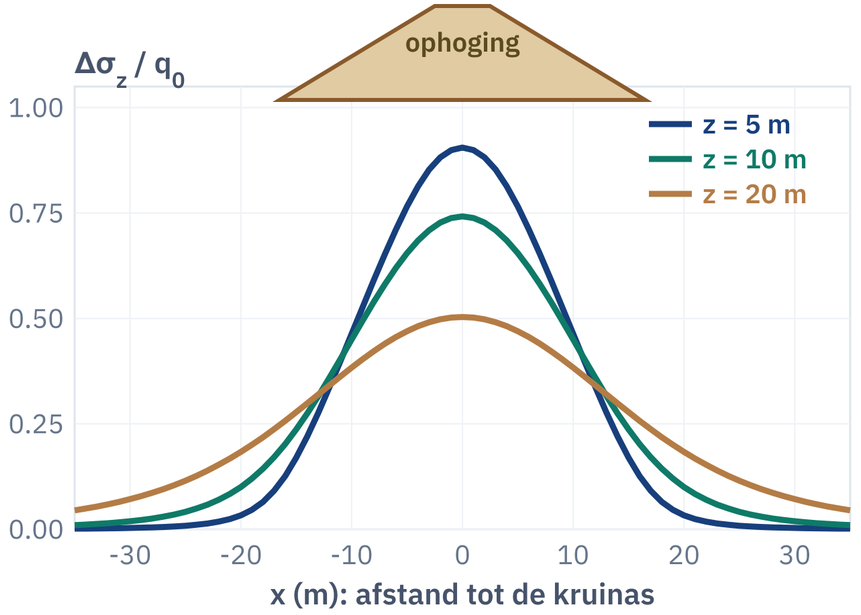
Geotechnisch college · Spanningen in de ondergrond

Spanning onder de ophoging

College: verticale spanning onder een ophoging (trapeziumbelasting); de oplossing van Osterberg, superpositie van stroken en met de hand uitgewerkte voorbeelden.

$q_0 = \gamma H$ | Osterberg I_2 | Drie stroken | Onder en naast het talud | Meerdere ophogingen



Wat leren we in dit college?

De toename van de verticale spanning onder een lange **trapeziumvormige ophoging** op de ondergrond (ophoging voor weg of spoor, dijklichaam): belasting $q_0 = \gamma H$, het probleem is tweedimensionaal

De oplossing van Osterberg: voor een halve ophoging $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$; I_2 hangt alleen af van B_1/z en B_2/z

Onder de kruin de **sommatie** van de twee helften, naast de ophoging het **aftrekken** van de kleine helft van de grote helft

De **som van drie stroken** die hetzelfde resultaat geeft: de kruinstrook + twee driehoekige stroken; de module werkt volgens deze weg

dat de spanningen van meerdere ophogingen **worden gesuperponeerd**

COLLEGESTRUCTUUR

Elk onderwerp wordt in **drie stappen** behandeld:

1 · **Theorie**: formule en onderbouwing

2 · **Opgave**: gegeven en gevraagd

3 · **Oplossing**: stap voor stap, met getallen

Voorbeeldophoging: H = 7 m, γ = 17.5 kN/m³, kruin 5 m, taluds 14 m. A_1 ligt onder het midden van de kruin, A_2 onder een punt op 5 m van de linkerteen; beide op diepte z = 5 m.

Ophoging met trapeziumvormige doorsnede

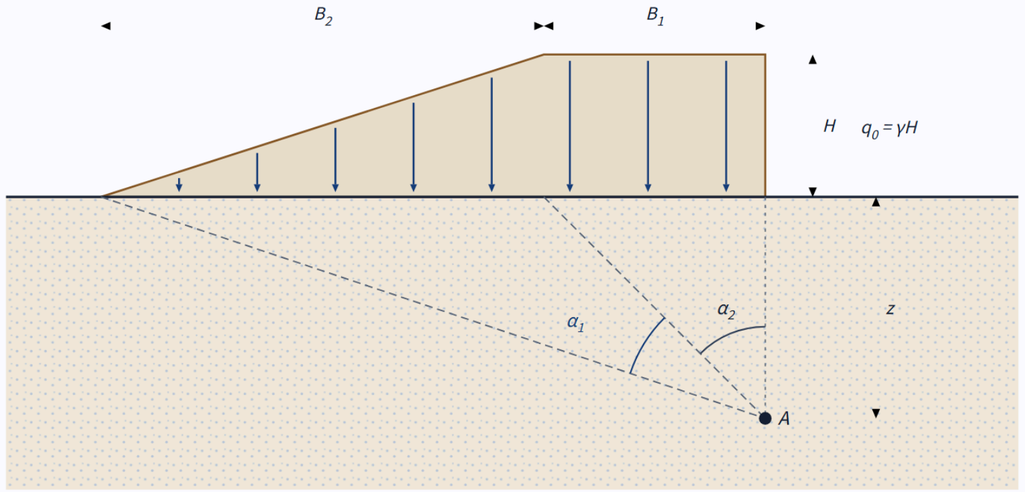
THEORIE

Een ophoging voor een weg of spoorlijn, een talud, een lang pakket: de belasting van een **trapeziumvormige** ophoging op de ondergrond

Het gewicht per oppervlakte-eenheid is $\mathbf{q_0 = \gamma H}$ onder de kruin en neemt lineair af tot **nul** bij de teen

De ophoging is lang: het probleem is **tweedimensionaal** (vlakke vervorming), zoals bij strookbelastingen

De ophoging werkt als een flexibele belasting op het maaiveld, waarbij de eigen stijfheid wordt verwaarloosd; de grond is een homogene, isotrope, lineair elastische halfruimte; $\Delta\sigma_z$ is uitsluitend de toename ten gevolge van de ophoging



$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$

THEORIE

Voor het **halve ophoginglichaam** waarbij punt A onder de verticaal door de binnenrand van breedte B_1 ligt ($q_0 = \gamma H$; hoeken in radiaal):

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[\frac{B_1 + B_2}{B_2}\,(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{B_1}{B_2}\,\alpha_2\right]$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{B_1 + B_2}{z} - \tan^{-1}\frac{B_1}{z} \qquad \alpha_2 = \tan^{-1}\frac{B_1}{z}$$

Kortweg **$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$**: de invloedswaarde I_2 is uitsluitend afhankelijk van **B_1/z** en **B_2/z** (Osterberg 1957)

I_2 en de twee helften

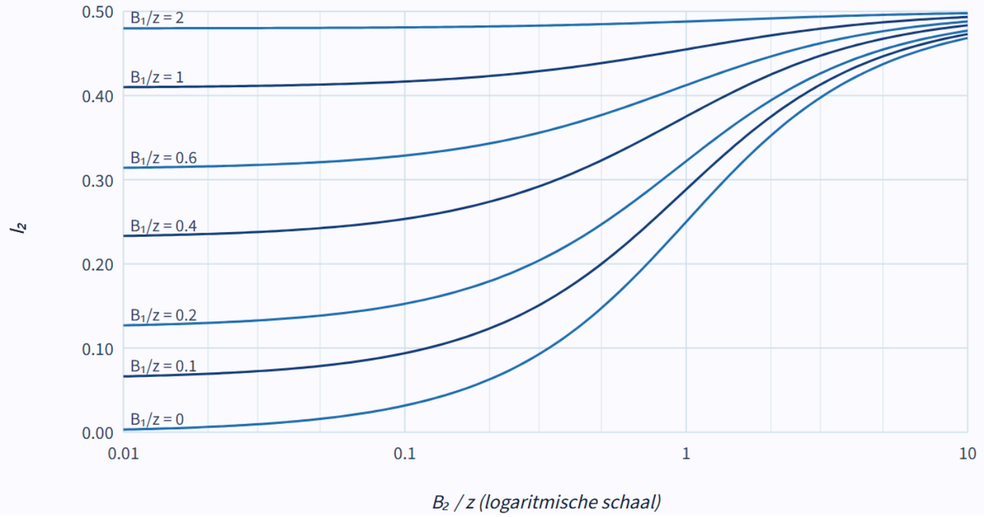
THEORIE

Een punt onder de kruin verdeelt het ophogingslichaam in **twee helften**, links en rechts; de I_2-waarden worden gesommeerd:

$$\Delta\sigma_z = q_0(I_{2,links} + I_{2,rechts})$$

Voor een punt **naast** de ophoging wordt een kleine helft van een grote helft **afgetrokken**

De bijdrage van elke helft is hoogstens **0.5**



Elk punt, elke helling

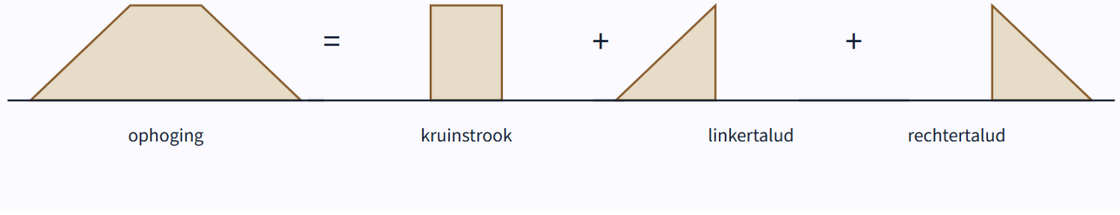
THEORIE

Trapezium = een **gelijkmatig verdeelde strook** met breedte B_c en intensiteit q_0 + **twee driehoekige stroken** die toenemen van nul aan de hiel tot q_0 aan de randen van de kruin

De module werkt op deze manier: er is geen gevalonderscheid en geen nomogram; $q_0(I_{2,links} + I_{2,rechts})$ onder de kruin wordt exact verkregen en deze toets wordt ook in de berekeningsstappen getoond

De taludbreedtes mogen verschillen; **$B_c = 0$** geeft een ophoging met driehoekige doorsnede

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(\text{kruin})} + \Delta\sigma_{z(\text{linkertalud})} + \Delta\sigma_{z(\text{rechtertalud})}$$



Superpositie

THEORIE

Elke ophoging wordt gedefinieerd door eigen **γ, H, kruin, taluds** en de positie van de kruinas x_c (maximaal acht in de module)

De grond die twee ophogingen van teen tot teen bedekken kan **niet worden gedeeld**; de twee tenen mogen elkaar raken

Omdat de grond elastisch is, wordt de spanning van elke ophoging **ten opzichte van de as van de kruin** ($x - x_c$) berekend en worden de spanningen gesommeerd

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_{0,k}\,[\,\text{kruin} + \text{linkertalud} + \text{rechtertalud}\,]$$

Opgave

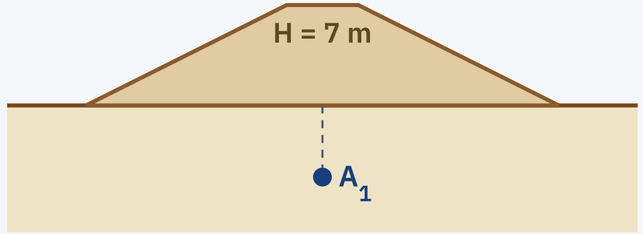
VOORBEELD

Gegeven

Ophoging	$H = 7$ m, $\gamma = 17.5$ kN/m³; kruin $B_c = 5$ m, taluds $L_1 = L_2 = 14$ m
Punt A_1	onder de kruinas, $z = 5$ m

GEVRAAGD

$\Delta\sigma_z$: met de oplossing van Osterberg (twee helften) en met de som van de drie stroken.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Belasting, verhoudingen en hoeken (elke helft: B_1 = 2.5 m; B_2 = 14 m; z = 5 m)

$$q_0 = \gamma H = 17.5\,(7) = \mathbf{122.5}\ \text{kPa} \qquad B_1/z = 0.5 \qquad B_2/z = 2.8$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}(2.5/5) = 0.4636 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}(16.5/5) - \alpha_2 = 1.2766 - 0.4636 = 0.8129$$

2 Invloedswaarde en spanning

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{16.5}{14}(1.2766) - \frac{2.5}{14}(0.4636)\right] = \frac{1.4217}{\pi} = \mathbf{0.4525}$$

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(I_{2,\text{links}} + I_{2,\text{rechts}}) = 122.5\,(0.4525 + 0.4525) = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 110.87 kPa op 5 m onder het midden van de kruin: 90.5% van de ophogingsbelasting (q_0 = 122.5 kPa).

Oplossing (2/2)

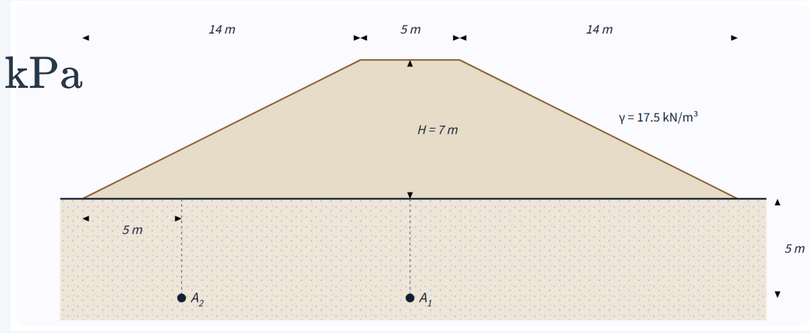
OPLOSSING

1 Strook op de kruin (q_0, B_c = 5 m): F(u) = $\tan^{-1}$(u/z) + zu/(u² + z²)

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[F(2.5) - F(-2.5)\right] = \frac{122.5}{\pi}\left(2 \times 0.8636\right) = \mathbf{67.35}\ \text{kPa}$$

2 Linkertalud (L_1 = 14 m; x′ = 16.5 m vanaf de linkerteen): G(u) = (x′/2)[zu/(u² + z²) + $\tan^{-1}$(u/z)] + z³/[2(u² + z²)]

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_0}{\pi L_1}\left[G(16.5) - G(2.5)\right] = \frac{245}{14\pi}\left(13.0316 - 9.1251\right) = \mathbf{21.76}\ \text{kPa}$$



3 Rechtertalud (symmetrisch) en totaal

$$\Delta\sigma_z = 67.35 + 21.76 + 21.76 = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

De som van de drie stroken is gelijk aan de oplossing van Osterberg: **110.87 kPa**. De module werkt op deze manier en toont onder de kruin ook de waarde van Osterberg als controle.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

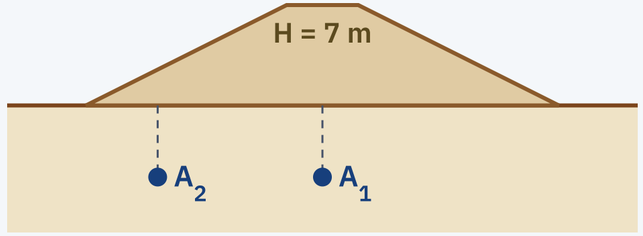
VOORBEELD

Gegeven

Ophoging	**Ophoging in Voorbeeld 1: $q_0 = 122.5$ kPa**
Punt A_2	**5 m vanaf de linkerteen naar binnen ($x = -11.5$ m), $z = 5$ m**

GEVRAAGD

$\Delta\sigma_z$: door de I_2-waarden op te tellen en af te trekken (drie delen) en met drie stroken.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Verdeling op de verticaal door A_2: x = −11.5 m; hoogte 5 m × 7/14 = 2.5 m → q = 2.5 × 17.5 = 43.75 kPa

Deel	q (kPa)	B_1 (m)	B_2 (m)	B_1/z	B_2/z	I_2	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
(+) kleine helling links	43.75	0	5	0	1.0	0.25000	**10.94**
(+) volledige hoogte aan de rechterzijde: rechthoek + trapezium	122.5	14	14	2.8	2.8	0.49669	**60.84**
(–) driehoek toegevoegd onder het talud	78.75	0	9	0	1.8	0.33859	**26.66**

2 I_2-waarden (z = 5 m)

$$I_2(0;\,5) = \frac{1}{\pi}\,\frac{5}{5}\,\tan^{-1}1 = 0.25000 \qquad I_2(14;\,14) = \frac{1}{\pi}\left[2\,(1.3941) - 1.2278\right] = 0.49669$$

$$I_2(0;\,9) = \frac{1}{\pi}\,\tan^{-1}1.8 = 0.33859 \qquad \Delta\sigma_z = 10.94 + 60.84 - 26.66 = \mathbf{45.12}\ \text{kPa}$$

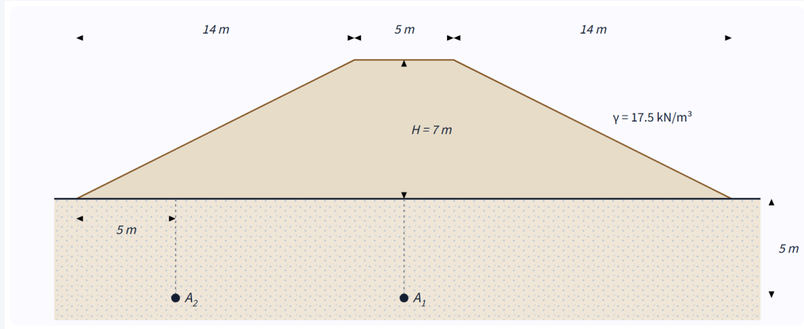
In punt A_2 is **$\Delta\sigma_z$ = 45.12 kPa** ($\Delta\sigma_z/q_0$ = 0.3683): etwa 41% van die onder het midden van de kruin (110.87 kPa).

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

Strook	Belasting	Breedte (m)	Positie ten opzichte van het punt	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
Kruinstrook	q_0 = 122.5	5	x = −11.5: u = x ± 2.5 = −9 en −14	2.195
Linkertalud (driehoekig)	q_0 = 122.5	14	x′ = −11.5 + 16.5 = 5 (vanaf de linkerteEN)	42.304
Rechtertalud (driehoekig)	q_0 = 122.5	14	x′ = 16.5 + 11.5 = 28	0.620
Totaal				**45.119**

De som van de drie stroken is **45.12 kPa**; dit is gelijk aan de 45.12 kPa die via de componentenmethode met I_2 wordt gevonden. Het grootste deel van de spanning onder het punt wordt door het **linkertalud** gedragen (42.30 kPa); de kruinstrook levert slechts 2.19 kPa.



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

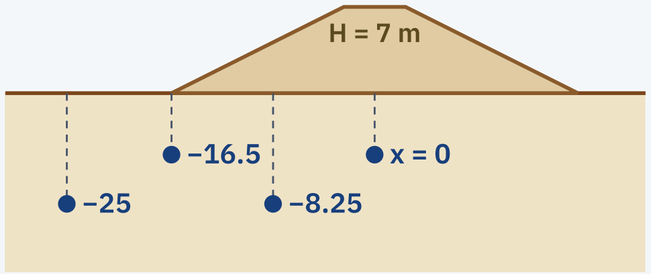
VOORBEELD

Gegeven

Ophoging	**Ophoging in voorbeeld 1 ($q_0 = 122.5$ kPa)**
Posities	$x = 0$ **(kruinas);** -8.25 **(midden van het talud);** -16.5 **(linkerteen);** -25 **m (8.5 m buiten de teen)**
Diepten	$z = 2; 5; 10; 15; 20; 30$ **m**

GEVRAAGD

Op elke locatie $\Delta\sigma_z$ en $\Delta\sigma_z/q_0$; interpretatie van de variatie met de diepte.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

z (m)	x = 0 m	x = -8.25 m	x = -16.50 m	x = -25 m	x = 0: $\Delta\sigma_z/q_0$
2	120.81	72.03	5.52	0.08	0.986
5	110.87	70.42	13.17	1.03	0.905
10	90.88	64.71	22.78	5.08	0.742
15	74.26	57.80	28.12	10.02	0.606
20	61.67	51.17	30.28	14.12	0.503
30	45.06	40.38	29.66	18.60	0.368

Onder de as van de kruin begint de spanning dicht bij q_0 en neemt ze af met de diepte (120.8 → 45.1 kPa). **Halverwege het talud** 72.0 → 40.4 kPa; **aan de linkerteen** is ze nabij het oppervlak klein (5.5 kPa) en neemt ze toe op diepte (29.7 kPa); op 8.5 m buiten de teen stijgt ze van 0.08 kPa tot 18.6 kPa.

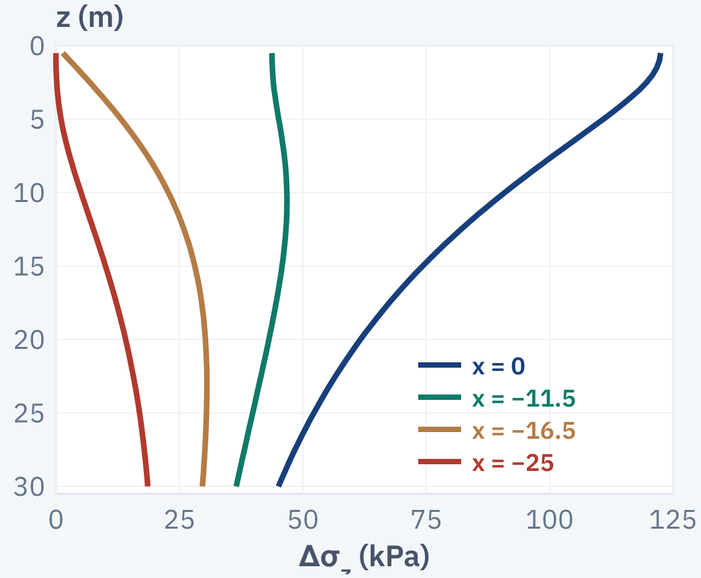
Oplossing (2/2)

OPLOSSING

1 De grootste spanning bij en buiten de hiel (diepte tot 120 m doorzocht)

Locatie	grootste $\Delta\sigma_z$ (kPa)	diepte z (m)
x = −16.5 (hiel)	30.57	23.2
x = −25 (buiten)	19.62	39.9

Onder de as van de kruin neemt de spanning met de diepte in één richting af; bij de **teen** en **buiten** neemt zij eerst toe en daarna af: de ophogingsbelasting spreidt zich met de diepte zijwaarts uit. Bij de teen is de grootste waarde 30.6 kPa bij z ≈ 23.2 m; op 8.5 m buiten is zij dieper (z ≈ 39.9 m) en kleiner (19.6 kPa).



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Tabel	$B_1/z = 0$ **…** 2 **en** $B_2/z = 0.1$ **…** 10 **voor** I_2
Handmatig	$B_1 = B_2 = z$**:** $I_2(1;\ 1)$

GEVRAAGD

Tabel van I_2; grenswaarde; gedetailleerde berekening voor $B_1 = B_2 = z$.

Oplossing (1/2)

OPLOSSING

$B_2/z \setminus B_1/z$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	1.0	2.0
0.1	0.0317	0.0939	0.1527	0.2534	0.3287	0.4166	0.4809
0.5	0.1476	0.2001	0.2470	0.3230	0.3769	0.4385	0.4847
1.0	0.2500	0.2885	0.3221	0.3751	0.4123	0.4548	0.4879
2.0	0.3524	0.3749	0.3943	0.4250	0.4465	0.4714	0.4916
5.0	0.4372	0.4465	0.4546	0.4674	0.4764	0.4869	0.4958
10.0	0.4683	0.4730	0.4770	0.4834	0.4879	0.4933	0.4978

Elke waarde is kleiner dan **0.5**; naarmate B_1/z en B_2/z groter worden, nadert I_2 tot 0.5 (voor $B_1 \to \infty$ geldt $I_2 = 0.5$). Omdat de twee helften onder de kruin bij elkaar worden opgeteld, is $\Delta\sigma_z$ hoogstens q_0.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

1 Hoeken ($z = 1$; $B_1 = B_2 = 1$)

$$\alpha_2 = \tan^{-1} 1 = 0.7854$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1 = 1.1071 - 0.7854 = 0.3218$$

2 Invloedswaarde

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{1}(1.1071) - \frac{1}{1}(0.7854)\right] = \frac{1.4289}{\pi} = \mathbf{0.45483}$$

$I_2(1; 1) = 0.45483$: dit is gelijk aan de waarde $B_1/z = 1$, $B_2/z = 1$ in de tabel. Voor het punt onder deze helft geldt $\Delta\sigma_z = 0.455\ q_0$.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Algemeen	$\gamma = 17.5$ **kN/m³,** $H = 7$ **m (**$q_0 = 122.5$ **kPa); kruin onder de as** $z = 2; 5; 10; 20$ **m**
Vormen	**(1)** $B_c = 5$, $L = 14$**; (2)** $B_c = 0$, $L = 16.5$ **(zelfde** 33 **m basis); (3)** $B_c = 5$, $L = 7$**; (4)** $B_c = 20$, $L = 14$

GEVRAAGD

Δσ$_z$ onder de as van de kruin; invloed van de vorm; handmatige toets van de driehoekige aanvulling.

Oplossing (1/2)

OPLOSSING

Opmaak	Zool (m)	z = 2 m	z = 5 m	z = 10 m	z = 20 m	z = 5: $\Delta\sigma_z/q_0$
Trapeziumvormig (opening)	33	120.81	110.87	90.88	61.67	0.905
Driehoek (zelfde basis 33 m)	33	113.09	99.55	80.01	53.79	0.813
Verticaal talud (L = 7 m)	19	119.33	102.06	73.59	43.47	0.833
Breed kruin (20 m)	48	122.38	120.87	113.47	91.29	0.987

Bij dezelfde hoogte draagt een **brede kruin** de belasting dieper (z = 20 m: 91.3 kPa), terwijl **driehoekige** en **steile** ophogingen minder dragen (53.8 en 43.5 kPa). Bij z = 5 m is de volgorde: driehoekig 99.6 < steil 102.1 < trapezium 110.9 < brede kruin 120.9 kPa.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

1 Elke helft: $B_1 = 0$; $B_2 = 16.5$ m ($z = 5$ m)

$$\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}\frac{16.5}{5} = 1.2766$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\,\frac{16.5}{16.5}\,\alpha_1 = 0.40634$$

2 Spanning

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(2\,I_2) = 122.5\,(2 \times 0.40634) = \mathbf{99.55}\ \mathrm{kPa}$$

99.55 kPa op 5 m onder de top van de driehoekige ophoging: 11.32 kPa minder dan de trapeziumvormige ophoging met dezelfde basis (110.87 kPa); de driehoekige doorsnede bevat minder ophogingsvolume dan het trapezium op dezelfde basis.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

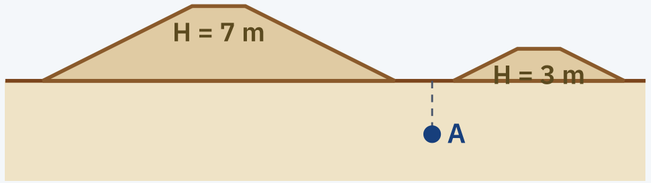
VOORBEELD

Gegeven

Ophoging 1	$\gamma = 17.5$, $H = 7$ **m**, $B_c = 5$, $L_1 = L_2 = 14$ **m; kruinas** $x = 0$
Ophoging 2	$\gamma = 17.5$, $H = 3$ **m**, $B_c = 4$, $L_1 = L_2 = 6$ **m; kruinas** $x = 30$ **m**
Punt A	$x = 20$ **m (tussen de twee ophogingen),** $z = 5$ **m; tevens** $2 - 30$ **m**

GEVRAAGD

Drie stroken van elke ophoging, $\Delta\sigma_z$ per ophoging en voor het totaal; diepteprofiel.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Overlapcontrole (tenen: ophoging 1 → 16.5 m; ophoging 2 → 22 m) en drie stroken van elke ophoging

Ophoging	q_0 (kPa)	$dx = x - x_c$	Kruinstrook	Linkertalud	Rechtertalud	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1 (H = 7 m)	122.5	20	0.282	0.133	3.654	**4.069**
2 (H = 3 m)	52.5	−10	1.160	3.992	0.276	**5.427**

2 Superpositie

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 4.069 + 5.427 = \mathbf{9.497}\ \text{kPa}$$

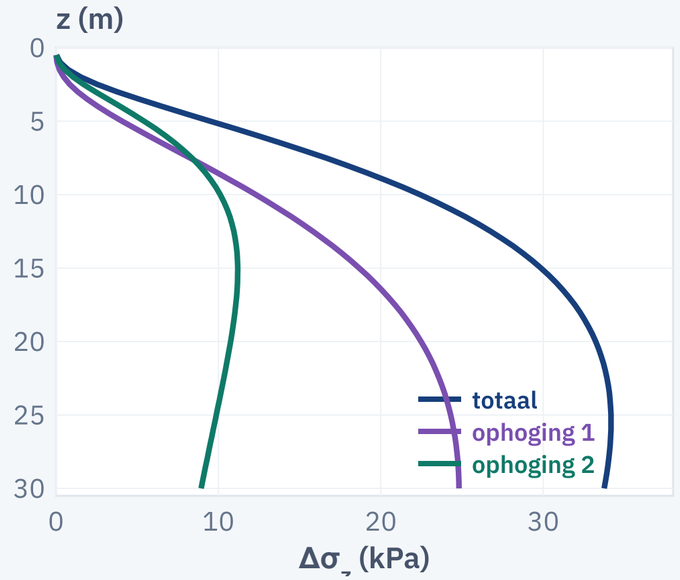
Punt A ligt op 3.5 m van de rechterteen van ophoging 1 en op 2 m van de linkerteeen van ophoging 2. De lage maar nabije **ophoging 2** levert het grootste deel van het totaal (5.43 kPa); het totaal is **$\Delta\sigma_z$ = 9.50 kPa**.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

z (m)	Ophoging 1	Ophoging 2	Totaal
2	0.48	1.06	**1.53**
5	4.07	5.43	**9.50**
10	12.30	10.11	**22.41**
15	18.67	11.19	**29.86**
20	22.48	10.75	**33.23**
30	24.82	8.94	**33.76**

De totale spanning bereikt haar grootste waarde (34.18 kPa) op z ≈ 25.5 m; met de diepte neemt het aandeel van hoge ophoging 1 toe (z = 30 m: 24.82 en 8.94 kPa).



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Samenvatting

Belangrijkste punten

Belasting: $q_0 = \gamma H = 122.5$ kPa; **Osterberg:** $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2(B_1/z, B_2/z)$, elke helft ten hoogste 0.5; onder de kruin worden de twee helften gesommeerd

A_1 (onder de kruin, z = 5 m): $I_2 = 0.4525$; $\Delta\sigma_z = 122.5\ (2 \times 0.4525) =$ **110.87 kPa**; drie stroken: 67.35 + 21.76 + 21.76

A_2 (onder het talud): 10.94 + 60.84 − 26.66 = **45.12 kPa**; naast de ophoging wordt de kleinere helft van de grotere afgetrokken; de drie stroken geven hetzelfde resultaat

Locatie: bij de teen en daarbuiten neemt de spanning eerst toe en daarna af; onder de kruin neemt zij in één richting af. **Vorm:** een brede kruin draagt meer belasting naar de diepte; een driehoekige aanvulling geeft 99.6 kPa op dezelfde basis (trapeziumvormig 110.9)

Twee ophogingen: de spanningen worden ten opzichte van de kruinassen berekend en gesommeerd: 4.07 + 5.43 = 9.50 kPa

Literatuur

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Osterberg, J.O. (1957). Influence values for vertical stresses in a semi-infinite mass due to an embankment loading. Proc. 4th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, Vol. 1, 393–394.

OPMERKING

Alle numerieke voorbeelden zijn gegenereerd met de eigen berekeningsmotor van de module; de module geeft dezelfde waarden. De module opent met een ophoging met H = 7 m, γ = 17.5 kN/m³ en punt A_1 (x = 0; z = 5 m).

GeoTerva

Online geotechnische berekeningen

Van theorie naar praktijk

Voer uw ophogingen (γ, H, kruin, taluds, positie), punt A en de diepte in GeoTerva in; de module levert tegelijk de drie stroken, de toets volgens Osterberg, de waarde van $\Delta\sigma_z$, de lijnen van gelijke spanning, het diepteprofiel, de stapsgewijze oplossing en het rapport.

Module openen → | **Theoriepagina →**

Openen op de smartphone
Proefmodules vereisen geen registratie.

Wilt u ze in uw colleges gebruiken: info@geoterva.com