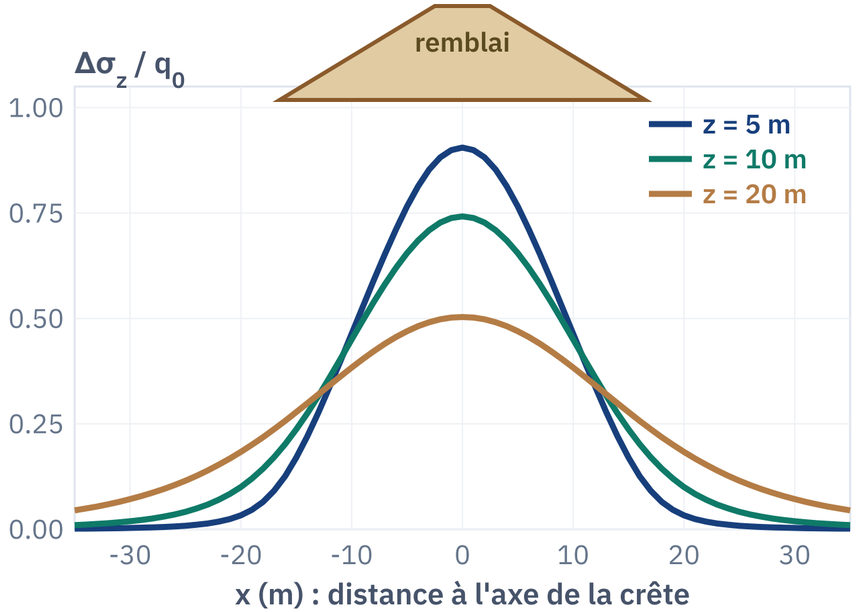
Cours de géotechnique · Contraintes dans le massif de sol

Contrainte sous le remblai

Cours : contrainte verticale sous un remblai (charge trapézoïdale) ; solution d'Osterberg, superposition de bandes et exemples traités à la main.

$q_0 = \gamma H$ | Osterberg I_2 | Trois bandes | Sous le talus et latéralement | Remblais multiples



Que verrons-nous dans ce cours ?

L'accroissement de la contrainte verticale sous un long **remblai de section trapézoïdale** posé sur le sol (remblai routier ou ferroviaire, digue) : charge $q_0 = \gamma H$, le problème est bidimensionnel

La solution d'Osterberg : pour un demi-remblai, $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$; I_2 ne dépend que de B_1/z et de B_2/z

Sous la crête, l'**addition** des deux moitiés ; à côté du remblai, la **soustraction** de la petite moitié à la grande

La **somme de trois bandes** donnant le même résultat : la bande de crête + deux bandes triangulaires ; le module procède de cette manière

que les contraintes de plusieurs remblais se **superposent**

DÉROULÉ DU COURS

Chaque thème est traité en **trois étapes** :

1 · **Théorie** : formule et justification

2 · **Énoncé** : données et à déterminer

3 · **Solution** : étape par étape, avec les valeurs numériques

Remblai de l'exemple : H = 7 m, γ = 17.5 kN/m³, crête de 5 m, talus de 14 m. A_1 est sous le centre de la crête, A_2 sous un point situé à 5 m du pied gauche ; les deux à la profondeur z = 5 m.

Remblai de section trapézoïdale

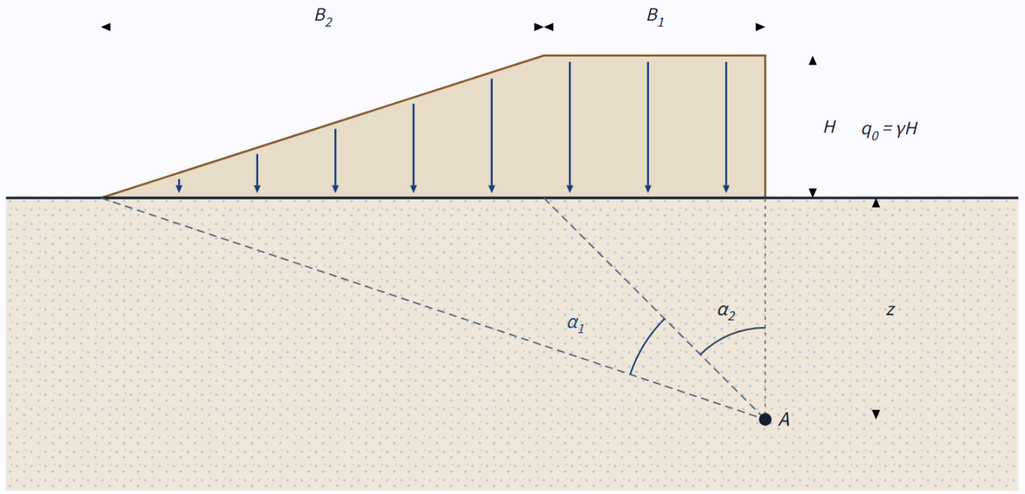
THÉORIE

Remblai routier ou ferroviaire, digue, long amas de matériaux : charge d'un remblai **à section trapézoïdale** reposant sur le sol

Le poids par unité de surface est $\mathbf{q_0 = \gamma H}$ sous la crête et décroît linéairement jusqu'à **zéro** au pied des talus

Le remblai est long : le problème est **bidimensionnel** (déformation plane), comme pour les charges en bande

Le remblai agit comme une charge flexible à la surface du sol, sa propre rigidité étant négligée ; le sol est un milieu semi-infini homogène, isotrope et élastique linéaire ; $\Delta\sigma_z$ n'est que l'accroissement dû au remblai



$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$

THÉORIE

Pour le **demi-remblai** où le point A se trouve sous la verticale passant par le bord intérieur de la largeur B_1 ($q_0 = \gamma H$; angles en radians) :

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[\frac{B_1 + B_2}{B_2}\,(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{B_1}{B_2}\,\alpha_2\right]$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{B_1 + B_2}{z} - \tan^{-1}\frac{B_1}{z} \qquad \alpha_2 = \tan^{-1}\frac{B_1}{z}$$

En bref, **$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$** : le coefficient d'influence I_2 dépend uniquement de **B_1/z** et de **B_2/z** (Osterberg 1957)

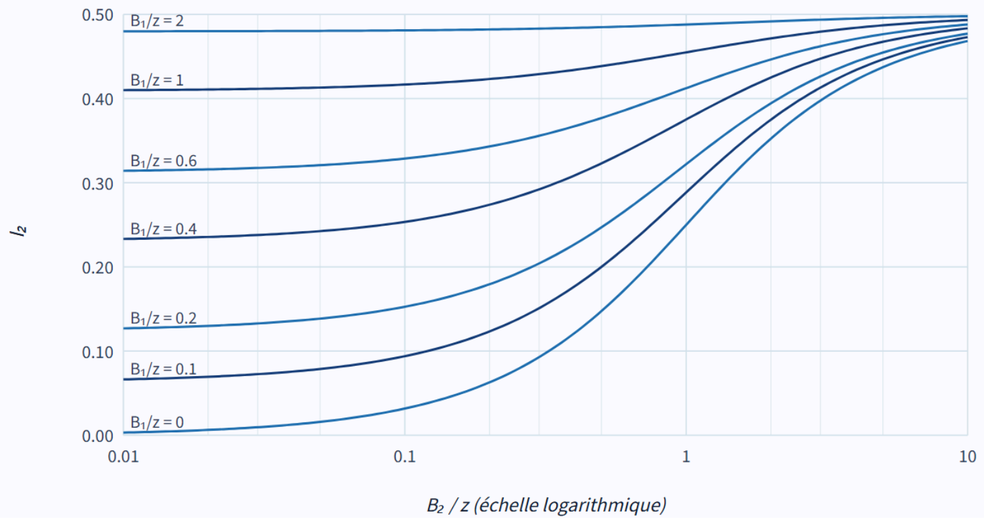
I_2 et les deux moitiés

THÉORIE

Un point situé sous la crête divise le remblai en **deux moitiés**, à gauche et à droite ; les valeurs de I_2 s'additionnent : $\Delta\sigma_z = q_0(I_{2,g} + I_{2,d})$

Pour un point **situé à côté** du remblai, on **soustrait** une petite moitié d'une grande moitié

La contribution de chaque moitié vaut au plus **0.5**



Tout point, toutes inclinaisons

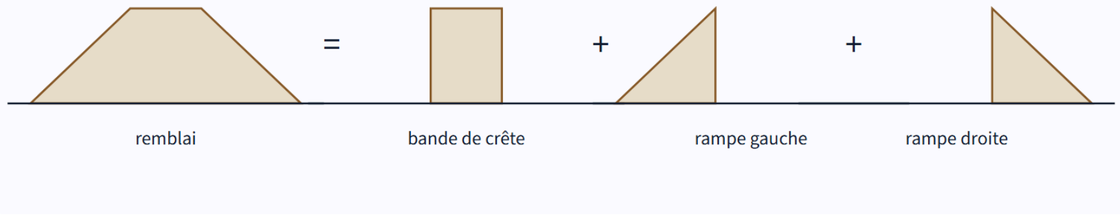
THÉORIE

Trapèze = une **bande uniforme** de largeur B_c et d'intensité q_0 + **deux bandes triangulaires** croissant de zéro au pied du talus jusqu'à q_0 aux bords de la crête

Le module fonctionne ainsi : il n'y a ni distinction de cas ni abaque ; sous la crête, $q_0(I_{2,g} + I_{2,d})$ est obtenu exactement, et cette vérification est également présentée dans les étapes de calcul

Les largeurs des talus peuvent être différentes ; **B_c = 0** donne un remblai à section triangulaire

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(\text{crête})} + \Delta\sigma_{z(\text{talus gauche})} + \Delta\sigma_{z(\text{talus droit})}$$



Superposition

THÉORIE

Chaque remblai est défini par ses propres **γ, H, crête, talus** et la position de l'axe de la crête x_c (huit au plus dans le module)

Le terrain couvert, d'un pied à l'autre, par deux remblais **ne peut pas être partagé** ; les deux pieds peuvent se toucher

Le sol étant élastique, la contrainte de chaque remblai est calculée **par rapport à l'axe de la crête** $(x - x_c)$ et les contraintes sont additionnées

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_{0,k}\,[\,\text{crête} + \text{talus gauche} + \text{talus droit}\,]$$

Énoncé

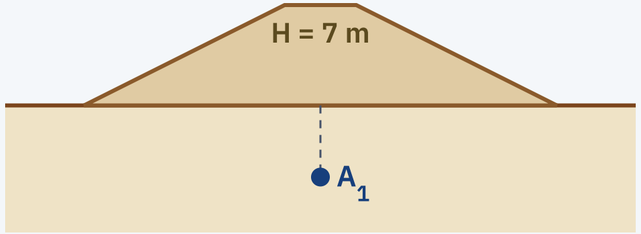
EXEMPLE

Données

Remblai	$H = 7$ m, $\gamma = 17.5$ kN/m³ ; crête $B_c = 5$ m, talus $L_1 = L_2 = 14$ m
Point A_1	sous l'axe de la crête, $z = 5$ m

À DÉTERMINER

$\Delta\sigma_z$: par la solution d'Osterberg (deux moitiés) et par la somme des trois bandes.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Charge, rapports et angles (chaque moitié : B_1 = 2.5 m ; B_2 = 14 m ; z = 5 m)

$$q_0 = \gamma H = 17.5\,(7) = \mathbf{122.5}\ \text{kPa} \qquad B_1/z = 0.5 \qquad B_2/z = 2.8$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}(2.5/5) = 0.4636 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}(16.5/5) - \alpha_2 = 1.2766 - 0.4636 = 0.8129$$

2 Valeur d'influence et contrainte

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{16.5}{14}(1.2766) - \frac{2.5}{14}(0.4636)\right] = \frac{1.4217}{\pi} = \mathbf{0.4525}$$

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(I_{2,\text{gauche}} + I_{2,\text{droite}}) = 122.5\,(0.4525 + 0.4525) = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 110.87 kPa à 5 m sous le centre de la crête : 90.5 % de la charge du remblai (q_0 = 122.5 kPa).

Solution (2/2)

SOLUTION

1 Bande de crête (q_0, B_c = 5 m) : F(u) = $\tan^{-1}(u/z) + zu/(u^2 + z^2)$

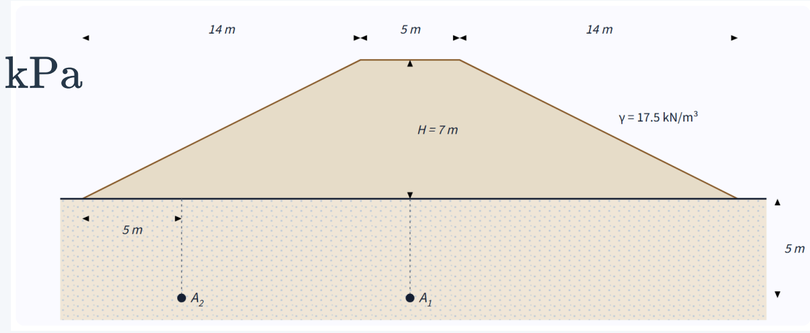
$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[F(2.5) - F(-2.5)\right] = \frac{122.5}{\pi}\left(2 \times 0.8636\right) = \mathbf{67.35}\ \text{kPa}$$

2 Talus gauche (L_1 = 14 m ; x′ = 16.5 m depuis le pied gauche) : G(u) = (x′/2) $[zu/(u^2 + z^2) + \tan^{-1}(u/z)] + z^3/[2(u^2 + z^2)]$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_0}{\pi L_1}\left[G(16.5) - G(2.5)\right] = \frac{245}{14\pi}\left(13.0316 - 9.1251\right) = \mathbf{21.76}\ \text{kPa}$$

3 Talus droit (symétrique) et total

$$\Delta\sigma_z = 67.35 + 21.76 + 21.76 = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$



La somme des trois bandes est identique à la solution d'Osterberg : **110.87 kPa**. Le module procède de cette manière et affiche également, à titre de vérification, la valeur d'Osterberg sous la crête.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

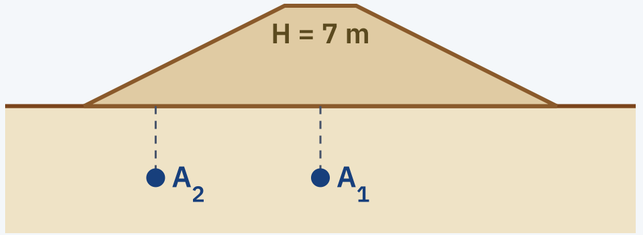
EXEMPLE

Données

Remblai	**Remblai de l'exemple 1 : $q_0 = 122.5$ kPa**
Point A_2	**sol patin avant à 5 m vers l'intérieur ($x = -11.5$ m), $z = 5$ m**

À DÉTERMINER

$\Delta\sigma_z$: par addition et soustraction des valeurs de I_2 (trois parties) et par trois bandes.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Découpage sur la verticale passant par A_2 : x = −11.5 m ; hauteur 5 m × 7/14 = 2.5 m → q = 2.5 × 17.5 = 43.75 kPa

Élément	q (kPa)	B_1 (m)	B_2 (m)	B_1/z	B_2/z	I_2	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
(+) petite rampe à gauche	43.75	0	5	0	1.0	0.25000	**10.94**
(+) hauteur totale à droite : rectangle + rampe	122.5	14	14	2.8	2.8	0.49669	**60.84**
(−) triangle ajouté sous le talus	78.75	0	9	0	1.8	0.33859	**26.66**

2 Valeurs de I_2 (z = 5 m)

$$I_2(0;\,5) = \frac{1}{\pi}\,\frac{5}{5}\,\tan^{-1}1 = 0.25000 \qquad I_2(14;\,14) = \frac{1}{\pi}\left[2\,(1.3941) - 1.2278\right] = 0.49669$$

$$I_2(0;\,9) = \frac{1}{\pi}\,\tan^{-1}1.8 = 0.33859 \qquad \Delta\sigma_z = 10.94 + 60.84 - 26.66 = \mathbf{45.12}\ \text{kPa}$$

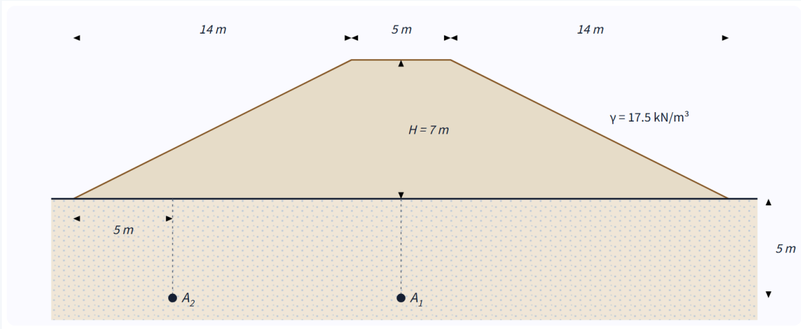
Au point A_2, **$\Delta\sigma_z$ = 45.12 kPa** ($\Delta\sigma_z/q_0$ = 0.3683) : soit 41 % de la valeur sous le centre de la crête (110.87 kPa).

Solution (2/2)

SOLUTION

Bande	Charge	Largeur (m)	Position par rapport au point	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
Bande de crête	q_0 = 122.5	5	x = −11.5 : u = x ± 2.5 = −9 et −14	2.195
Talus gauche (triangulaire)	q_0 = 122.5	14	x′ = −11.5 + 16.5 = 5 (depuis le patin avant gauche)	42.304
Talus droit (triangulaire)	q_0 = 122.5	14	x′ = 16.5 + 11.5 = 28	0.620
Total				**45.119**

La somme des trois bandes est de **45.12 kPa** ; elle est identique aux 45.12 kPa obtenus par la décomposition en I_2. L'essentiel de la contrainte sous le point est repris par le **talus gauche** (42.30 kPa) ; la bande de crête n'apporte que 2.19 kPa.



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

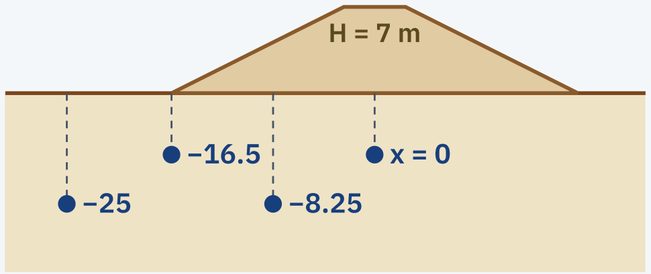
EXEMPLE

Données

Remblai	**Remblai de l'exemple 1 ($q_0 = 122.5$ kPa)**
Positions	**$x = 0$ (axe de la crête) ; -8.25 (mi-talus) ; -16.5 (pied gauche) ; -25 m (à 8.5 m à l'extérieur du pied)**
Profondeurs	$z = 2$; 5; 10; 15; 20; 30 m

À DÉTERMINER

En chaque position **$\Delta\sigma_z$** et $\Delta\sigma_z/q_0$; interprétation de la variation avec la profondeur.



Solution (1/2)

SOLUTION

z (m)	x = 0 m	x = -8.25 m	x = -16.50 m	x = -25 m	x = 0: $\Delta\sigma_z/q_0$
2	120.81	72.03	5.52	0.08	0.986
5	110.87	70.42	13.17	1.03	0.905
10	90.88	64.71	22.78	5.08	0.742
15	74.26	57.80	28.12	10.02	0.606
20	61.67	51.17	30.28	14.12	0.503
30	45.06	40.38	29.66	18.60	0.368

Sous l'axe de la crête, la contrainte part d'une valeur voisine de q_0 et diminue avec la profondeur (120.8 → 45.1 kPa). **À mi-pente** : 72.0 → 40.4 kPa ; **au pied gauche**, elle est faible près de la surface (5.5 kPa) et augmente en profondeur (29.7 kPa) ; à 8.5 m à l'extérieur du pied, elle passe de 0.08 kPa à 18.6 kPa.

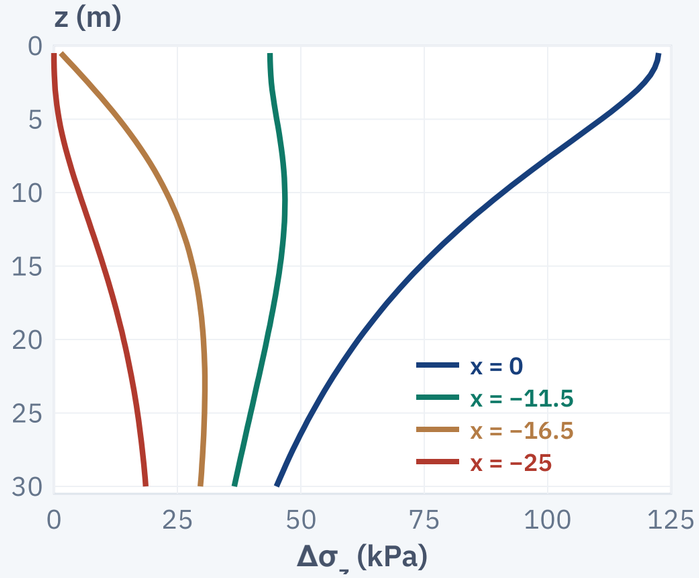
Solution (2/2)

SOLUTION

1 Contrainte maximale au talon et à l'extérieur de celui-ci (profondeur balayée jusqu'à 120 m)

Localisation	$\Delta\sigma_z$ maximal (kPa)	profondeur z (m)
x = −16.5 (patin avant)	30.57	23.2
x = −25 (à l'extérieur)	19.62	39.9

Sous l'axe de la crête, la contrainte diminue de façon monotone avec la profondeur ; **au pied** et **à l'extérieur**, elle commence par augmenter, puis diminue : la charge du remblai s'étale latéralement en profondeur. Au pied, la valeur maximale est de 30.6 kPa à z ≈ 23.2 m ; à 8.5 m à l'extérieur, elle se situe plus profondément (z ≈ 39.9 m) et est plus faible (19.6 kPa).



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

EXEMPLE

Données

Tableau	$B_1/z = 0$ **…** 2 **et** $B_2/z = 0.1$ **…** 10 **pour** I_2
Manuel	$B_1 = B_2 = z$**:** $I_2(1;\ 1)$

À DÉTERMINER

Tableau I_2 ; valeur limite ; calcul détaillé pour $B_1 = B_2 = z$.

Solution (1/2)

SOLUTION

$B_2/z \setminus B_1/z$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	1.0	2.0
0.1	0.0317	0.0939	0.1527	0.2534	0.3287	0.4166	0.4809
0.5	0.1476	0.2001	0.2470	0.3230	0.3769	0.4385	0.4847
1.0	0.2500	0.2885	0.3221	0.3751	0.4123	0.4548	0.4879
2.0	0.3524	0.3749	0.3943	0.4250	0.4465	0.4714	0.4916
5.0	0.4372	0.4465	0.4546	0.4674	0.4764	0.4869	0.4958
10.0	0.4683	0.4730	0.4770	0.4834	0.4879	0.4933	0.4978

Chaque valeur est inférieure à **0.5** ; lorsque B_1/z et B_2/z augmentent, I_2 tend vers 0.5 (pour $B_1 \to \infty$, $I_2 = 0.5$). Sous la crête, les deux moitiés s'additionnant, $\Delta\sigma_z$ vaut au plus q_0.

Solution (2/2)

SOLUTION

1 Angles ($z = 1$; $B_1 = B_2 = 1$)

$$\alpha_2 = \tan^{-1} 1 = 0.7854$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1 = 1.1071 - 0.7854 = 0.3218$$

2 Valeur d'influence

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{1}(1.1071) - \frac{1}{1}(0.7854)\right] = \frac{1.4289}{\pi} = \mathbf{0.45483}$$

$I_2(1; 1) = 0.45483$: cette valeur est identique à celle du tableau pour $B_1/z = 1$, $B_2/z = 1$. Pour le point situé sous cette moitié, $\Delta\sigma_z = 0.455\ q_0$.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

EXEMPLE

Données

Commun	$\gamma = 17.5$ **kN/m³**, $H = 7$ **m** ($q_0 = 122.5$ **kPa**) ; **crête sous l'axe** $z = 2$; 5 ; 10 ; 20 **m**
Formes	**(1)** $B_c = 5$, $L = 14$; **(2)** $B_c = 0$, $L = 16.5$ **(même base à** 33 **m)** ; **(3)** $B_c = 5$, $L = 7$; **(4)** $B_c = 20$, $L = 14$

À DÉTERMINER

$\Delta\sigma_z$ sous l'axe de la crête ; effet de la forme ; vérification à la main du remblai triangulaire.

Solution (1/2)

SOLUTION

Format	Base (m)	z = 2 m	z = 5 m	z = 10 m	z = 20 m	z = 5: $\Delta\sigma_z/q_0$
Trapézoïdale (initiale)	33	120.81	110.87	90.88	61.67	0.905
Triangle (même base 33 m)	33	113.09	99.55	80.01	53.79	0.813
Talus vertical (L = 7 m)	19	119.33	102.06	73.59	43.47	0.833
Crête large (20 m)	48	122.38	120.87	113.47	91.29	0.987

À hauteur égale, un remblai à **large crête** transmet la charge plus profondément (z = 20 m : 91.3 kPa), tandis que les remblais **triangulaires** et **à talus raides** la transmettent moins (53.8 et 43.5 kPa). À z = 5 m, le classement est : triangulaire 99.6 < talus raide 102.1 < trapézoïdal 110.9 < large crête 120.9 kPa.

Solution (2/2)

SOLUTION

1 Chaque moitié : B_1 = 0 ; B_2 = 16.5 m (z = 5 m)

$$\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}\frac{16.5}{5} = 1.2766$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\,\frac{16.5}{16.5}\,\alpha_1 = 0.40634$$

2 Contrainte

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(2\,I_2) = 122.5\,(2 \times 0.40634) = \mathbf{99.55}\ \mathrm{kPa}$$

À 5 m sous la crête du remblai triangulaire : **99.55 kPa**, soit 11.32 kPa de moins que pour le remblai trapézoïdal de même base (110.87 kPa) ; la section triangulaire comporte un volume de remblai moindre que le trapèze de même base.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

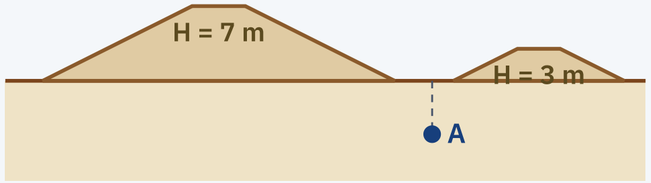
EXEMPLE

Données

Remblai 1	$\gamma = 17.5$, $H = 7$ m, $B_c = 5$, $L_1 = L_2 = 14$ m ; axe de la crête $x = 0$
Remblai 2	$\gamma = 17.5$, $H = 3$ m, $B_c = 4$, $L_1 = L_2 = 6$ m ; axe de la crête $x = 30$ m
Point A	$x = 20$ m (entre les deux remblais), $z = 5$ m ; également $2 - 30$ m

À DÉTERMINER

Les trois bandes de chaque remblai, $\Delta\sigma_z$ de chaque remblai et total ; profil en fonction de la profondeur.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Vérification du chevauchement (pieds : remblai 1 → 16.5 m ; remblai 2 → 22 m) et trois bandes de chaque remblai

Remblai	q_0 (kPa)	$dx = x - x_c$	Bande de crête	Talus gauche	Talus droit	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1 (H = 7 m)	122.5	20	0.282	0.133	3.654	**4.069**
2 (H = 3 m)	52.5	−10	1.160	3.992	0.276	**5.427**

2 Superposition

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 4.069 + 5.427 = \mathbf{9.497}\ \mathrm{kPa}$$

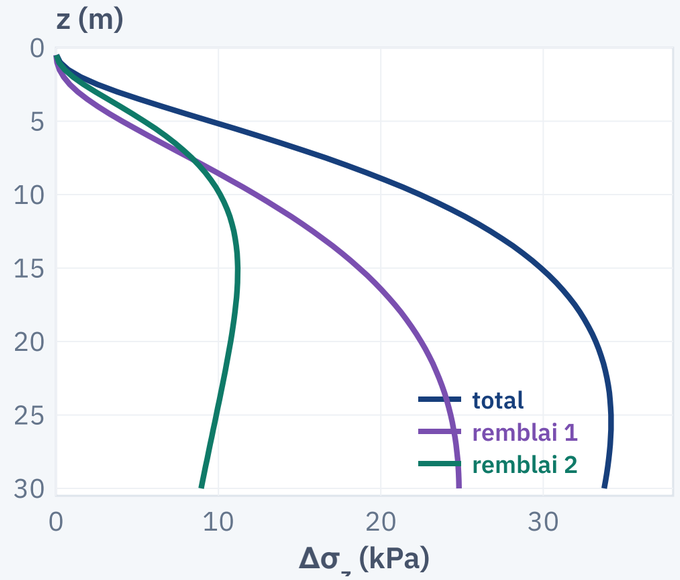
Le point A se trouve à 3.5 m du pied droit du remblai 1 et à 2 m du pied gauche du remblai 2. Le **remblai 2**, bas mais proche, apporte l'essentiel du total (5.43 kPa) ; le total est **$\Delta\sigma_z$ = 9.50 kPa**.

Solution (2/2)

SOLUTION

z (m)	Remblai 1	Remblai 2	Total
2	0.48	1.06	**1.53**
5	4.07	5.43	**9.50**
10	12.30	10.11	**22.41**
15	18.67	11.19	**29.86**
20	22.48	10.75	**33.23**
30	24.82	8.94	**33.76**

La contrainte totale atteint sa valeur maximale (34.18 kPa) à z ≈ 25.5 m ; en profondeur, la part du remblai haut 1 augmente (z = 30 m : 24.82 et 8.94 kPa).



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Synthèse

Points à retenir

Charge : $q_0 = \gamma H = 122.5$ kPa ; **Osterberg :** $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2(B_1/z, B_2/z)$, chaque moitié au plus 0.5 ; sous la crête, les deux moitiés s'additionnent

A_1 (sous la crête, z = 5 m) : $I_2 = 0.4525$; $\Delta\sigma_z = 122.5\ (2 \times 0.4525) =$ **110.87 kPa** ; trois bandes : 67.35 + 21.76 + 21.76

A_2 (sous le talus) : 10.94 + 60.84 − 26.66 = **45.12 kPa** ; à côté du remblai, la petite moitié est soustraite de la grande moitié ; les trois bandes donnent le même résultat

Position : au pied du remblai et à l'extérieur, la contrainte augmente d'abord puis diminue ; sous la crête, elle diminue dans un seul sens. **Forme :** une crête large transmet davantage de charge en profondeur ; un remblai triangulaire donne 99.6 kPa à la même base (trapézoïdal 110.9)

Deux remblais : les contraintes sont calculées par rapport aux axes de crête puis additionnées : 4.07 + 5.43 = 9.50 kPa

Références bibliographiques

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Osterberg, J.O. (1957). Influence values for vertical stresses in a semi-infinite mass due to an embankment loading. Proc. 4th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, Vol. 1, 393–394.

REMARQUE

Tous les exemples numériques ont été produits avec le moteur de calcul propre au module ; le module donne les mêmes valeurs. Le module s'ouvre avec un remblai H = 7 m, γ = 17.5 kN/m³ et le point A_1 (x = 0 ; z = 5 m).

GeoTerva

Calculs géotechniques en ligne

De la théorie à la pratique

Saisir dans GeoTerva les remblais (γ, H, crête, talus, position), le point A et la profondeur ; le module fournit ensemble les trois bandes, la vérification d'Osterberg, la valeur de $\Delta\sigma_z$, les courbes d'isocontraintes, le profil en profondeur, la solution pas à pas et le rapport.

Ouvrir le module → **Page de théorie →**

Ouvrir sur smartphone
Les modules d'essai ne nécessitent pas d'inscription.

Si vous souhaitez les utiliser dans vos cours : info@geoterva.com