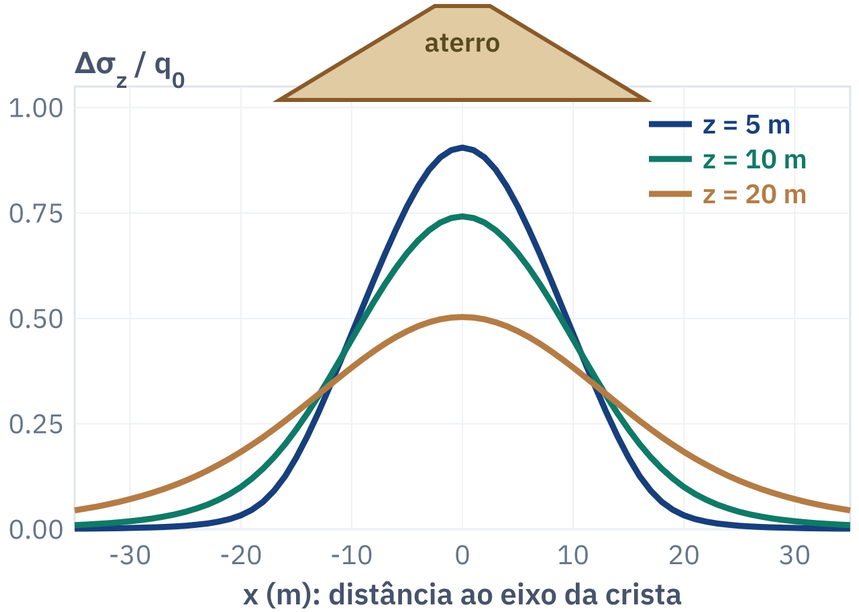
Apresentação de aula de geotecnia · Tensões no solo

Tensão sob o aterro

Aula: tensão vertical sob um aterro (carga trapezoidal); a solução de Osterberg, a superposição de faixas e exemplos resolvidos à mão.

- $q_0 = \gamma H$
- Osterberg I_2
- Três faixas
- Sob e ao lado do talude
- Múltiplos aterros



Introdução

O que veremos nesta aula?

Acréscimo de tensão vertical sob um **aterro trapezoidal** longo assente sobre o terreno (rodovia, aterro ferroviário, dique): carga $q_0 = \gamma H$, problema bidimensional

A **solução de Osterberg**: para o semi-aterro, $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$; I_2 depende apenas de B_1/z e B_2/z

A **soma** das duas metades sob a crista e a **subtração** da metade menor da metade maior ao lado do aterro

A **soma de três faixas** que fornece o mesmo resultado: a faixa da crista + duas faixas triangulares; o módulo trabalha por esse caminho

A **soma** das tensões de vários aterros

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: fórmula e justificativa

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Aterro do exemplo: H = 7 m, γ = 17.5 kN/m³, crista de 5 m, taludes de 14 m. A_1 está sob o centro da crista e A_2, sob o ponto a 5 m do pé esquerdo; ambos à profundidade z = 5 m.

Aterro de seção trapezoidal

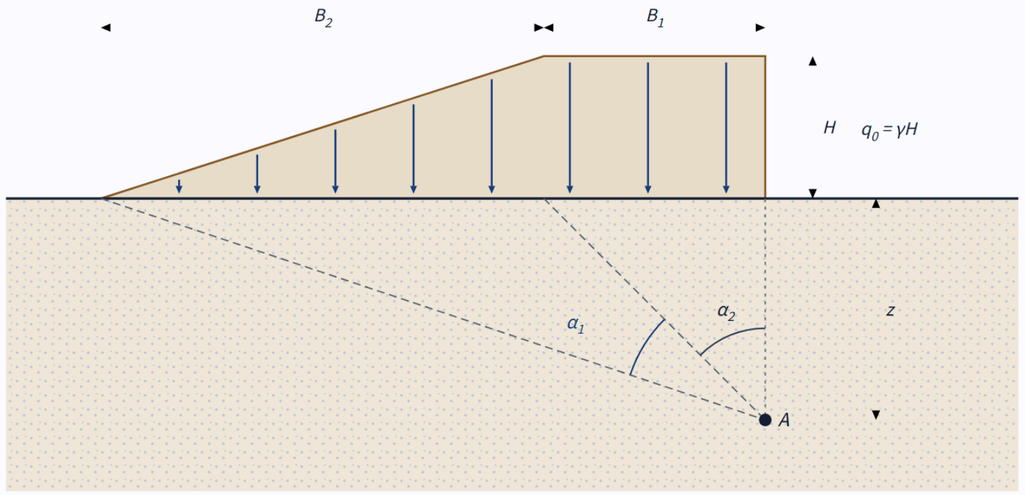
TEORIA

Aterro de rodovia ou ferrovia, dique, pilha longa: a carga de um aterro de **seção trapezoidal** sobre o terreno

O peso por unidade de área sob a crista é $\mathbf{q_0 = \gamma H}$ e diminui linearmente até **zero** nos pés do talude

O aterro é longo: o problema é **bidimensional** (estado plano de deformação), como nas cargas em faixa

O aterro atua como uma carga flexível sobre a superfície do terreno, desprezando-se a sua rigidez própria; o solo é um meio semi-infinito homogêneo, isótropo e linearmente elástico; $\Delta\sigma_z$ é apenas o acréscimo devido ao aterro



$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$

TEORIA

Para o **meio aterro** em que o ponto A está abaixo da vertical que passa pela borda interna da largura B_1 ($q_0 = \gamma H$; ângulos em radianos):

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[\frac{B_1 + B_2}{B_2}\,(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{B_1}{B_2}\,\alpha_2\right]$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{B_1 + B_2}{z} - \tan^{-1}\frac{B_1}{z} \qquad \alpha_2 = \tan^{-1}\frac{B_1}{z}$$

Em resumo, **$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$**: o valor de influência I_2 depende apenas de **B_1/z** e **B_2/z** (Osterberg 1957)

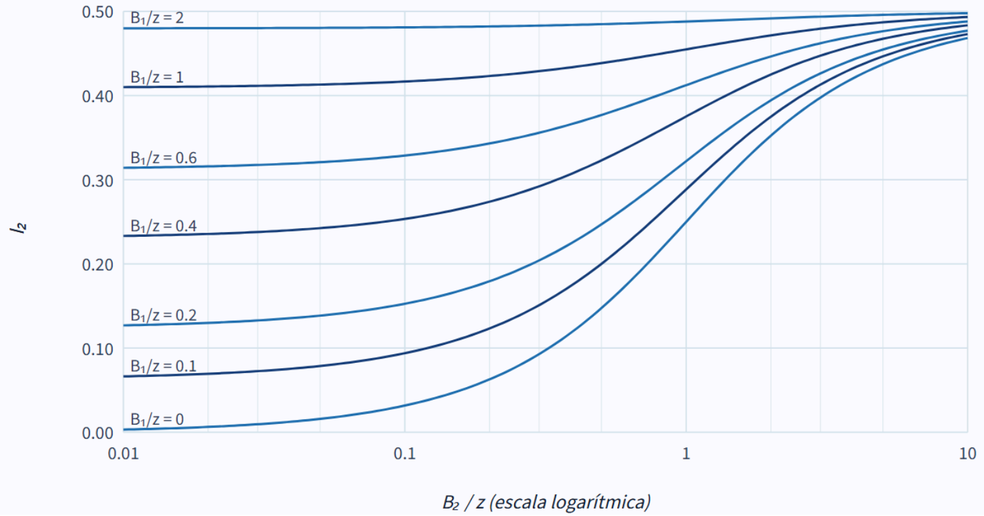
I_2 e as duas metades

TEORIA

Um ponto sob a crista divide o aterro em **duas metades**, à esquerda e à direita; os valores de I_2 são somados: $\Delta\sigma_z = q_0(I_{2,left} + I_{2,right})$

Para um ponto **ao lado** do aterro, a metade menor é **subtraída** da metade maior

A contribuição de cada metade é de no máximo **0.5**



Qualquer ponto, quaisquer inclinações

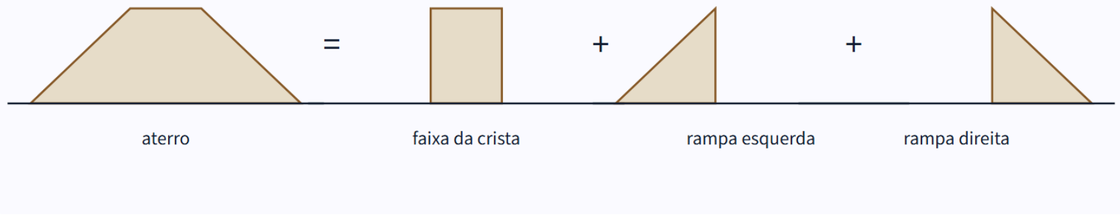
TEORIA

Trapézio = uma **faixa uniforme** de largura B_c e intensidade q_0 + **duas faixas triangulares** que crescem de zero nos pés do talude até q_0 nas bordas da crista

O módulo opera dessa forma: não há distinção de casos nem ábaco; sob a crista obtém-se exatamente $q_0(I_{2,left} + I_{2,right})$, e essa verificação também é mostrada nas etapas do cálculo

As larguras dos taludes podem ser diferentes; **$B_c = 0$** resulta em um aterro de seção triangular

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(\text{crista})} + \Delta\sigma_{z(\text{talude esquerdo})} + \Delta\sigma_{z(\text{talude direito})}$$



Superposição

TEORIA

Cada aterro é definido por seus próprios **γ, H, crista, taludes** e pela posição x_c do eixo da crista (no máximo oito no módulo)

O terreno coberto de pé a pé por dois aterros **não pode ser compartilhado**; os dois pés podem se tocar

Como o solo é elástico, a tensão de cada aterro é calculada **em relação ao eixo da crista** $(x - x_c)$ e as tensões são somadas

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_{0,k}\,[\,\text{crista} + \text{talude esquerdo} + \text{talude direito}\,]$$

Enunciado

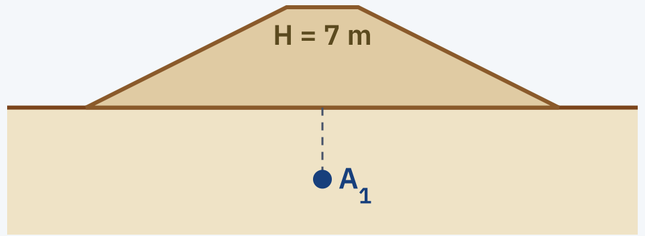
EXEMPLO

PEDE-SE

$\Delta\sigma_z$: pela solução de Osterberg (duas metades) e pela soma das três faixas.

Dados

Aterro	$H = 7$ **m,** $\gamma = 17.5$ **kN/m³; crista** $B_c = 5$ **m, taludes** $L_1 = L_2 = 14$ **m**
Ponto A_1	**sob o eixo da crista,** $z = 5$ **m**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Carga, razões e ângulos (cada metade: B_1 = 2.5 m; B_2 = 14 m; z = 5 m)

$$q_0 = \gamma H = 17.5\,(7) = \mathbf{122.5}\ \text{kPa} \qquad B_1/z = 0.5 \qquad B_2/z = 2.8$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}(2.5/5) = 0.4636 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}(16.5/5) - \alpha_2 = 1.2766 - 0.4636 = 0.8129$$

2 Valor de influência e tensão

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{16.5}{14}(1.2766) - \frac{2.5}{14}(0.4636)\right] = \frac{1.4217}{\pi} = \mathbf{0.4525}$$

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(I_{2,\text{esquerdo}} + I_{2,\text{direito}}) = 122.5\,(0.4525 + 0.4525) = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 110.87 kPa a 5 m abaixo do centro da crista: 90.5% da carga do aterro (q_0 = 122.5 kPa).

Solução (2/2)

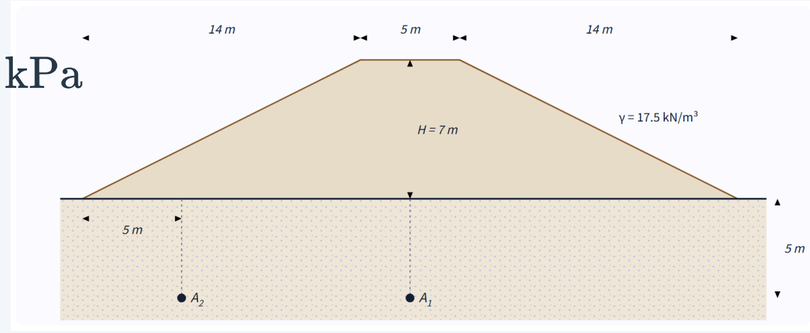
SOLUÇÃO

1 Faixa da crista (q_0, B_c = 5 m): $F(u) = \tan^{-1}(u/z) + zu/(u^2 + z^2)$

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[F(2.5) - F(-2.5)\right] = \frac{122.5}{\pi}\left(2 \times 0.8636\right) = \mathbf{67.35}\ \text{kPa}$$

2 Talude esquerdo (L_1 = 14 m; x' = 16.5 m a partir do pé esquerdo): $G(u) = (x'/2)[zu/(u^2 + z^2) + \tan^{-1}(u/z)] + z^3/[2(u^2 + z^2)]$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_0}{\pi L_1}\left[G(16.5) - G(2.5)\right] = \frac{245}{14\pi}\left(13.0316 - 9.1251\right) = \mathbf{21.76}\ \text{kPa}$$



3 Talude direito (simétrico) e total

$$\Delta\sigma_z = 67.35 + 21.76 + 21.76 = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

A soma das três faixas é igual à solução de Osterberg: **110.87 kPa**. O módulo opera dessa maneira e mostra também, como verificação, o valor de Osterberg sob a crista.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

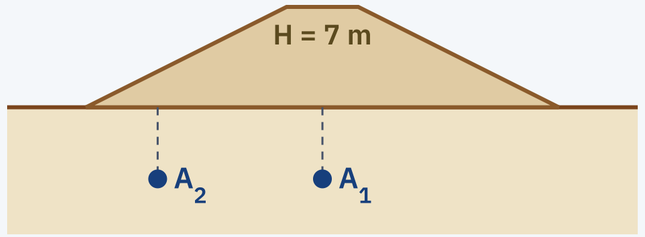
EXEMPLO

PEDE-SE

$\Delta\sigma_z$: somando e subtraindo os valores de I_2 (três partes) e por meio de três faixas.

Dados

Aterro	**Aterro do Exemplo 1: $q_0 = 122.5$ kPa**
Ponto A_2	**5 m para dentro a partir do pé esquerdo ($x = -11.5$ m), $z = 5$ m**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Divisão na vertical que passa por A_2: x = −11.5 m; altura 5 m × 7/14 = 2.5 m → q = 2.5 × 17.5 = 43.75 kPa

Peça	q (kPa)	B_1 (m)	B_2 (m)	B_1/z	B_2/z	I_2	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
(+) pequena rampa à esquerda	43.75	0	5	0	1.0	0.25000	**10.94**
(+) altura total à direita: retângulo + rampa	122.5	14	14	2.8	2.8	0.49669	**60.84**
(–) triângulo adicionado sob o talude	78.75	0	9	0	1.8	0.33859	**26.66**

2 Valores de I_2 (z = 5 m)

$$I_2(0;\,5) = \frac{1}{\pi}\,\frac{5}{5}\,\tan^{-1}1 = 0.25000 \qquad I_2(14;\,14) = \frac{1}{\pi}\left[2\,(1.3941) - 1.2278\right] = 0.49669$$

$$I_2(0;\,9) = \frac{1}{\pi}\,\tan^{-1}1.8 = 0.33859 \qquad \Delta\sigma_z = 10.94 + 60.84 - 26.66 = \mathbf{45.12}\ \text{kPa}$$

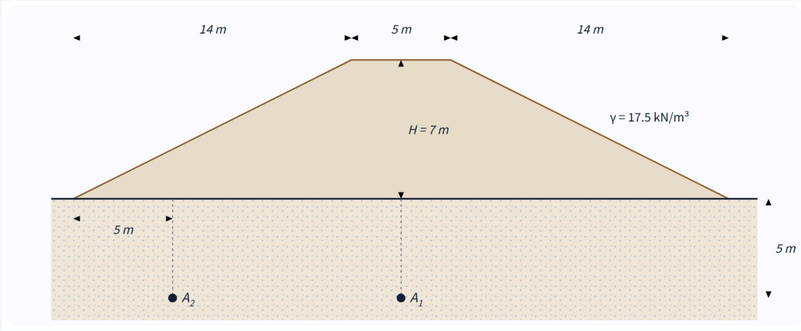
No ponto A_2, **$\Delta\sigma_z$ = 45.12 kPa** ($\Delta\sigma_z/q_0$ = 0.3683): cerca de 41% do valor sob o centro da crista (110.87 kPa).

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

Faixa	Carga	Largura (m)	Posição em relação ao ponto	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
Faixa na crista	q_0 = 122.5	5	x = −11.5: u = x ± 2.5 = −9 e −14	2.195
Talude esquerdo (triangular)	q_0 = 122.5	14	x′ = −11.5 + 16.5 = 5 (a partir do pé esquerdo)	42.304
Talude direito (triangular)	q_0 = 122.5	14	x′ = 16.5 + 11.5 = 28	0.620
Total				**45.119**

A soma das três faixas é **45.12 kPa**; é igual aos 45.12 kPa obtidos pela via por partes com I_2. A maior parte da tensão sob o ponto é transmitida pelo **talude esquerdo** (42.30 kPa); a faixa da crista contribui com apenas 2.19 kPa.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

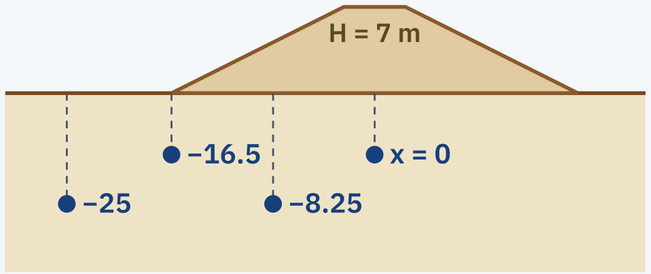
EXEMPLO

PEDE-SE

Em cada posição, $\Delta\sigma_z$ e $\Delta\sigma_z/q_0$; interpretação da variação com a profundidade.

Dados

Aterro	**Aterro do Exemplo 1 ($q_0 = 122.5$ kPa)**
Posições	**$x = 0$ (eixo da crista); -8.25 (meio do talude); -16.5 (pé esquerdo); -25 m (8.5 m fora do pé)**
Profundidades	$z = 2; 5; 10; 15; 20; 30$ **m**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

z (m)	x = 0 m	x = -8.25 m	x = -16.50 m	x = -25 m	x = 0: $\Delta\sigma_z/q_0$
2	120.81	72.03	5.52	0.08	0.986
5	110.87	70.42	13.17	1.03	0.905
10	90.88	64.71	22.78	5.08	0.742
15	74.26	57.80	28.12	10.02	0.606
20	61.67	51.17	30.28	14.12	0.503
30	45.06	40.38	29.66	18.60	0.368

Sob o eixo da crista, a tensão começa próxima de q_0 e diminui com a profundidade (120.8 → 45.1 kPa). **No meio do talude**, 72.0 → 40.4 kPa; **no pé esquerdo**, é pequena perto da superfície (5.5 kPa) e aumenta em profundidade (29.7 kPa); a 8.5 m para fora do pé, passa de 0.08 kPa a 18.6 kPa.

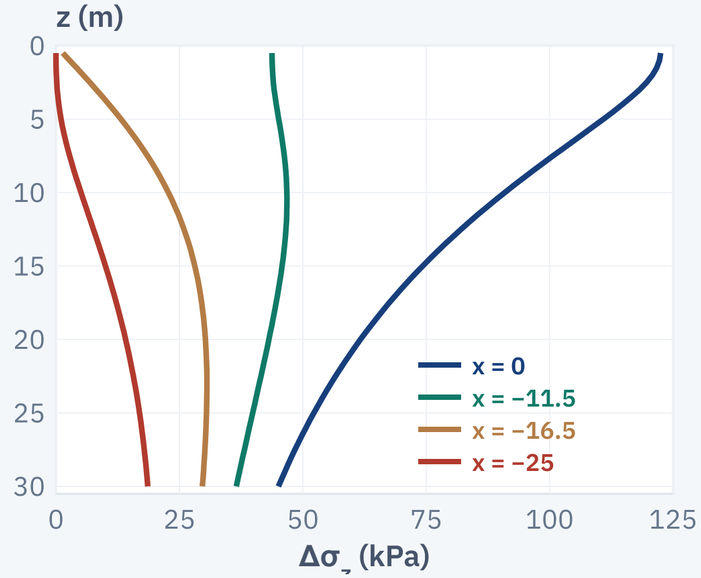
Solução (2/2)

SOLUÇÃO

1 Tensão máxima no calcanhar e fora dele (profundidade varrida até 120 m)

Posição	$\Delta\sigma_z$ máximo (kPa)	profundidade z (m)
x = −16.5 (pé do aterro)	30.57	23.2
x = −25 (fora)	19.62	39.9

Sob o eixo da crista, a tensão diminui com a profundidade de forma monótona; no **pé** e **fora**, primeiro aumenta, depois diminui: a carga do aterro se espalha lateralmente em profundidade. No pé, o valor máximo é 30.6 kPa em z ≈ 23.2 m; a 8.5 m para fora, ocorre mais fundo (z ≈ 39.9 m) e é menor (19.6 kPa).



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Tabela	$B_1/z = 0 \ldots 2$ **e** $B_2/z = 0.1 \ldots 10$ **para** I_2
Manual	$B_1 = B_2 = z$**:** $I_2(1;\ 1)$

PEDE-SE

Tabela de I_2; valor-limite; cálculo detalhado para $B_1 = B_2 = z$.

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

$B_2/z \setminus B_1/z$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	1.0	2.0
0.1	0.0317	0.0939	0.1527	0.2534	0.3287	0.4166	0.4809
0.5	0.1476	0.2001	0.2470	0.3230	0.3769	0.4385	0.4847
1.0	0.2500	0.2885	0.3221	0.3751	0.4123	0.4548	0.4879
2.0	0.3524	0.3749	0.3943	0.4250	0.4465	0.4714	0.4916
5.0	0.4372	0.4465	0.4546	0.4674	0.4764	0.4869	0.4958
10.0	0.4683	0.4730	0.4770	0.4834	0.4879	0.4933	0.4978

Cada valor é menor que **0.5**; à medida que B_1/z e B_2/z aumentam, I_2 se aproxima de 0.5 (para $B_1 \to \infty$, $I_2 = 0.5$). Como as duas metades se somam sob a crista, $\Delta\sigma_z$ é, no máximo, q_0.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

1 Ângulos (z = 1; $B_1 = B_2 = 1$)

$$\alpha_2 = \tan^{-1} 1 = 0.7854$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1 = 1.1071 - 0.7854 = 0.3218$$

2 Valor de influência

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{1}(1.1071) - \frac{1}{1}(0.7854)\right] = \frac{1.4289}{\pi} = \mathbf{0.45483}$$

$I_2(1; 1) = 0.45483$: coincide com o valor da tabela para $B_1/z = 1$, $B_2/z = 1$. Para o ponto sob essa metade, $\Delta\sigma_z = 0.455\ q_0$.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Comum	$\gamma = 17.5$ **kN/m³,** $H = 7$ **m (**$q_0 = 122.5$ **kPa); crista abaixo do eixo** $z = 2; 5; 10; 20$ **m**
Formas	**(1)** $B_c = 5$, $L = 14$**; (2)** $B_c = 0$, $L = 16.5$ **(mesma base de** 33 **m); (3)** $B_c = 5$, $L = 7$**; (4)** $B_c = 20$, $L = 14$

PEDE-SE

$\Delta\sigma_z$ sob o eixo da crista; efeito da forma; verificação manual do aterro triangular.

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

Formato	Base (m)	z = 2 m	z = 5 m	z = 10 m	z = 20 m	z = 5: $\Delta\sigma_z/q_0$
Trapezoidal (inicial)	33	120.81	110.87	90.88	61.67	0.905
Triângulo (mesma base 33 m)	33	113.09	99.55	80.01	53.79	0.813
Talude íngreme (L = 7 m)	19	119.33	102.06	73.59	43.47	0.833
Crista larga (20 m)	48	122.38	120.87	113.47	91.29	0.987

Na mesma altura, um aterro de **crista larga** leva a carga a maior profundidade (z = 20 m: 91.3 kPa), enquanto os aterros **triangular** e de **taludes íngremes** levam menos (53.8 e 43.5 kPa). Em z = 5 m, a ordem é: triangular 99.6 < talude íngreme 102.1 < trapezoidal 110.9 < crista larga 120.9 kPa.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

1 Cada metade: $B_1 = 0$; $B_2 = 16.5$ m ($z = 5$ m)

$$\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}\frac{16.5}{5} = 1.2766$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\,\frac{16.5}{16.5}\,\alpha_1 = 0.40634$$

2 Tensão

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(2\,I_2) = 122.5\,(2 \times 0.40634) = \mathbf{99.55}\ \mathrm{kPa}$$

99.55 kPa a 5 m abaixo do topo do aterro triangular: 11.32 kPa a menos que no aterro trapezoidal de mesma base (110.87 kPa); a seção triangular contém menor volume de aterro que o trapézio de mesma base.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

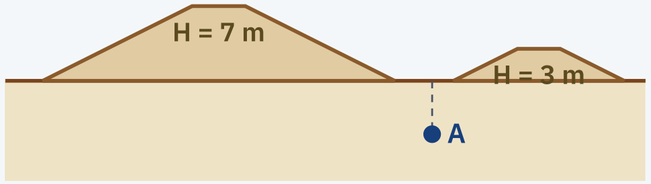
EXEMPLO

Dados

Aterro 1	$\gamma = 17.5$, $H = 7$ m, $B_c = 5$, $L_1 = L_2 = 14$ m; eixo da crista $x = 0$
Aterro 2	$\gamma = 17.5$, $H = 3$ m, $B_c = 4$, $L_1 = L_2 = 6$ m; eixo da crista $x = 30$ m
Ponto A	$x = 20$ m (entre os dois aterros), $z = 5$ m; também $2 - 30$ m

PEDE-SE

As três faixas de cada aterro, $\Delta\sigma_z$ de cada aterro e total; perfil em profundidade.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Verificação de sobreposição (pés: aterro 1 → 16.5 m; aterro 2 → 22 m) e as três faixas de cada aterro

Aterro	q_0 (kPa)	dx = x − x_c	Faixa na crista	Talude esquerdo	Talude direito	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1 (H = 7 m)	122.5	20	0.282	0.133	3.654	**4.069**
2 (H = 3 m)	52.5	−10	1.160	3.992	0.276	**5.427**

2 Superposição

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 4.069 + 5.427 = \mathbf{9.497}\ \mathrm{kPa}$$

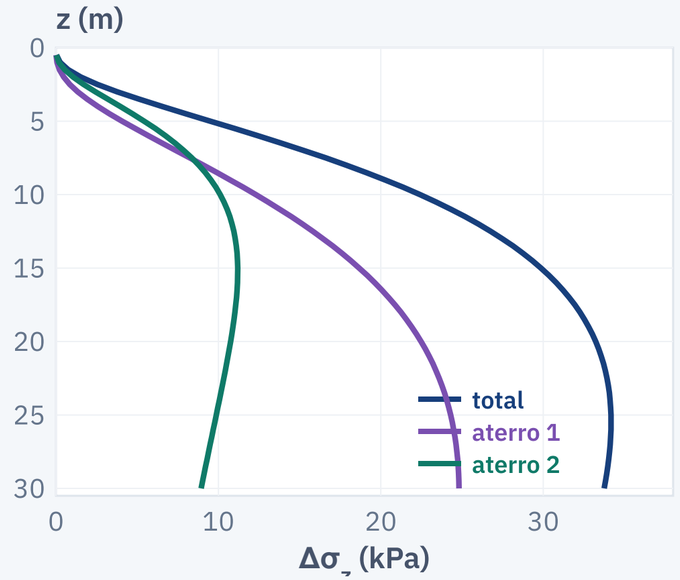
O ponto A está a 3.5 m do pé do aterro 1, no lado direito, e a 2 m do pé do aterro 2, no lado esquerdo. O **aterro 2**, baixo, porém próximo, fornece a maior parte do total (5.43 kPa); o total é **$\Delta\sigma_z$ = 9.50 kPa**.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

z (m)	Aterro 1	Aterro 2	Total
2	0.48	1.06	**1.53**
5	4.07	5.43	**9.50**
10	12.30	10.11	**22.41**
15	18.67	11.19	**29.86**
20	22.48	10.75	**33.23**
30	24.82	8.94	**33.76**

A tensão total atinge seu valor máximo (34.18 kPa) em z ≈ 25.5 m; com a profundidade, aumenta a participação do aterro alto 1 (z = 30 m: 24.82 e 8.94 kPa).



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Resumo

Pontos-chave

Carga: $q_0 = \gamma H = 122.5$ kPa; **Osterberg:** $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2(B_1/z, B_2/z)$, cada metade com no máximo 0.5; sob a crista, as duas metades são somadas

A_1 (sob a crista, z = 5 m): $I_2 = 0.4525$; $\Delta\sigma_z = 122.5\ (2 \times 0.4525) =$ **110.87 kPa**; três faixas: 67.35 + 21.76 + 21.76

A_2 (abaixo do talude): 10.94 + 60.84 − 26.66 = **45.12 kPa**; ao lado do aterro, subtrai-se a metade menor da metade maior; as três faixas fornecem o mesmo resultado

Posição: no pé do aterro e fora dele, a tensão primeiro aumenta e depois diminui; sob a crista, diminui continuamente. **Forma:** a crista larga transmite mais carga em profundidade; o aterro triangular produz 99.6 kPa na mesma base (trapezoidal 110.9)

Dois aterros: as tensões são calculadas em relação aos eixos das cristas e somadas: 4.07 + 5.43 = 9.50 kPa

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Osterberg, J.O. (1957). Influence values for vertical stresses in a semi-infinite mass due to an embankment loading. Proc. 4th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, Vol. 1, 393–394.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o próprio motor de cálculo do módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O exemplo inicial do módulo é um aterro com H = 7 m, γ = 17.5 kN/m³ e o ponto A_1 (x = 0; z = 5 m).

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva os aterros (γ, H, crista, taludes, posição), o ponto A e a profundidade; o módulo fornece as três faixas, a verificação de Osterberg, o valor de $\Delta\sigma_z$, as curvas de isotensão, o perfil em profundidade, a solução passo a passo e o relatório.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.