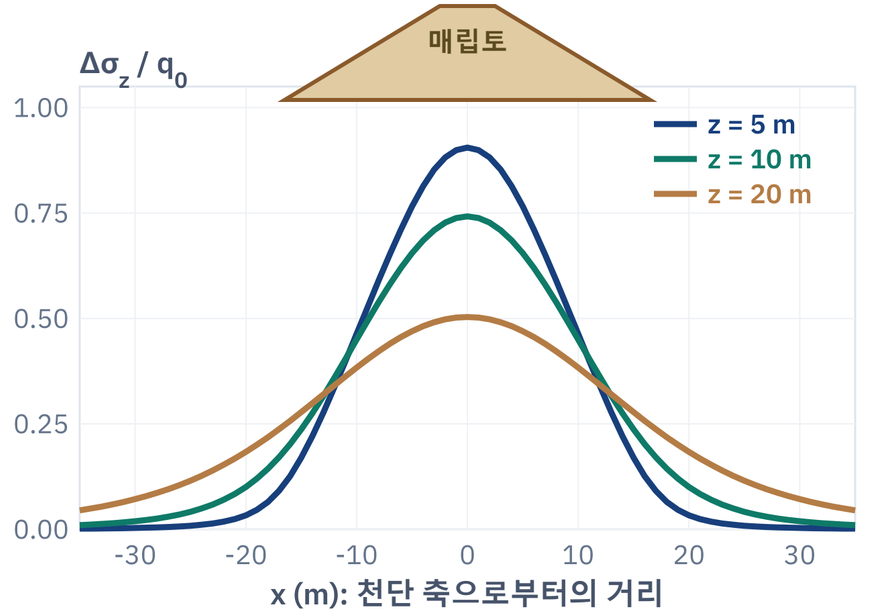
GeoTerva

지반공학 강의 자료 · 지반 내 응력

성토 하부의 응력

강의: 성토(사다리꼴 하중) 아래의 수직응력; Osterberg 해, 띠하중의 중첩 및 손계산 예제.

- $q_0 = \gamma H$
- Osterberg I_2
- 띠하중 3개
- 사면 하부와 측면
- 다중 성토



개요

이 강의에서 다루는 내용

지반 위에 놓인 긴 **사다리꼴 단면 성토체**(도로 및 철도 성토, 제방) 아래의 연직응력 증가량: 하중 $q_0 = \gamma H$, 문제는 2차원이다

Osterberg 해: 반쪽 성토의 경우 $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$; I_2는 B_1/z와 B_2/z에만 의존한다

천단 아래에서는 두 반쪽의 **합산**, 성토 옆에서는 큰 반쪽에서 작은 반쪽의 **차감**

같은 결과를 주는 **세 띠하중의 합**: 천단 띠하중 + 삼각 띠하중 2개; 모듈은 이 방식으로 계산한다

여러 성토에 의한 응력이 **합산된다는 점**

강의 흐름

각 주제는 **세 단계**로 다룬다:

1 · **이론**: 공식과 그 근거

2 · **문제**: 조건과 구하는 값

3 · **풀이**: 단계별 수치 계산

예제 성토: $H = 7$ m, $\gamma = 17.5$ kN/m³, 천단 5 m, 사면 14 m. A_1은 천단 중심의 아래에, A_2는 왼쪽 사면 하단에서 5 m 떨어진 점의 아래에 있으며, 둘 다 깊이 $z = 5$ m이다.

사다리꼴 단면 성토

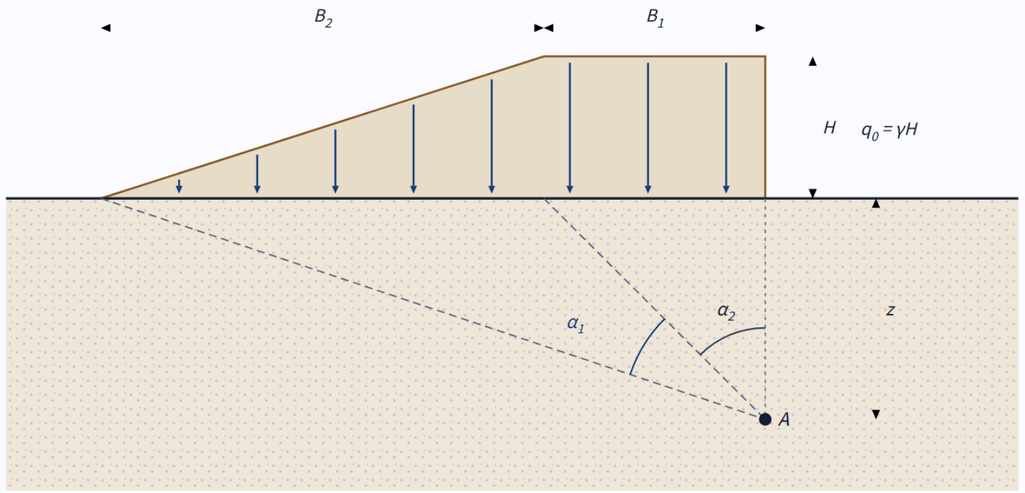
이론

도로·철도 성토, 제방, 긴 더미: 지반 위 **사다리꼴 단면** 성토의 하중

단위 면적당 중량은 천단 아래에서 $q_0 = \gamma H$이며 사면 끝에서 **0**으로 선형적으로 감소한다

성토는 길게 연장되므로 문제는 **2차원**(평면변형률)이며, 띠하중의 경우와 같다

성토는 자체 강성을 무시하고 지표면 위의 연성 하중으로 작용한다. 지반은 균질, 등방, 선형 탄성의 반무한 매질이며, $\Delta\sigma_z$는 성토에 의한 증가분만을 나타낸다



$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$

이론

A점이 폭 B_1의 안쪽 가장자리를 지나는 연직선 아래에 있는 **반쪽 성토**의 경우($q_0 = \gamma H$; 각도는 라디안):

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[\frac{B_1 + B_2}{B_2}\,(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{B_1}{B_2}\,\alpha_2\right]$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{B_1 + B_2}{z} - \tan^{-1}\frac{B_1}{z} \qquad \alpha_2 = \tan^{-1}\frac{B_1}{z}$$

간단히 쓰면 $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$: 영향값 I_2는 오직 B_1/z와 B_2/z에만 의존한다 (Osterberg 1957)

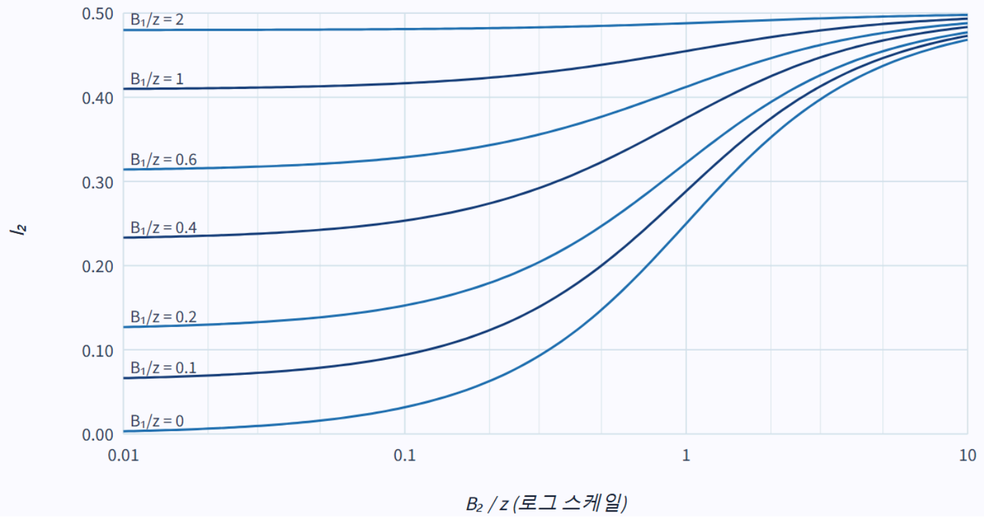
I_2와 두 반쪽

이론

성토 천단 아래의 한 점은 성토체를 좌우 **두 반쪽**으로 나누며, I_2 값을 합산한다: $\Delta\sigma_z = q_0(I_{2,left} + I_{2,right})$

성토체 **옆**의 한 점에 대해서는 큰 쪽 절반에서 작은 쪽 절반을 **뺀다**

각 절반의 기여는 최대 **0.5**



임의의 점, 임의의 경사각

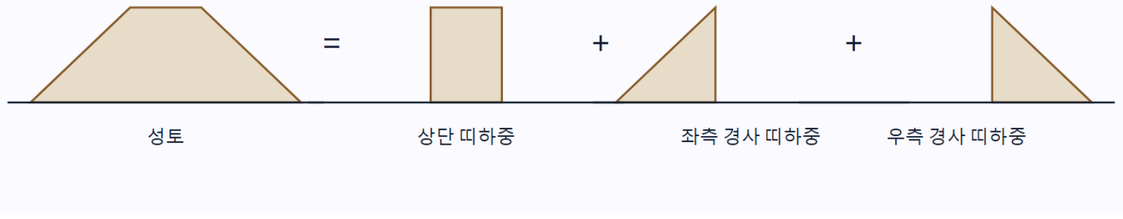
이론

사다리꼴 = 폭 B_c, 크기 q_0의 **등분포 띠하중** + 사면 선단의 0에서 마루 가장자리의 q_0까지 증가하는 **두 개의 삼각형 띠하중**

모듈은 이 방식으로 동작한다. 경우 구분과 도표가 없으며, 천단 아래의 $q_0(I_{2,left} + I_{2,right})$가 정확히 얻어지고 계산 단계에서 이 검토도 함께 보여 준다

사면의 폭은 서로 다를 수 있으며, **$B_c = 0$**이면 단면이 삼각형인 성토체가 된다

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(\text{마루})} + \Delta\sigma_{z(\text{좌측 사면})} + \Delta\sigma_{z(\text{우측 사면})}$$



중첩

이론

각 성토는 자체 **γ, H, 천단, 사면**과 천단 축의 위치 x_c로 정의된다 (모듈에서 최대 여덟 개)

두 성토가 사면 끝에서 사면 끝까지 차지하는 지반은 **공유될 수 없으며**, 두 사면 끝은 서로 닿을 수 있다

지반이 탄성이므로 각 성토의 응력은 **천단 축을 기준으로** $(x - x_c)$ 계산하고 응력을 합산한다

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_{0,k}\,[\,\text{마루} + \text{좌측 사면} + \text{우측 사면}\,]$$

문제

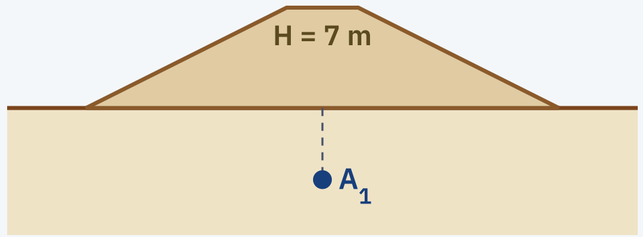
예제

조건

매립토	$H = 7$ m, $\gamma = 17.5$ kN/m³; 천단 $B_c = 5$ m, 사면 $L_1 = L_2 = 14$ m
점 A_1	천단 축 아래, $z = 5$ m

구하는 값

$\Delta\sigma_z$: Osterberg 해(두 반쪽)와 세 띠하중의 합에 의한 값.



풀이 (1/2)

풀이

1 하중, 비 및 각도 (각 절반: B_1 = 2.5 m; B_2 = 14 m; z = 5 m)

$$q_0 = \gamma H = 17.5\,(7) = \mathbf{122.5}\ \text{kPa} \qquad B_1/z = 0.5 \qquad B_2/z = 2.8$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}(2.5/5) = 0.4636 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}(16.5/5) - \alpha_2 = 1.2766 - 0.4636 = 0.8129$$

2 영향값과 응력

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{16.5}{14}(1.2766) - \frac{2.5}{14}(0.4636)\right] = \frac{1.4217}{\pi} = \mathbf{0.4525}$$

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(I_{2,\text{좌}} + I_{2,\text{우}}) = 122.5\,(0.4525 + 0.4525) = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

천단 중심 아래 5 m에서 **$\Delta\sigma_z$ = 110.87 kPa**: 성토 하중(q_0 = 122.5 kPa)의 90.5%.

풀이 (2/2)

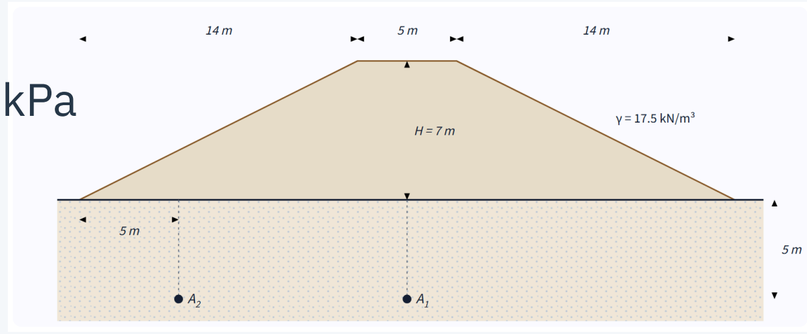
풀이

1 마루 띠하중 (q_0, B_c = 5 m): $F(u) = \tan^{-1}(u/z) + zu/(u^2 + z^2)$

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[F(2.5) - F(-2.5)\right] = \frac{122.5}{\pi}\left(2 \times 0.8636\right) = \mathbf{67.35}\ \text{kPa}$$

2 왼쪽 사면 (L_1 = 14 m; 왼쪽 사면 하단으로부터 x' = 16.5 m): $G(u) = (x'/2)[zu/(u^2 + z^2) + \tan^{-1}(u/z)] + z^3/[2(u^2 + z^2)]$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_0}{\pi L_1}\left[G(16.5) - G(2.5)\right] = \frac{245}{14\pi}\left(13.0316 - 9.1251\right) = \mathbf{21.76}\ \text{kPa}$$



3 우측 사면 (대칭)과 합계

$$\Delta\sigma_z = 67.35 + 21.76 + 21.76 = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

세 띠하중의 합은 Osterberg 해와 같은 **110.87 kPa**이다. 모듈은 이 방식으로 계산하며, 마루 아래에서 Osterberg 값도 검토용으로 함께 표시한다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

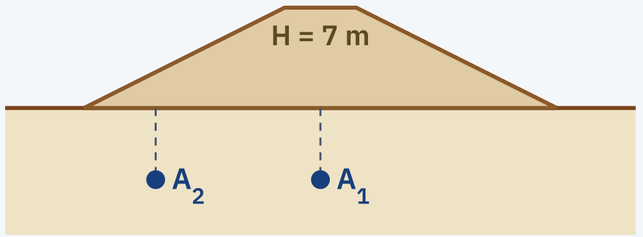
예제

구하는 값

$\Delta\sigma_z$: I_2 값의 가감(세 부분)과 세 개의 띠하중을 이용한 계산.

조건

매립토	**예제 1의 성토:** $q_0 = 122.5$ **kPa**
점 A_2	**좌측 뒷굽에서 안쪽으로** 5 **m (**$x = -11.5$ **m),** $z = 5$ **m**



풀이 (1/2)

풀이

1 A_2를 지나는 연직선에서의 분할: x = −11.5 m; 높이 5 m × 7/14 = 2.5 m → q = 2.5 × 17.5 = 43.75 kPa

부분	q (kPa)	B_1 (m)	B_2 (m)	B_1/z	B_2/z	I_2	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
(+) 왼쪽 작은 경사하중	43.75	0	5	0	1.0	0.25000	**10.94**
(+) 오른쪽의 전체 높이: 직사각형 + 경사하중	122.5	14	14	2.8	2.8	0.49669	**60.84**
(–) 사면 아래에 더해지는 삼각형	78.75	0	9	0	1.8	0.33859	**26.66**

2 I_2 값 (z = 5 m)

$$I_2(0;\,5) = \frac{1}{\pi}\,\frac{5}{5}\,\tan^{-1}1 = 0.25000 \qquad I_2(14;\,14) = \frac{1}{\pi}\left[2\,(1.3941) - 1.2278\right] = 0.49669$$

$$I_2(0;\,9) = \frac{1}{\pi}\,\tan^{-1}1.8 = 0.33859 \qquad \Delta\sigma_z = 10.94 + 60.84 - 26.66 = \mathbf{45.12}\ \text{kPa}$$

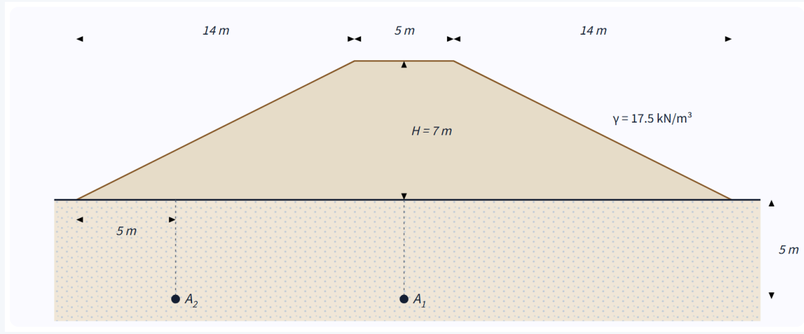
A_2점에서 **$\Delta\sigma_z$ = 45.12 kPa**($\Delta\sigma_z/q_0$ = 0.3683)이며, 이는 마루 중심 아래의 값(110.87 kPa)의 약 41%이다.

풀이 (2/2)

풀이

띠	하중	폭 (m)	점에 대한 상대 위치	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
사면 상단 띠	q_0 = 122.5	5	x = −11.5: u = x ± 2.5 = −9 및 −14	2.195
좌측 사면 (삼각형)	q_0 = 122.5	14	x′ = −11.5 + 16.5 = 5 (왼쪽 비탈끝에서)	42.304
우측 사면 (삼각형)	q_0 = 122.5	14	x′ = 16.5 + 11.5 = 28	0.620
합계				**45.119**

세 띠의 합은 **45.12 kPa**이며, I_2를 성분별로 구하는 방법으로 얻은 45.12 kPa와 같다. 점 아래 응력의 대부분은 **왼쪽 비탈**(42.30 kPa)이 부담하고, 마루 띠는 2.19 kPa만 기여한다.



GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

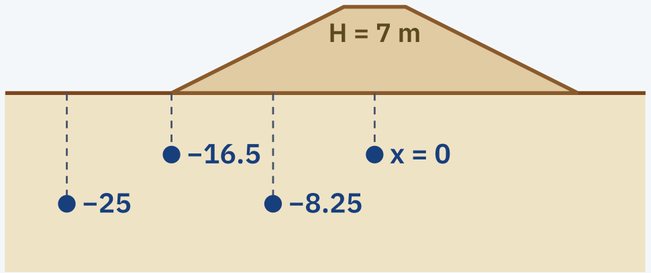
예제

조건

매립토	**예제 1의 성토 ($q_0 = 122.5$ kPa)**
위치	$x = 0$ **(마루 중심축);** -8.25 **(사면 중앙);** -16.5 **(왼쪽 사면 끝);** -25 **m (사면 끝에서** 8.5 **m 바깥)**
깊이	$z = 2; 5; 10; 15; 20; 30$ **m**

구하는 값

각 위치에서 **$\Delta\sigma_z$**와 $\Delta\sigma_z/q_0$; 깊이에 따른 변화의 해석.



풀이 (1/2)

풀이

z (m)	x = 0 m	x = -8.25 m	x = -16.50 m	x = -25 m	x = 0: $\Delta\sigma_z/q_0$
2	120.81	72.03	5.52	0.08	0.986
5	110.87	70.42	13.17	1.03	0.905
10	90.88	64.71	22.78	5.08	0.742
15	74.26	57.80	28.12	10.02	0.606
20	61.67	51.17	30.28	14.12	0.503
30	45.06	40.38	29.66	18.60	0.368

천단 중심축 아래에서 응력은 q_0에 가깝게 시작하여 깊이에 따라 감소한다(120.8 → 45.1 kPa). **사면 중간**에서는 72.0 → 40.4 kPa이다; **좌측 하단**에서는 지표면 가까이에서 작고(5.5 kPa) 깊은 곳에서 증가하며(29.7 kPa); 하단에서 8.5 m 바깥에서는 0.08 kPa에서 18.6 kPa로 증가한다.

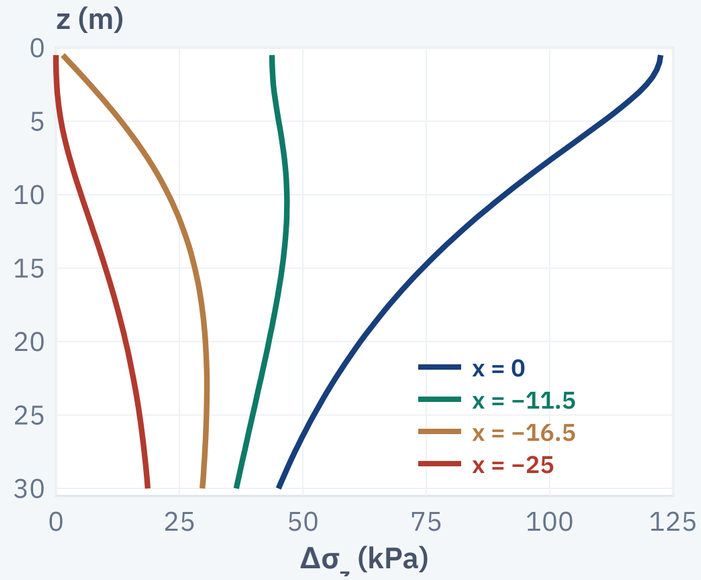
풀이 (2/2)

풀이

1 뒷굽 및 그 바깥에서의 최대 응력 (깊이는 120 m까지 탐색하였다)

위치	최대 $\Delta\sigma_z$ (kPa)	깊이 z (m)
x = −16.5 (사면 하단)	30.57	23.2
x = −25 (외부)	19.62	39.9

천단 중심축 아래에서 응력은 깊이에 따라 한 방향으로 감소하며, **사면 하단**과 **바깥쪽**에서는 먼저 증가한 뒤 감소한다: 성토 하중이 깊이에 따라 옆으로 퍼진다. 사면 하단에서의 최댓값은 z ≈ 23.2 m에서 30.6 kPa이며, 8.5 m 바깥에서는 더 깊고(z ≈ 39.9 m) 더 작다(19.6 kPa).



GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

예제

조건

표	$B_1/z = 0 \ldots 2$ 및 $B_2/z = 0.1 \ldots 10$, I_2에 대하여
직접	$B_1 = B_2 = z$: $I_2(1;\ 1)$

구하는 값

I_2 표; 극한값; $B_1 = B_2 = z$인 경우의 상세 계산.

풀이 (1/2)

풀이

$B_2/z \setminus B_1/z$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	1.0	2.0
0.1	0.0317	0.0939	0.1527	0.2534	0.3287	0.4166	0.4809
0.5	0.1476	0.2001	0.2470	0.3230	0.3769	0.4385	0.4847
1.0	0.2500	0.2885	0.3221	0.3751	0.4123	0.4548	0.4879
2.0	0.3524	0.3749	0.3943	0.4250	0.4465	0.4714	0.4916
5.0	0.4372	0.4465	0.4546	0.4674	0.4764	0.4869	0.4958
10.0	0.4683	0.4730	0.4770	0.4834	0.4879	0.4933	0.4978

모든 값은 **0.5**보다 작다; B_1/z와 B_2/z가 커질수록 I_2는 0.5에 가까워진다($B_1 \to \infty$일 때 $I_2 = 0.5$). 천단 아래에서는 두 절반이 합쳐지므로 $\Delta\sigma_z$는 최대 q_0이다.

풀이 (2/2)

풀이

1 각도 ($z = 1$; $B_1 = B_2 = 1$)

$$\alpha_2 = \tan^{-1} 1 = 0.7854$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1 = 1.1071 - 0.7854 = 0.3218$$

2 영향값

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{1}(1.1071) - \frac{1}{1}(0.7854)\right] = \frac{1.4289}{\pi} = \mathbf{0.45483}$$

$I_2(1; 1) = 0.45483$: 표의 $B_1/z = 1$, $B_2/z = 1$ 값과 같다. 이 절반 아래에 있는 점에 대해서는 $\Delta\sigma_z = 0.455\ q_0$이다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

예제

조건

공통	$\gamma = 17.5$ kN/m³, $H = 7$ m ($q_0 = 122.5$ kPa); 마루는 축 아래 $z = 2; 5; 10; 20$ m
형태	(1) $B_c = 5, L = 14$; (2) $B_c = 0, L = 16.5$ (동일한 33 m 저면); (3) $B_c = 5, L = 7$; (4) $B_c = 20, L = 14$

구하는 값

성토 마루 중심축 아래의 $\Delta\sigma_z$; 형상의 영향; 삼각형 성토의 손계산 검토.

풀이 (1/2)

풀이

형식	저면 (m)	z = 2 m	z = 5 m	z = 10 m	z = 20 m	z = 5: $\Delta\sigma_z/q_0$
사다리꼴 (초기)	33	120.81	110.87	90.88	61.67	0.905
삼각형 (동일 밑변 33 m)	33	113.09	99.55	80.01	53.79	0.813
수직 사면 (L = 7 m)	19	119.33	102.06	73.59	43.47	0.833
넓은 천단 (20 m)	48	122.38	120.87	113.47	91.29	0.987

같은 높이에서 **폭이 넓은 천단**은 하중을 더 깊이 전달하는 반면(z = 20 m: 91.3 kPa), **삼각형**과 **급경사** 성토는 더 적게 전달한다(53.8 및 43.5 kPa). z = 5 m에서의 순서: 삼각형 99.6 < 급경사 102.1 < 사다리꼴 110.9 < 넓은 천단 120.9 kPa.

풀이 (2/2)

풀이

1 각 절반: $B_1 = 0$; $B_2 = 16.5$ m ($z = 5$ m)

$$\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}\frac{16.5}{5} = 1.2766$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\,\frac{16.5}{16.5}\,\alpha_1 = 0.40634$$

2 응력

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(2\,I_2) = 122.5\,(2 \times 0.40634) = \mathbf{99.55}\ \text{kPa}$$

삼각형 성토의 천단 5 m 아래에서 **99.55 kPa**이다. 이는 밑변이 같은 사다리꼴 성토(110.87 kPa)보다 11.32 kPa 작다. 삼각형 단면은 같은 밑변의 사다리꼴보다 성토 체적이 적다.

GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

문제

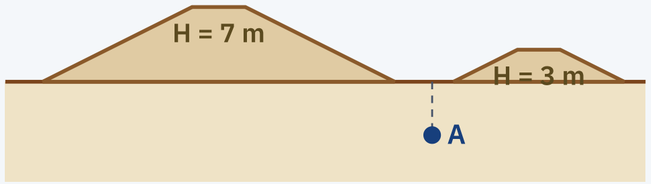
예제

조건

매립토 1	$\gamma = 17.5$, $H = 7$ m, $B_c = 5$, $L_1 = L_2 = 14$ m; 정상부 축 $x = 0$
매립토 2	$\gamma = 17.5$, $H = 3$ m, $B_c = 4$, $L_1 = L_2 = 6$ m; 천단 축 $x = 30$ m
점 A	$x = 20$ m (두 성토 사이), $z = 5$ m; 또한 $2 - 30$ m

구하는 값

각 성토체의 띠 3개, 각 성토체 및 전체의 $\Delta\sigma_z$; 깊이별 분포.



풀이 (1/2)

풀이

1 중첩 검토 (끝단: 성토체 1 → 16.5 m; 성토체 2 → 22 m) 및 각 성토체의 띠 3개

매립토	q_0 (kPa)	$dx = x - x_c$	사면 상단 띠	좌측 사면	우측 사면	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1 (H = 7 m)	122.5	20	0.282	0.133	3.654	**4.069**
2 (H = 3 m)	52.5	−10	1.160	3.992	0.276	**5.427**

2 중첩

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 4.069 + 5.427 = \mathbf{9.497}\ \text{kPa}$$

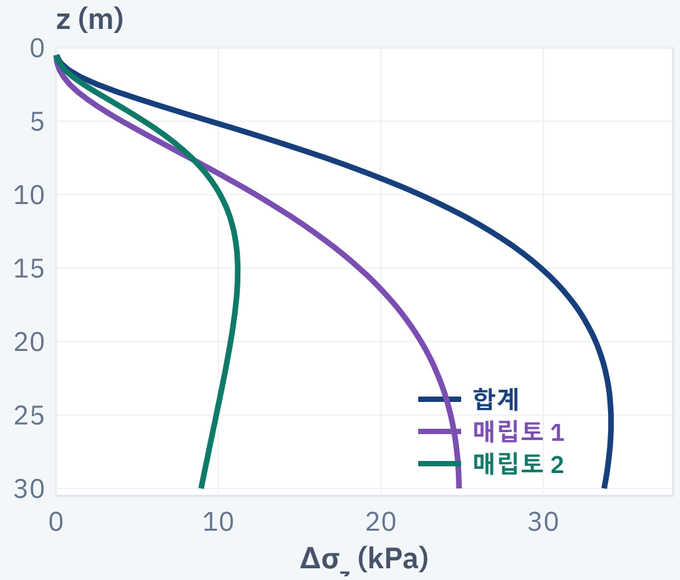
A점은 성토 1의 오른쪽 비탈 끝에서 3.5 m, 성토 2의 왼쪽 비탈 끝에서 2 m 떨어져 있다. 낮지만 가까운 **성토 2**가 합계의 대부분(5.43 kPa)을 차지하며, 합계는 **$\Delta\sigma_z$ = 9.50 kPa**이다.

풀이 (2/2)

풀이

z (m)	매립토 1	매립토 2	합계
2	0.48	1.06	**1.53**
5	4.07	5.43	**9.50**
10	12.30	10.11	**22.41**
15	18.67	11.19	**29.86**
20	22.48	10.75	**33.23**
30	24.82	8.94	**33.76**

총응력은 z ≈ 25.5 m에서 최댓값(34.18 kPa)에 이르며, 깊이가 깊어질수록 높은 성토 1의 분담이 커진다(z = 30 m: 24.82 및 8.94 kPa).



GeoTerva에서 풀이 확인하기 ↗

요약

핵심 정리

하중: $q_0 = \gamma H = 122.5$ kPa; **Osterberg:** $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2(B_1/z, B_2/z)$, 각 반쪽은 최대 0.5; 천단 아래에서는 두 반쪽을 합산한다

A_1(마루 아래, z = 5 m): $I_2 = 0.4525$; $\Delta\sigma_z = 122.5\ (2 \times 0.4525) =$ **110.87 kPa**; 세 띠: 67.35 + 21.76 + 21.76

A_2(사면 아래): 10.94 + 60.84 − 26.66 = **45.12 kPa**; 제방 옆에서는 큰 쪽 절반에서 작은 쪽 절반을 뺀다; 세 띠하중이 같은 결과를 준다

위치: 비탈 끝과 그 바깥에서는 응력이 먼저 증가했다가 감소하고, 마루 아래에서는 한 방향으로 감소한다. **형상:** 마루가 넓으면 더 큰 하중이 깊은 곳까지 전달된다. 삼각형 성토는 같은 저면에서 99.6 kPa(사다리꼴 110.9)

두 성토: 응력은 마루 중심축 기준으로 각각 계산하여 합산한다: 4.07 + 5.43 = 9.50 kPa

참고문헌

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Osterberg, J.O. (1957). Influence values for vertical stresses in a semi-infinite mass due to an embankment loading. Proc. 4th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, Vol. 1, 393–394.

참고

수치 예제는 모두 모듈 자체의 계산 엔진으로 산출하였으며, 모듈은 동일한 값을 제공한다. 모듈의 초기 조건은 $H = 7$ m, $\gamma = 17.5$ kN/m³인 성토와 점 $A_1(x = 0; z = 5$ m)이다.

온라인 지반공학 계산

이론에서 실무로

제방 조건(γ, H, 천단, 사면, 위치), A 지점과 깊이를 GeoTerva에 입력하면 모듈이 세 띠하중, Osterberg 검토, $\Delta\sigma_z$ 값, 등응력 곡선, 깊이 프로필, 단계별 풀이와 보고서를 함께 제공한다.

모듈 열기 →

이론 페이지 →

스마트폰으로 열기

체험 모듈은 가입 없이 이용할 수 있습니다.