4546	0.4674	0.4764	0.4869	0.4958
10.0	0.4683	0.4730	0.4770	0.4834	0.4879	0.4933	0.4978

Каждое значение меньше **0.5**; по мере роста B_1/z и B_2/z коэффициент I_2 приближается к 0.5 (при $B_1 \to \infty$ $I_2 = 0.5$). Под гребнем две половины складываются, поэтому $\Delta\sigma_z$ не превышает q_0.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 Углы ($z = 1$; $B_1 = B_2 = 1$)

$$\alpha_2 = \tan^{-1} 1 = 0.7854$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1 = 1.1071 - 0.7854 = 0.3218$$

2 Значение влияния

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{1}(1.1071) - \frac{1}{1}(0.7854)\right] = \frac{1.4289}{\pi} = \mathbf{0.45483}$$

$I_2(1; 1) = 0.45483$: совпадает со значением в таблице при $B_1/z = 1$, $B_2/z = 1$. Для точки под этой половиной $\Delta\sigma_z = 0.455\ q_0$.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

ПРИМЕР

Дано

Общий	$\gamma = 17.5$ **kN/m³,** $H = 7$ **m (**$q_0 = 122.5$ **kPa); гребень ниже оси** $z = 2; 5; 10; 20$ **m**
Формы	**(1)** $B_c = 5$, $L = 14$**; (2)** $B_c = 0$, $L = 16.5$ **(та же подошва** 33 **m); (3)** $B_c = 5$, $L = 7$**; (4)** $B_c = 20$, $L = 14$

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

$\Delta\sigma_z$ под осью гребня; влияние формы; проверка вручную для треугольной насыпи.

Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

Формат	Основание (m)	z = 2 m	z = 5 m	z = 10 m	z = 20 m	z = 5: $\Delta\sigma_z/q_0$
Трапецеидальная (начальная)	33	120.81	110.87	90.88	61.67	0.905
Треугольник (то же основание 33 m)	33	113.09	99.55	80.01	53.79	0.813
Крутой откос (L = 7 m)	19	119.33	102.06	73.59	43.47	0.833
Широкий гребень (20 m)	48	122.38	120.87	113.47	91.29	0.987

При той же высоте **широкий гребень** передаёт нагрузку глубже (z = 20 m: 91.3 kPa), а **треугольная** насыпь и насыпь с **крутыми откосами** — меньше (53.8 и 43.5 kPa). При z = 5 m порядок таков: треугольная 99.6 < с крутыми откосами 102.1 < трапециевидная 110.9 < с широким гребнем 120.9 kPa.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 Каждая половина: B_1 = 0; B_2 = 16.5 m (z = 5 m)

$$\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}\frac{16.5}{5} = 1.2766$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\,\frac{16.5}{16.5}\,\alpha_1 = 0.40634$$

2 Напряжение

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(2\,I_2) = 122.5\,(2 \times 0.40634) = \mathbf{99.55}\ \text{kPa}$$

На 5 m ниже вершины треугольной насыпи — **99.55 kPa**: это на 11.32 kPa меньше, чем для трапециевидной насыпи с тем же основанием (110.87 kPa); треугольное сечение содержит меньший объём насыпи, чем трапеция на том же основании.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

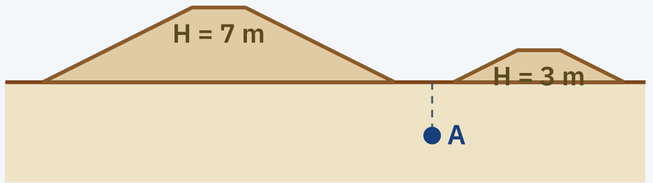
ПРИМЕР

Дано

Насыпной грунт 1	$\gamma = 17.5$, $H = 7$ **m**, $B_c = 5$, $L_1 = L_2 = 14$ **m; ось гребня** $x = 0$
Насыпной грунт 2	$\gamma = 17.5$, $H = 3$ **m**, $B_c = 4$, $L_1 = L_2 = 6$ **m; ось гребня** $x = 30$ **m**
Точка A	$x = 20$ **m (между двумя насыпями),** $z = 5$ **m; а также** $2 - 30$ **m**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Три полосы каждой насыпи, $\Delta\sigma_z$ от каждой насыпи и суммарное; эпюра по глубине.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Проверка перекрытия (подошвы откосов: насыпь 1 → 16.5 m; насыпь 2 → 22 m) и три полосы каждой насыпи

Насыпной грунт	q_0 (kPa)	dx = x − x_c	Полоса на гребне	Левый откос	Правый откос	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1 (H = 7 m)	122.5	20	0.282	0.133	3.654	**4.069**
2 (H = 3 m)	52.5	−10	1.160	3.992	0.276	**5.427**

2 Суперпозиция

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 4.069 + 5.427 = \mathbf{9.497}\ \text{kPa}$$

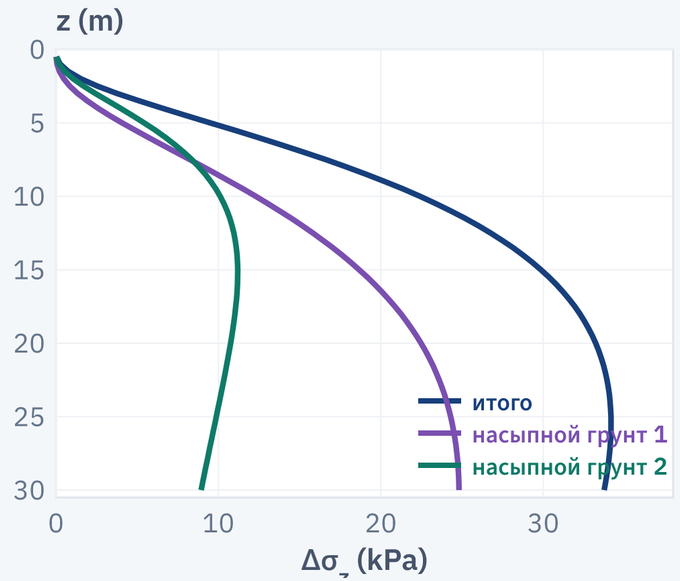
Точка A находится на расстоянии 3.5 m от правой подошвы насыпи 1 и 2 m от левой подошвы насыпи 2. Низкая, но близкая **насыпь 2** даёт большую часть суммы (5.43 kPa); суммарное значение **$\Delta\sigma_z$ = 9.50 kPa**.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

z (m)	Насыпной грунт 1	Насыпной грунт 2	Итого
2	0.48	1.06	**1.53**
5	4.07	5.43	**9.50**
10	12.30	10.11	**22.41**
15	18.67	11.19	**29.86**
20	22.48	10.75	**33.23**
30	24.82	8.94	**33.76**

Полное напряжение достигает наибольшего значения (34.18 kPa) при z ≈ 25.5 m; с глубиной доля высокой насыпи 1 возрастает (z = 30 m: 24.82 и 8.94 kPa).



Проверить решение в GeoTerva ↗

Резюме

Главное

Нагрузка: $q_0 = \gamma H = 122.5$ kPa; **Osterberg:** $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2(B_1/z, B_2/z)$, каждая половина не более 0.5; под гребнем две половины суммируются

A_1 (под гребнем, z = 5 m): $I_2 = 0.4525$; $\Delta\sigma_z = 122.5\ (2 \times 0.4525) =$ **110.87 kPa**; три полосы: 67.35 + 21.76 + 21.76

A_2 (под откосом): 10.94 + 60.84 − 26.66 = **45.12 kPa**; рядом с насыпью меньшая половина вычитается из большей; три полосы дают один и тот же результат

Положение: у подошвы насыпи и за её пределами напряжение сначала возрастает, затем убывает; под гребнем оно убывает монотонно. **Форма:** широкий гребень передаёт на глубину больше нагрузки; треугольная насыпь на том же основании даёт 99.6 kPa (трапециевидная — 110.9)

Две насыпи: напряжения вычисляются относительно осей гребней и суммируются: 4.07 + 5.43 = 9.50 kPa

Список литературы

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Osterberg, J.O. (1957). Influence values for vertical stresses in a semi-infinite mass due to an embankment loading. Proc. 4th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, Vol. 1, 393–394.

ПРИМЕЧАНИЕ

Все численные примеры получены с помощью собственного расчётного ядра модуля; модуль даёт те же значения. Модуль открывается с насыпью H = 7 m, γ = 17.5 kN/m³ и точкой A_1 (x = 0; z = 5 m).

GeoTerva

Геотехнические расчёты онлайн

От теории к практике

Введите в GeoTerva свои насыпи (γ, H, гребень, откосы, положение), точку A и глубину; модуль одновременно выдаёт три полосы, проверку по Osterberg, значение $\Delta\sigma_z$, изолинии равных напряжений, профиль по глубине, пошаговое решение и отчёт.

Открыть модуль → **Страница теории →**

Открыть на телефоне
Для пробных модулей регистрация не требуется.