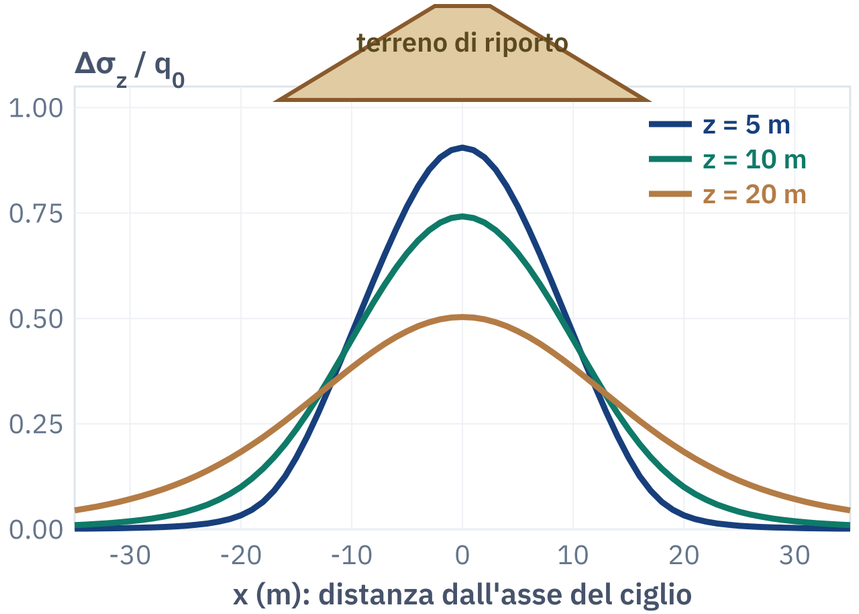
Presentazione della lezione di geotecnica · Tensioni nel mezzo terreno

Tensione al di sotto del rilevato

Lezione: tensione verticale al di sotto di un rilevato (carico trapezoidale); soluzione di Osterberg, sovrapposizione delle strisce ed esempi di calcolo svolti a mano.

- $q_0 = \gamma H$
- Osterberg I_2
- Tre strisce
- A valle e a lato del pendio
- Rilevati multipli



Introduzione

Che cosa si impara in questa lezione?

L'incremento di tensione verticale sotto un lungo **rilevato a sezione trapezoidale** sul terreno (rilevato stradale, ferroviario, argine): carico $q_0 = \gamma H$, il problema è bidimensionale

La soluzione di Osterberg: per un semirilevato, $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$; I_2 dipende solo da B_1/z e B_2/z

Sotto la cresta, la **somma** delle due metà; a fianco del rilevato, la **differenza** tra la metà maggiore e quella minore

La **somma di tre strisce** che dà lo stesso risultato: la striscia di cresta + due strisce triangolari; il modulo procede per questa via.

che le tensioni di più terrapieni si **sommano**

SVOLGIMENTO DELLA LEZIONE

Ogni argomento è trattato in **tre passaggi**:

1 · **Teoria**: formula e relativa motivazione

2 · **Traccia**: dati e richiesto

3 · **Soluzione**: passo per passo, con i numeri

Terrapieno di esempio: H = 7 m, γ = 17.5 kN/m³, cresta 5 m, pendii 14 m. A_1 è sotto il centro della cresta, A_2 sotto un punto a 5 m dal piede sinistro; entrambi alla profondità z = 5 m.

Rilevato a sezione trapezia

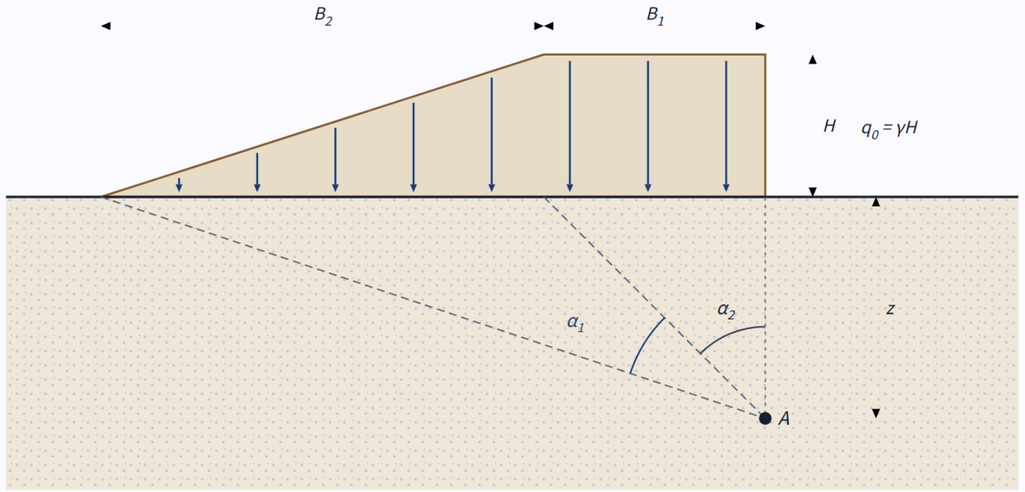
TEORIA

Terrapieno stradale o ferroviario, rilevato, un lungo cumulo: il carico di un rilevato a **sezione trapezoidale** sul terreno

Il peso per unità di area è $\mathbf{q_0 = \gamma H}$ sotto il ciglio e diminuisce linearmente fino a **zero** alla punta

Il rilevato è lungo: il problema è **bidimensionale** (deformazione piana), come nel caso dei carichi a striscia

Il rilevato agisce come un carico flessibile sulla superficie del terreno, trascurando la sua rigidezza; il terreno è un semispazio omogeneo, isotropo e linearmente elastico; $\Delta\sigma_z$ è solo l'incremento dovuto al rilevato



$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$

TEORIA

Per il **semirilevato** in cui il punto A si trova al di sotto della verticale passante per il bordo interno della larghezza B_1 ($q_0 = \gamma H$; angoli in radianti):

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[\frac{B_1 + B_2}{B_2}\,(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{B_1}{B_2}\,\alpha_2\right]$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{B_1 + B_2}{z} - \tan^{-1}\frac{B_1}{z} \qquad \alpha_2 = \tan^{-1}\frac{B_1}{z}$$

In sintesi **$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$**: il fattore di influenza I_2 dipende solo da **B_1/z** e **B_2/z** (Osterberg 1957)

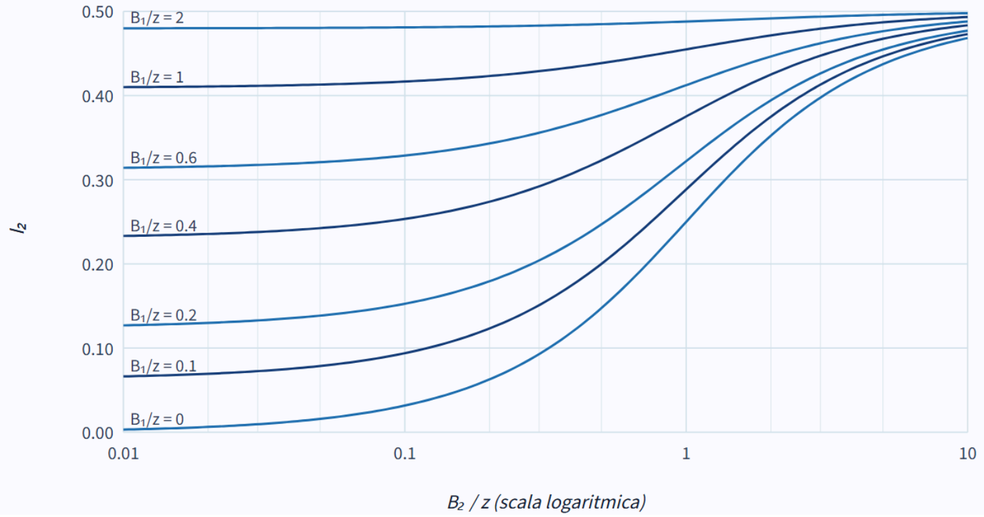
I_2 e le due metà

TEORIA

Un punto sotto il ciglio divide il rilevato in **due metà**, sinistra e destra; i valori di I_2 si sommano: $\Delta\sigma_z = q_0(I_{2,\text{sinistra}} + I_{2,\text{destra}})$

Per un punto **a fianco** del rilevato, una metà piccola viene **sottratta** da una metà grande

Il contributo di ciascuna metà è al massimo **0.5**



Qualsiasi punto, qualsiasi inclinazione

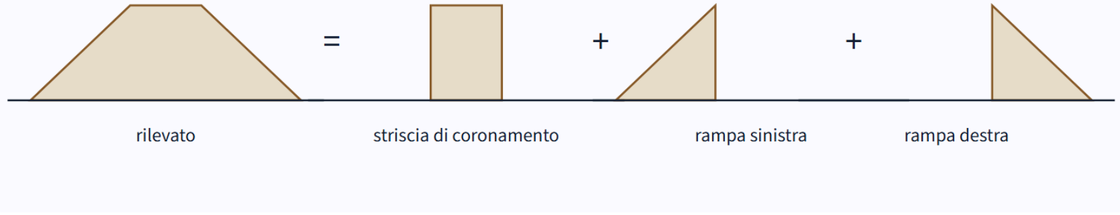
TEORIA

Trapezio = **striscia uniforme** di larghezza B_c e intensità q_0 + **due strisce triangolari** che crescono da zero al tallone fino a q_0 ai bordi del ciglio

Il modulo funziona in questo modo: non vi è distinzione di casi né abaco; $q_0(I_{2,\text{sinistra}} + I_{2,\text{destra}})$ sotto la cresta si ottiene in modo esatto e tale verifica è mostrata anche nei passaggi di calcolo

Le larghezze dei pendii possono essere diverse; **B_c = 0** fornisce un rilevato a sezione triangolare

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(\text{cresta})} + \Delta\sigma_{z(\text{pendio sinistro})} + \Delta\sigma_{z(\text{pendio destro})}$$



Sovrapposizione

TEORIA

Ciascun riporto è definito dai propri **γ, H, cresta, pendii** e dalla posizione dell'asse della cresta x_C (al massimo otto nel modulo)

Il terreno coperto punta a punta da due rilevati **non può essere condiviso**; le due punte possono toccarsi

Poiché il terreno è elastico, la tensione di ciascun rilevato si calcola **rispetto all'asse del coronamento** ($x - x_C$) e le tensioni si sommano

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_{0,k}\,[\,\text{cresta} + \text{pendio sinistro} + \text{pendio destro}\,]$$

Traccia

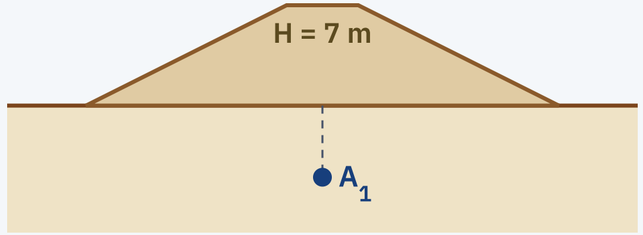
ESEMPIO

RICHIESTO

$\Delta\sigma_z$: con la soluzione di Osterberg (due metà) e con la somma delle tre strisce.

Dati

Terreno di riporto	**$H = 7$ m, $\gamma = 17.5$ kN/m³; cresta $B_c = 5$ m, pendii $L_1 = L_2 = 14$ m**
Punto A_1	**al di sotto dell'asse del ciglio, $z = 5$ m**



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Carico, rapporti e angoli (per ciascuna metà: B_1 = 2.5 m; B_2 = 14 m; z = 5 m)

$$q_0 = \gamma H = 17.5\,(7) = \mathbf{122.5}\ \text{kPa} \qquad B_1/z = 0.5 \qquad B_2/z = 2.8$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}(2.5/5) = 0.4636 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}(16.5/5) - \alpha_2 = 1.2766 - 0.4636 = 0.8129$$

2 Valore di influenza e tensione

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{16.5}{14}(1.2766) - \frac{2.5}{14}(0.4636)\right] = \frac{1.4217}{\pi} = \mathbf{0.4525}$$

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(I_{2,\text{sinistra}} + I_{2,\text{destra}}) = 122.5\,(0.4525 + 0.4525) = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 110.87 kPa a 5 m sotto il centro del rilevato: il 90.5% del carico del rilevato (q_0 = 122.5 kPa).

Soluzione (2/2)

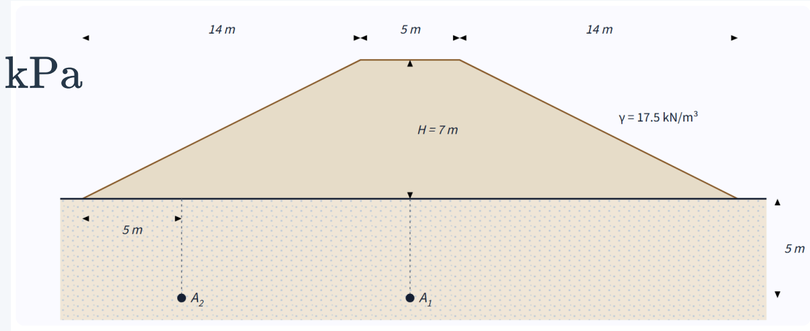
SOLUZIONE

1 Striscia sulla cresta (q_0, B_c = 5 m): $F(u) = \tan^{-1}(u/z) + zu/(u^2 + z^2)$

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[F(2.5) - F(-2.5)\right] = \frac{122.5}{\pi}\left(2 \times 0.8636\right) = \mathbf{67.35}\ \text{kPa}$$

2 Pendio sinistro (L_1 = 14 m; x' = 16.5 m dal piede sinistro): $G(u) = (x'/2)[zu/(u^2 + z^2) + \tan^{-1}(u/z)] + z^3/[2(u^2 + z^2)]$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_0}{\pi L_1}\left[G(16.5) - G(2.5)\right] = \frac{245}{14\pi}\left(13.0316 - 9.1251\right) = \mathbf{21.76}\ \text{kPa}$$



3 Pendio di destra (simmetrico) e totale

$$\Delta\sigma_z = 67.35 + 21.76 + 21.76 = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

La somma delle tre strisce coincide con la soluzione di Osterberg: **110.87 kPa**. Il modulo opera in questo modo e mostra come verifica anche il valore di Osterberg sotto il ciglio.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

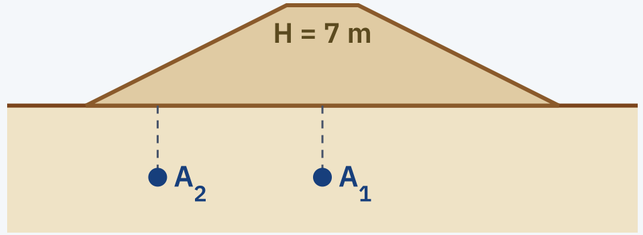
ESEMPIO

RICHIESTO

$\Delta\sigma_z$: sommando e sottraendo i valori di I_2 (tre parti) e con tre strisce.

Dati

Terreno di riporto	**Rilevato dell'Esempio 1: $q_0 = 122.5$ kPa**
Punto A_2	**5 m verso l'interno dallo spigolo di valle sinistro ($x = -11.5$ m), $z = 5$ m**



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Suddivisione sulla verticale passante per A_2: x = −11.5 m; altezza 5 m × 7/14 = 2.5 m → q = 2.5 × 17.5 = 43.75 kPa

Pezzo	q (kPa)	B_1 (m)	B_2 (m)	B_1/z	B_2/z	I_2	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
(+) rampa piccola a sinistra	43.75	0	5	0	1.0	0.25000	**10.94**
(+) altezza piena a destra: rettangolo + rampa	122.5	14	14	2.8	2.8	0.49669	**60.84**
(–) triangolo aggiunto sotto il pendio	78.75	0	9	0	1.8	0.33859	**26.66**

2 Valori di I_2 (z = 5 m)

$$I_2(0;\,5) = \frac{1}{\pi}\,\frac{5}{5}\,\tan^{-1}1 = 0.25000 \qquad I_2(14;\,14) = \frac{1}{\pi}\left[2\,(1.3941) - 1.2278\right] = 0.49669$$

$$I_2(0;\,9) = \frac{1}{\pi}\,\tan^{-1}1.8 = 0.33859 \qquad \Delta\sigma_z = 10.94 + 60.84 - 26.66 = \mathbf{45.12}\ \text{kPa}$$

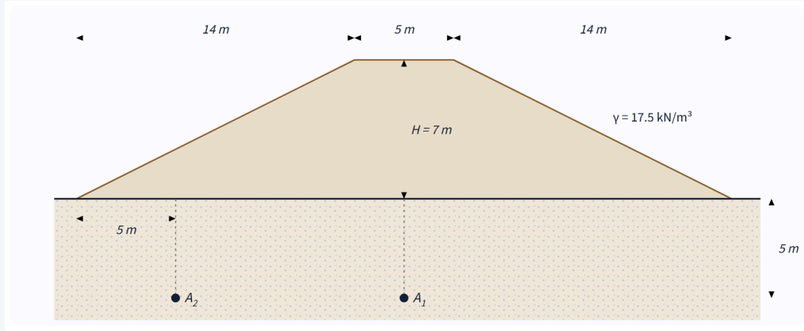
Nel punto A_2, **$\Delta\sigma_z$ = 45.12 kPa** ($\Delta\sigma_z/q_0$ = 0.3683): circa il 41% di quello sotto il centro del ciglio (110.87 kPa).

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

Striscia	Carico	Larghezza (m)	Posizione rispetto al punto	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
Striscia di cresta	q_0 = 122.5	5	x = −11.5: u = x ± 2.5 = −9 e −14	2.195
Pendio a sinistra (triangolare)	q_0 = 122.5	14	x′ = −11.5 + 16.5 = 5 (dalla punta sinistra)	42.304
Pendio a destra (triangolare)	q_0 = 122.5	14	x′ = 16.5 + 11.5 = 28	0.620
Totale				**45.119**

La somma delle tre strisce è **45.12 kPa**; coincide con i 45.12 kPa ottenuti mediante la componente I_2. La maggior parte della tensione al di sotto del punto è portata dalla **scarpa di monte** (42.30 kPa); la striscia di cresta contribuisce solo per 2.19 kPa.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

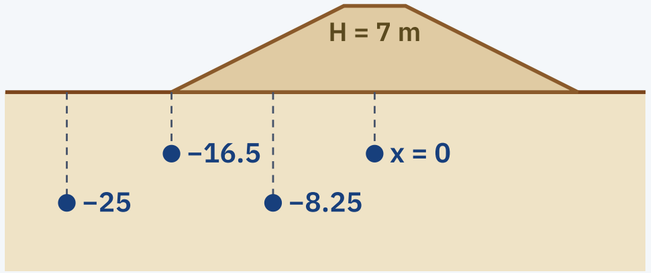
ESEMPIO

Dati

Terreno di riporto	**Terrapieno dell'Esempio 1 ($q_0 = 122.5$ kPa)**
Posizioni	**$x = 0$ (asse del ciglio); -8.25 (mezzo del pendio); -16.5 (piede sinistro); -25 m (8.5 m all'esterno del piede)**
Profondità	**$z = 2; 5; 10; 15; 20; 30$ m**

RICHIESTO

In ogni posizione **$\Delta\sigma_z$** e $\Delta\sigma_z/q_0$; interpretazione della variazione con la profondità.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

z (m)	x = 0 m	x = -8.25 m	x = -16.50 m	x = -25 m	x = 0: $\Delta\sigma_z/q_0$
2	120.81	72.03	5.52	0.08	0.986
5	110.87	70.42	13.17	1.03	0.905
10	90.88	64.71	22.78	5.08	0.742
15	74.26	57.80	28.12	10.02	0.606
20	61.67	51.17	30.28	14.12	0.503
30	45.06	40.38	29.66	18.60	0.368

Sotto l'asse del ciglio la tensione parte vicino a q_0 e diminuisce con la profondità (120.8 → 45.1 kPa). **A metà del pendio** 72.0 → 40.4 kPa; **al piede di sinistra** è piccola vicino alla superficie (5.5 kPa) e aumenta in profondità (29.7 kPa); a 8.5 m all'esterno del piede sale da 0.08 kPa a 18.6 kPa.

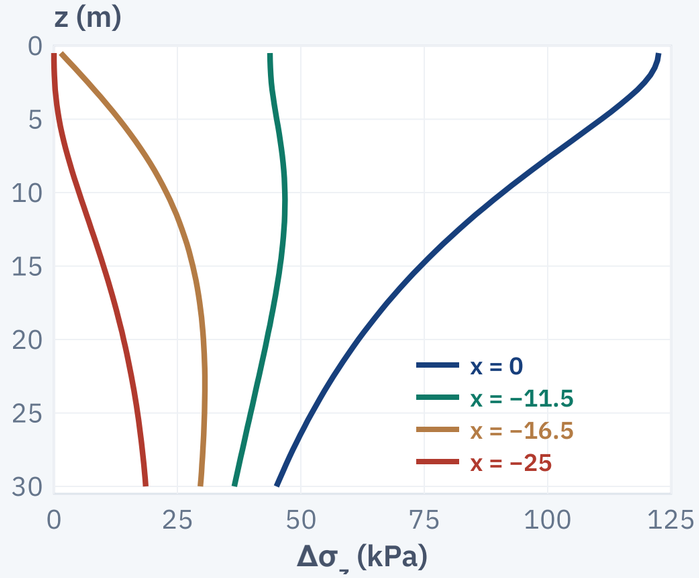
Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

1 Tensione massima in corrispondenza del tallone e all'esterno (profondità analizzata fino a 120 m)

Posizione	$\Delta\sigma_z$ massimo (kPa)	profondità z (m)
x = −16.5 (punta)	30.57	23.2
x = −25 (all'esterno)	19.62	39.9

Sotto l'asse del ciglio la tensione diminuisce con la profondità in modo monotono; al **piede** e **all'esterno** prima aumenta, poi diminuisce: il carico del rilevato si diffonde lateralmente con la profondità. Al piede il valore massimo è 30.6 kPa a z ≈ 23.2 m; a 8.5 m all'esterno è più profondo (z ≈ 39.9 m) e minore (19.6 kPa).



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

ESEMPIO

Dati

Tabella	$B_1/z = 0$ **…** 2 **e** $B_2/z = 0.1$ **…** 10 **per** I_2
Manuale	$B_1 = B_2 = z$**:** $I_2(1;\ 1)$

RICHIESTO

Tabella di I_2; valore limite; calcolo dettagliato per $B_1 = B_2 = z$.

Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

$B_2/z \setminus B_1/z$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	1.0	2.0
0.1	0.0317	0.0939	0.1527	0.2534	0.3287	0.4166	0.4809
0.5	0.1476	0.2001	0.2470	0.3230	0.3769	0.4385	0.4847
1.0	0.2500	0.2885	0.3221	0.3751	0.4123	0.4548	0.4879
2.0	0.3524	0.3749	0.3943	0.4250	0.4465	0.4714	0.4916
5.0	0.4372	0.4465	0.4546	0.4674	0.4764	0.4869	0.4958
10.0	0.4683	0.4730	0.4770	0.4834	0.4879	0.4933	0.4978

Ogni valore è minore di **0.5**; al crescere di B_1/z e di B_2/z, I_2 si avvicina a 0.5 (per $B_1 \to \infty$, $I_2 = 0.5$). Poiché sotto il ciglio le due metà si sommano, $\Delta\sigma_z$ vale al massimo q_0.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

1 Angoli ($z = 1$; $B_1 = B_2 = 1$)

$$\alpha_2 = \tan^{-1} 1 = 0.7854$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1 = 1.1071 - 0.7854 = 0.3218$$

2 Valore di influenza

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{1}(1.1071) - \frac{1}{1}(0.7854)\right] = \frac{1.4289}{\pi} = \mathbf{0.45483}$$

$I_2(1; 1) = 0.45483$: coincide con il valore $B_1/z = 1$, $B_2/z = 1$ della tabella. Per il punto al di sotto di questa metà si ha $\Delta\sigma_z = 0.455\ q_0$.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

ESEMPIO

Dati

Comune	$\gamma = 17.5$ **kN/m³,** $H = 7$ **m (**$q_0 = 122.5$ **kPa); cresta sotto l'asse** $z = 2; 5; 10; 20$ **m**
Forme	**(1)** $B_c = 5$, $L = 14$**; (2)** $B_c = 0$, $L = 16.5$ **(stessa base 33 m); (3)** $B_c = 5$, $L = 7$**; (4)** $B_c = 20$, $L = 14$

RICHIESTO

$\Delta\sigma_z$ sotto l'asse del rilevato; effetto della forma; controllo manuale del rilevato a sezione triangolare.

Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

Formato	Base (m)	z = 2 m	z = 5 m	z = 10 m	z = 20 m	z = 5: $\Delta\sigma_z/q_0$
Trapezoidale (apertura)	33	120.81	110.87	90.88	61.67	0.905
Triangolo (stessa base 33 m)	33	113.09	99.55	80.01	53.79	0.813
Pendio verticale (L = 7 m)	19	119.33	102.06	73.59	43.47	0.833
Cresta larga (20 m)	48	122.38	120.87	113.47	91.29	0.987

A parità di altezza, il **rilevato a cresta larga** trasmette il carico più in profondità (z = 20 m: 91.3 kPa), mentre i rilevati **triangolare** e **a scarpa ripida** trasmettono meno (53.8 e 43.5 kPa). A z = 5 m l'ordine è: triangolare 99.6 < scarpa ripida 102.1 < trapezoidale 110.9 < cresta larga 120.9 kPa.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

1 Ciascuna metà: $B_1 = 0$; $B_2 = 16.5$ m ($z = 5$ m)

$$\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}\frac{16.5}{5} = 1.2766$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\,\frac{16.5}{16.5}\,\alpha_1 = 0.40634$$

2 Tensione

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(2\,I_2) = 122.5\,(2 \times 0.40634) = \mathbf{99.55}\ \mathrm{kPa}$$

99.55 kPa a 5 m sotto la sommità del rilevato triangolare: 11.32 kPa in meno rispetto al rilevato trapezoidale con la stessa base (110.87 kPa); la sezione triangolare comporta un volume di riporto inferiore a quello del trapezio sulla stessa base.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

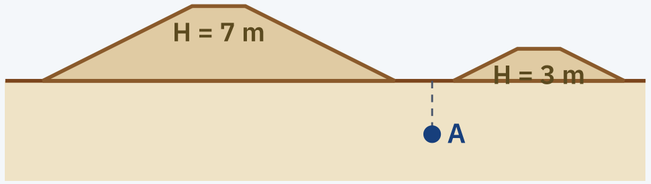
ESEMPIO

Dati

Riporto 1	$\gamma = 17.5$, $H = 7$ **m**, $B_c = 5$, $L_1 = L_2 = 14$ **m; asse del ciglio** $x = 0$
Riporto 2	$\gamma = 17.5$, $H = 3$ **m**, $B_c = 4$, $L_1 = L_2 = 6$ **m; asse della cresta** $x = 30$ **m**
Punto A	$x = 20$ **m (tra i due rilevati),** $z = 5$ **m; inoltre** $2 - 30$ **m**

RICHIESTO

Le tre strisce di ciascun rilevato, $\Delta\sigma_z$ per ciascun rilevato e per il totale; profilo con la profondità.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Verifica della sovrapposizione (piedi: rilevato 1 → 16.5 m; rilevato 2 → 22 m) e tre strisce di ciascun rilevato

Terreno di riporto	q_0 (kPa)	dx = x − x_c	Striscia di cresta	Pendio sinistro	Pendio destro	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1 (H = 7 m)	122.5	20	0.282	0.133	3.654	**4.069**
2 (H = 3 m)	52.5	−10	1.160	3.992	0.276	**5.427**

2 Sovrapposizione

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 4.069 + 5.427 = \mathbf{9.497}\ \mathrm{kPa}$$

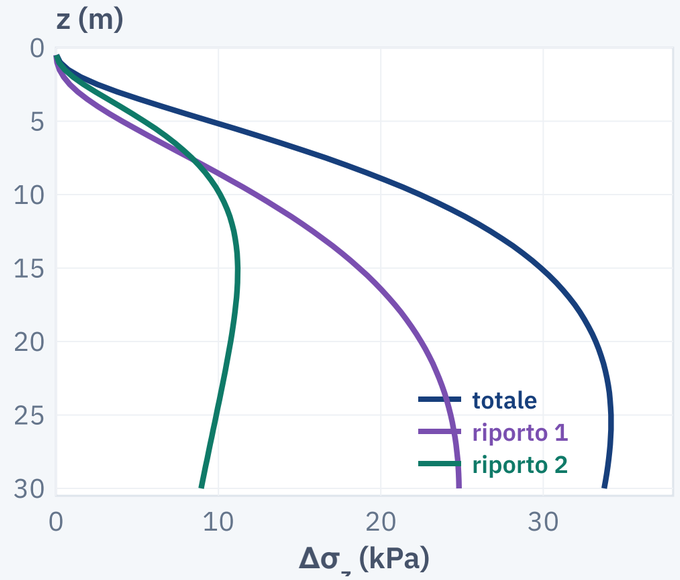
Il punto A dista 3.5 m dalla scarpa di valle del rilevato 1 e 2 m dalla scarpa di monte del rilevato 2. Il **rilevato 2**, basso ma vicino, fornisce la maggior parte del totale (5.43 kPa); il totale è **$\Delta\sigma_z$ = 9.50 kPa**.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

z (m)	Riporto 1	Riporto 2	Totale
2	0.48	1.06	**1.53**
5	4.07	5.43	**9.50**
10	12.30	10.11	**22.41**
15	18.67	11.19	**29.86**
20	22.48	10.75	**33.23**
30	24.82	8.94	**33.76**

La tensione totale raggiunge il suo valore massimo (34.18 kPa) a z ≈ 25.5 m; con la profondità aumenta la quota del rilevato alto 1 (z = 30 m: 24.82 e 8.94 kPa).



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Sintesi

Punti chiave

Carico: $q_0 = \gamma H = 122.5$ kPa; **Osterberg:** $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2(B_1/z, B_2/z)$, ciascuna metà al massimo 0.5; a valle del ciglio le due metà si sommano

A_1 (sotto il ciglio, z = 5 m): $I_2 = 0.4525$; $\Delta\sigma_z = 122.5\ (2 \times 0.4525) =$ **110.87 kPa**; tre strisce: 67.35 + 21.76 + 21.76

A_2 (a valle del pendio): 10.94 + 60.84 − 26.66 = **45.12 kPa**; a fianco del rilevato si sottrae la semibanda minore dalla semibanda maggiore; le tre strisce danno lo stesso risultato

Posizione: in corrispondenza della punta (mensola di valle) e all'esterno la tensione prima aumenta poi diminuisce; sotto il ciglio diminuisce in una sola direzione. **Forma:** un ciglio largo trasmette più carico in profondità; un terrapieno triangolare dà 99.6 kPa alla stessa base (trapezoidale 110.9)

Due terrapieni: le tensioni si calcolano rispetto agli assi dei cigli e si sommano: 4.07 + 5.43 = 9.50 kPa

Bibliografia

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Osterberg, J.O. (1957). Influence values for vertical stresses in a semi-infinite mass due to an embankment loading. Proc. 4th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, Vol. 1, 393–394.

NOTA

Tutti gli esempi numerici sono stati prodotti con il motore di calcolo del modulo; il modulo restituisce gli stessi valori. Il modulo si apre con un rilevato di H = 7 m, γ = 17.5 kN/m³ e il punto A_1 (x = 0; z = 5 m).

GeoTerva

Calcoli geotecnici online

Dalla teoria alla pratica

Inserire in GeoTerva i propri rilevati (γ, H, cresta, pendii, posizione), il punto A e la profondità; il modulo fornisce insieme le tre strisce, la verifica di Osterberg, il valore di $\Delta\sigma_z$, le curve di ugual tensione, il profilo con la profondità, la soluzione passo per passo e la relazione.

Aprire il modulo → | **Pagina di teoria →**

Aprire dallo smartphone
I moduli di prova non richiedono registrazione.

Se si desidera utilizzarli nelle proprie lezioni: info@geoterva.com