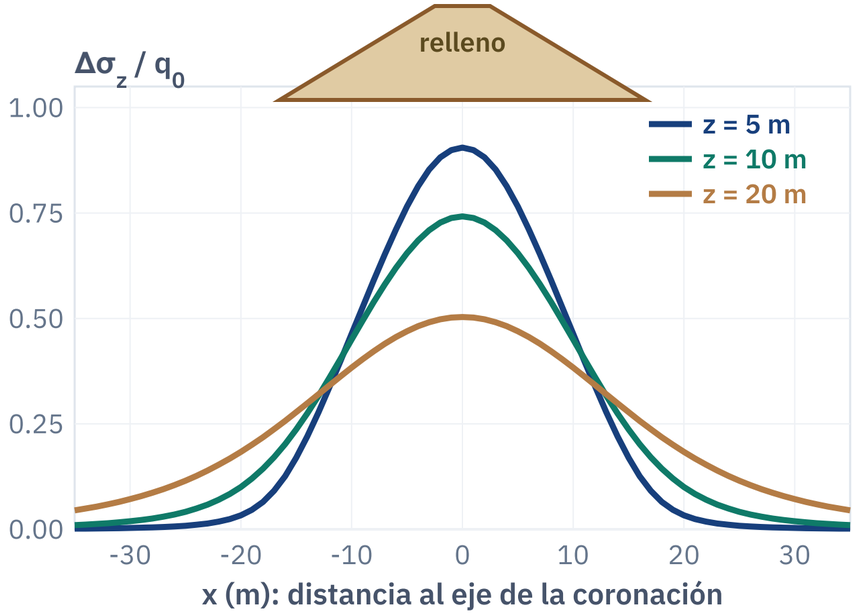
Presentación de clase de geotecnia · Tensiones en la masa de suelo

Tensión bajo el terraplén

Clase: tensión vertical bajo un terraplén (carga trapezoidal); solución de Osterberg, superposición de franjas y ejemplos resueltos a mano.

$q_0 = \gamma H$ · Osterberg I_2 · Tres franjas · Bajo el talud y a su lado · Varios terraplenes



Introducción

¿Qué aprenderemos en esta clase?

El incremento de tensión vertical bajo un **terraplén trapezoidal** largo sobre el terreno (terraplén de carretera o de ferrocarril, dique): carga $q_0 = \gamma H$, el problema es bidimensional

La **solución de Osterberg**: para un terraplén de media sección, $\Delta\sigma_z = q_0 I_2$; I_2 depende solo de B_1/z y B_2/z

La **suma** de las dos mitades bajo la coronación; junto al terraplén, la **resta** de la mitad pequeña a la mitad grande

La **suma de tres franjas** que da el mismo resultado: la franja de coronación + dos franjas triangulares; el módulo opera de este modo

Que las tensiones de varios rellenos **se suman**

DESARROLLO DE LA CLASE

Cada tema se desarrolla en **tres pasos**:

1 · **Teoría**: fórmula y su justificación

2 · **Enunciado**: datos y se pide

3 · **Solución**: paso a paso, con números

Terraplén del ejemplo: H = 7 m, γ = 17.5 kN/m³, coronación de 5 m, taludes de 14 m. A_1 está bajo el centro de la coronación y A_2 bajo un punto situado a 5 m del pie izquierdo; ambos a una profundidad z = 5 m.

Terraplén de sección trapezoidal

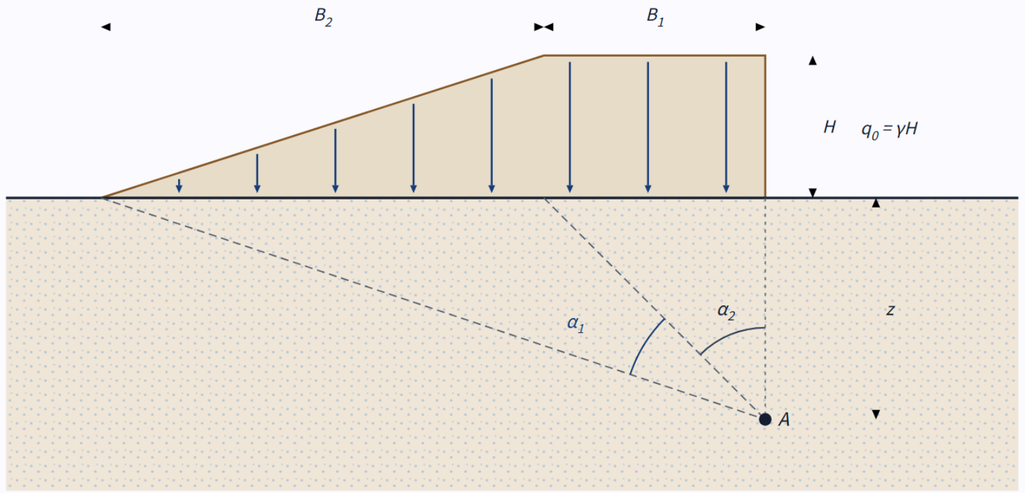
TEORÍA

Terraplén de carretera o de ferrocarril, dique, un acopio largo: la carga de un relleno de **sección trapezoidal** sobre el terreno

El peso por unidad de área bajo la coronación es $\mathbf{q_0 = \gamma H}$ y disminuye linealmente hasta **cero** en los pies del talud

El terraplén es largo: el problema es **bidimensional** (deformación plana), como en las cargas en franja

El terraplén actúa como una carga flexible sobre la superficie del terreno, despreciando su propia rigidez; el terreno es un semiespacio homogéneo, isótropo y elástico lineal; $\Delta\sigma_z$ es únicamente el incremento debido al terraplén



$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$

TEORÍA

Para el **medio terraplén** en el que el punto A está bajo la vertical que pasa por el borde interior del ancho B_1 ($q_0 = \gamma H$; ángulos en radianes):

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[\frac{B_1 + B_2}{B_2}\,(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{B_1}{B_2}\,\alpha_2\right]$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{B_1 + B_2}{z} - \tan^{-1}\frac{B_1}{z} \qquad \alpha_2 = \tan^{-1}\frac{B_1}{z}$$

En resumen, **$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$**: el factor de influencia I_2 depende únicamente de **B_1/z** y **B_2/z** (Osterberg 1957)

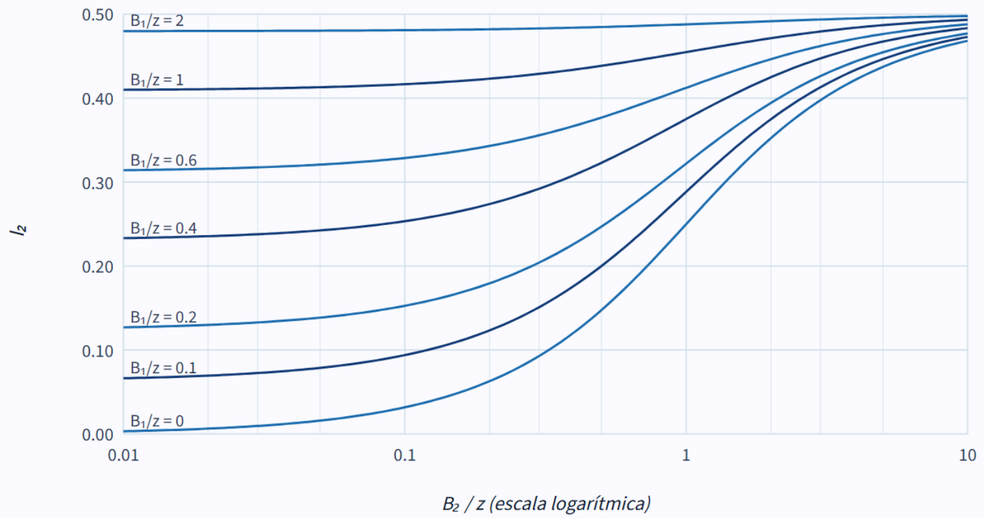
I_2 y las dos mitades

TEORÍA

Un punto situado bajo la coronación divide el terraplén en **dos mitades**, izquierda y derecha; los valores de I_2 se suman: $\Delta\sigma_z = q_0(I_{2,izq} + I_{2,der})$

Para un punto situado **al lado** del terraplén se **resta** una mitad pequeña de una mitad grande

La contribución de cada mitad es como máximo **0.5**



Un punto cualquiera, inclinaciones cualesquiera

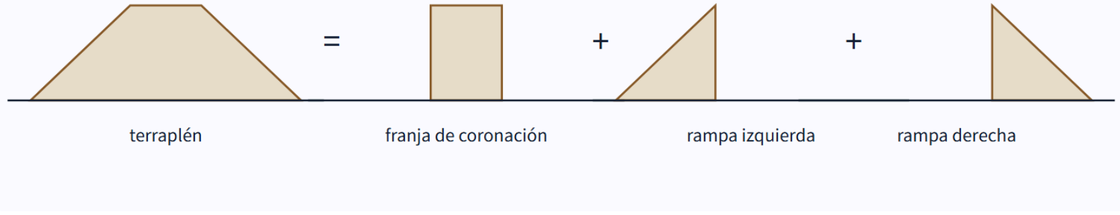
TEORÍA

Trapecio = una **franja uniforme** de ancho B_c y de intensidad q_0 + **dos franjas triangulares** que crecen desde cero en los pies hasta q_0 en los bordes de la coronación

El módulo funciona de este modo: no hay distinción de casos ni ábaco; bajo la coronación se obtiene exactamente $q_0(I_{2,izq} + I_{2,der})$, y esta comprobación también se muestra en los pasos de cálculo

Los anchos de los taludes pueden ser distintos; **B_c = 0** da un terraplén de sección triangular

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(\text{coronación})} + \Delta\sigma_{z(\text{talud izquierdo})} + \Delta\sigma_{z(\text{talud derecho})}$$



Superposición

TEORÍA

Cada terraplén se define por su propio **γ, H, coronación, taludes** y la posición x_c del eje de la coronación (como máximo ocho en el módulo)

El terreno cubierto de pie a pie por los dos terraplenes **no puede compartirse**; los dos pies pueden tocarse

Como el terreno es elástico, la tensión de cada terraplén se calcula **respecto del eje de la coronación** $(x - x_c)$ y las tensiones se suman

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_{0,k}\,[\,\text{coronación} + \text{talud izquierdo} + \text{talud derecho}\,]$$

Enunciado

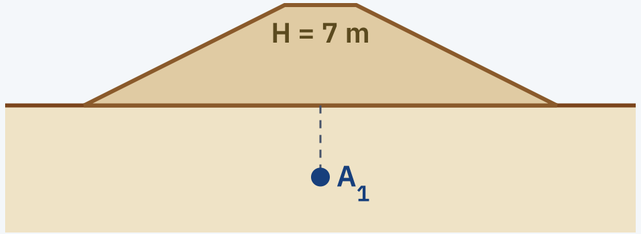
EJEMPLO

Datos

Relleno	$H = 7$ **m,** $\gamma = 17.5$ **kN/m³; coronación** $B_c = 5$ **m, taludes** $L_1 = L_2 = 14$ **m**
Punto A_1	**bajo el eje de la coronación,** $z = 5$ **m**

SE PIDE

$\Delta\sigma_z$: con la solución de Osterberg (dos mitades) y con la suma de las tres franjas.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 Carga, relaciones y ángulos (cada mitad: B_1 = 2.5 m; B_2 = 14 m; z = 5 m)

$$q_0 = \gamma H = 17.5\,(7) = \mathbf{122.5}\ \text{kPa} \qquad B_1/z = 0.5 \qquad B_2/z = 2.8$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}(2.5/5) = 0.4636 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}(16.5/5) - \alpha_2 = 1.2766 - 0.4636 = 0.8129$$

2 Valor de influencia y tensión

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{16.5}{14}(1.2766) - \frac{2.5}{14}(0.4636)\right] = \frac{1.4217}{\pi} = \mathbf{0.4525}$$

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(I_{2,\text{izq}} + I_{2,\text{der}}) = 122.5\,(0.4525 + 0.4525) = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

A 5 m bajo el centro de la coronación, **$\Delta\sigma_z$ = 110.87 kPa**: el 90.5 % de la carga del terraplén (q_0 = 122.5 kPa).

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

1 Franja de la coronación (q_0, B_c = 5 m): $F(u) = \tan^{-1}(u/z) + zu/(u^2 + z^2)$

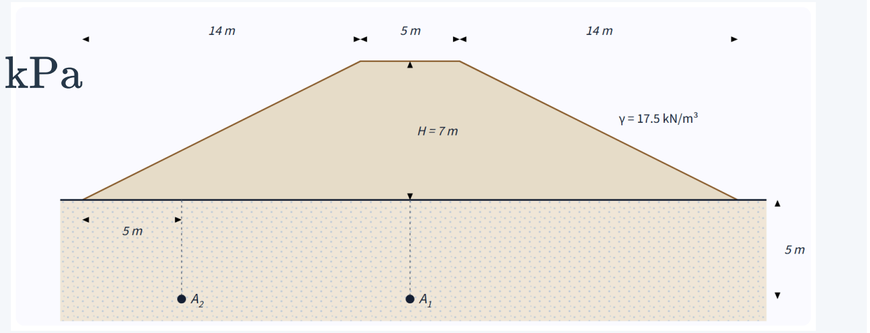
$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\,[F(2.5) - F(-2.5)] = \frac{122.5}{\pi}\,(2 \times 0.8636) = \mathbf{67.35}\ \text{kPa}$$

2 Talud izquierdo (L_1 = 14 m; x' = 16.5 m desde el pie izquierdo): $G(u) = (x'/2)\,[zu/(u^2 + z^2) + \tan^{-1}(u/z)] + z^3/[2(u^2 + z^2)]$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_0}{\pi L_1}\,[G(16.5) - G(2.5)] = \frac{245}{14\pi}\,(13.0316 - 9.1251) = \mathbf{21.76}\ \text{kPa}$$

3 Talud derecho (simétrico) y total

$$\Delta\sigma_z = 67.35 + 21.76 + 21.76 = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$



La suma de las tres franjas coincide con la solución de Osterberg: **110.87 kPa**. El módulo trabaja de esta manera y muestra además, como comprobación, el valor de Osterberg bajo la coronación.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

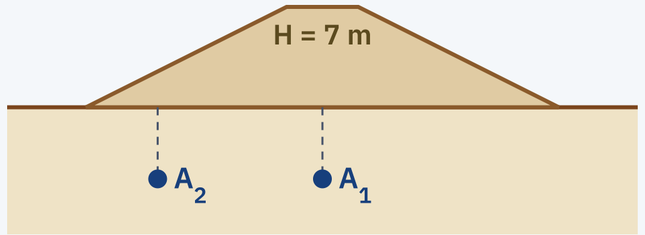
EJEMPLO

SE PIDE

$\Delta\sigma_z$: sumando y restando los valores de I_2 (tres partes) y con tres franjas.

Datos

Relleno	**Terraplén del Ejemplo 1: $q_0 = 122.5$ kPa**
Punto A_2	**a 5 m hacia el interior desde el talón izquierdo ($x = -11.5$ m), $z = 5$ m**



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 División en la vertical que pasa por A_2: x = −11.5 m; altura 5 m × 7/14 = 2.5 m → q = 2.5 × 17.5 = 43.75 kPa

Pieza	q (kPa)	B_1 (m)	B_2 (m)	B_1/z	B_2/z	I_2	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
(+) rampa pequeña a la izquierda	43.75	0	5	0	1.0	0.25000	**10.94**
(+) altura total a la derecha: rectángulo + rampa	122.5	14	14	2.8	2.8	0.49669	**60.84**
(–) triángulo añadido bajo el talud	78.75	0	9	0	1.8	0.33859	**26.66**

2 Valores de I_2 (z = 5 m)

$$I_2(0;\,5) = \frac{1}{\pi}\,\frac{5}{5}\,\tan^{-1}1 = 0.25000 \qquad I_2(14;\,14) = \frac{1}{\pi}\left[2\,(1.3941) - 1.2278\right] = 0.49669$$

$$I_2(0;\,9) = \frac{1}{\pi}\,\tan^{-1}1.8 = 0.33859 \qquad \Delta\sigma_z = 10.94 + 60.84 - 26.66 = \mathbf{45.12}\ \text{kPa}$$

En el punto A_2, **$\Delta\sigma_z$ = 45.12 kPa** ($\Delta\sigma_z/q_0$ = 0.3683): alrededor del 41% del valor bajo el centro de la coronación (110.87 kPa).

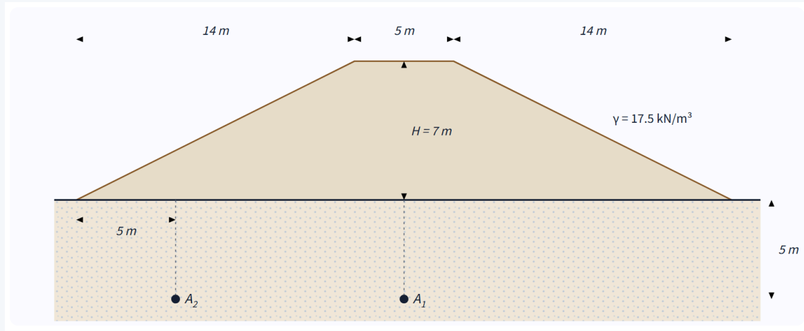
Solución (2/2)

SOLUCIÓN

Franja	Carga	Ancho (m)	Posición respecto al punto	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
Franja de coronación	q_0 = 122.5	5	x = −11.5: u = x ± 2.5 = −9 y −14	2.195
Talud izquierdo (triangular)	q_0 = 122.5	14	x′ = −11.5 + 16.5 = 5 (desde el pie izquierdo)	42.304
Talud derecho (triangular)	q_0 = 122.5	14	x′ = 16.5 + 11.5 = 28	0.620
Total				**45.119**

La suma de las tres franjas es de **45.12 kPa**; coincide con los 45.12 kPa obtenidos por el método por partes con I_2.

La mayor parte de la tensión bajo el punto la aporta el **talud izquierdo** (42.30 kPa); la franja de coronación solo aporta 2.19 kPa.



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

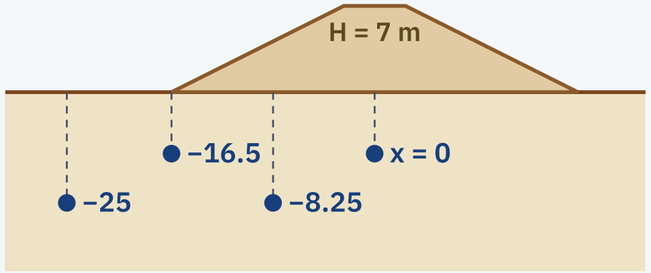
EJEMPLO

Datos

Relleno	**Terraplén del Ejemplo 1 ($q_0 = 122.5$ kPa)**
Posiciones	$x = 0$ **(eje de la coronación);** -8.25 **(mitad del talud);** -16.5 **(pie izquierdo);** -25 **m (a** 8.5 **m fuera del pie)**
Profundidades	$z = 2; 5; 10; 15; 20; 30$ **m**

SE PIDE

En cada posición, $\Delta\sigma_z$ y $\Delta\sigma_z/q_0$; interpretación de la variación con la profundidad.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

z (m)	x = 0 m	x = -8.25 m	x = -16.50 m	x = -25 m	x = 0: $\Delta\sigma_z/q_0$
2	120.81	72.03	5.52	0.08	0.986
5	110.87	70.42	13.17	1.03	0.905
10	90.88	64.71	22.78	5.08	0.742
15	74.26	57.80	28.12	10.02	0.606
20	61.67	51.17	30.28	14.12	0.503
30	45.06	40.38	29.66	18.60	0.368

Bajo el eje de la coronación la tensión comienza próxima a q_0 y disminuye con la profundidad (120.8 → 45.1 kPa). **En el punto medio del talud** 72.0 → 40.4 kPa; **en el pie izquierdo** es pequeña cerca de la superficie (5.5 kPa) y aumenta en profundidad (29.7 kPa); a 8.5 m hacia el exterior del pie pasa de 0.08 kPa a 18.6 kPa.

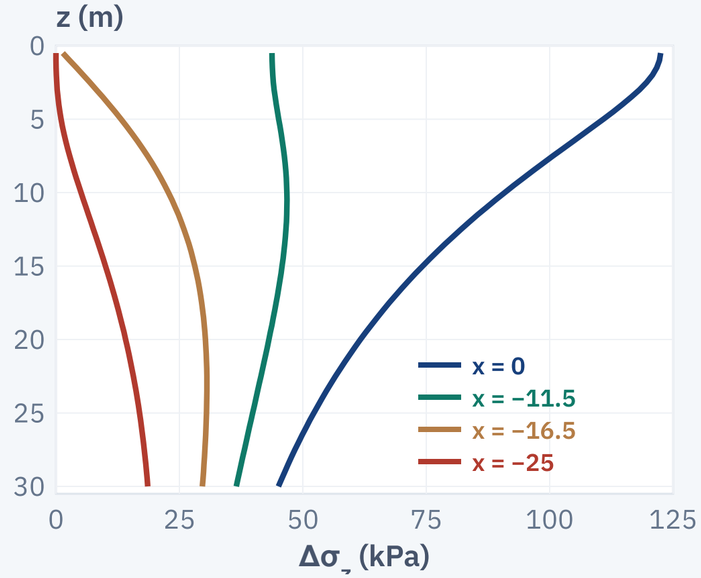
Solución (2/2)

SOLUCIÓN

1 Tensión máxima en el talón y fuera de él (se ha explorado la profundidad hasta 120 m)

Posición	$\Delta\sigma_z$ máximo (kPa)	profundidad z (m)
x = −16.5 (talón)	30.57	23.2
x = −25 (fuera)	19.62	39.9

Bajo el eje de la coronación la tensión disminuye con la profundidad en un solo sentido; en el **pie** y **en el exterior** primero aumenta y luego disminuye: la carga del terraplén se reparte lateralmente en profundidad. En el pie el valor máximo es de 30.6 kPa a z ≈ 23.2 m; a 8.5 m hacia el exterior es más profundo (z ≈ 39.9 m) y menor (19.6 kPa).



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

EJEMPLO

Datos

Tabla	I_2 **para** $B_1/z = 0$ **…** 2 **y** $B_2/z = 0.1$ **…** 10
Manual	$B_1 = B_2 = z$**:** $I_2(1;\ 1)$

SE PIDE

Tabla de I_2; valor límite; cálculo detallado para $B_1 = B_2 = z$.

Solución (1/2)

SOLUCIÓN

$B_2/z \setminus B_1/z$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	1.0	2.0
0.1	0.0317	0.0939	0.1527	0.2534	0.3287	0.4166	0.4809
0.5	0.1476	0.2001	0.2470	0.3230	0.3769	0.4385	0.4847
1.0	0.2500	0.2885	0.3221	0.3751	0.4123	0.4548	0.4879
2.0	0.3524	0.3749	0.3943	0.4250	0.4465	0.4714	0.4916
5.0	0.4372	0.4465	0.4546	0.4674	0.4764	0.4869	0.4958
10.0	0.4683	0.4730	0.4770	0.4834	0.4879	0.4933	0.4978

Todos los valores son menores que **0.5**; a medida que aumentan B_1/z y B_2/z, I_2 se aproxima a 0.5 (para $B_1 \to \infty$, $I_2 = 0.5$). Como bajo la coronación se suman las dos mitades, $\Delta\sigma_z$ es como máximo q_0.

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

1 Ángulos (z = 1; $B_1 = B_2 = 1$)

$$\alpha_2 = \tan^{-1} 1 = 0.7854$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1 = 1.1071 - 0.7854 = 0.3218$$

2 Valor de influencia

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{1}(1.1071) - \frac{1}{1}(0.7854)\right] = \frac{1.4289}{\pi} = \mathbf{0.45483}$$

$I_2(1; 1) = 0.45483$: coincide con el valor de la tabla para $B_1/z = 1$, $B_2/z = 1$. Para el punto situado bajo esta mitad, $\Delta\sigma_z = 0.455\ q_0$.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

EJEMPLO

Datos

Común	$\gamma = 17.5$ **kN/m³,** $H = 7$ **m (**$q_0 = 122.5$ **kPa); coronación por debajo del eje** $z = 2; 5; 10; 20$ **m**
Formas	**(1)** $B_c = 5$, $L = 14$**; (2)** $B_c = 0$, $L = 16.5$ **(misma base de** 33 **m); (3)** $B_c = 5$, $L = 7$**; (4)** $B_c = 20$, $L = 14$

SE PIDE

$\Delta\sigma_z$ bajo el eje de la coronación; efecto de la forma; comprobación a mano del terraplén triangular.

Solución (1/2)

SOLUCIÓN

Formato	Base (m)	z = 2 m	z = 5 m	z = 10 m	z = 20 m	z = 5: $\Delta\sigma_z/q_0$
Trapezoidal (apertura)	33	120.81	110.87	90.88	61.67	0.905
Triángulo (misma base de 33 m)	33	113.09	99.55	80.01	53.79	0.813
Talud vertical (L = 7 m)	19	119.33	102.06	73.59	43.47	0.833
Coronación ancha (20 m)	48	122.38	120.87	113.47	91.29	0.987

A igual altura, una **coronación ancha** transmite la carga a mayor profundidad (z = 20 m: 91.3 kPa), mientras que un terraplén **triangular** y uno de **talud pronunciado** la transmiten menos (53.8 y 43.5 kPa). Para z = 5 m el orden es: triangular 99.6 < talud pronunciado 102.1 < trapezoidal 110.9 < coronación ancha 120.9 kPa.

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

1 Cada mitad: $B_1 = 0$; $B_2 = 16.5$ m ($z = 5$ m)

$$\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}\frac{16.5}{5} = 1.2766$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\,\frac{16.5}{16.5}\,\alpha_1 = 0.40634$$

2 Tensión

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(2\,I_2) = 122.5\,(2 \times 0.40634) = \mathbf{99.55}\ \mathrm{kPa}$$

99.55 kPa a 5 m por debajo de la coronación del relleno triangular: 11.32 kPa menos que el relleno trapezoidal de la misma base (110.87 kPa); la sección triangular contiene menos volumen de relleno que el trapecio de la misma base.

Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Enunciado

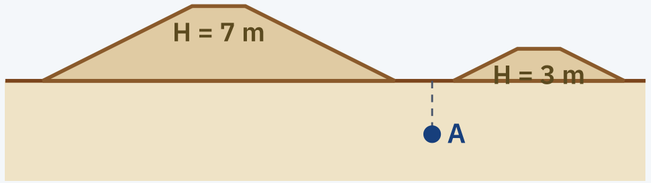
EJEMPLO

Datos

Relleno 1	$\gamma = 17.5$, $H = 7$ **m**, $B_c = 5$, $L_1 = L_2 = 14$ **m; eje de la coronación** $x = 0$
Relleno 2	$\gamma = 17.5$, $H = 3$ **m**, $B_c = 4$, $L_1 = L_2 = 6$ **m; eje de la coronación** $x = 30$ **m**
Punto A	$x = 20$ **m (entre los dos terraplenes),** $z = 5$ **m; además** $2 - 30$ **m**

SE PIDE

Las tres franjas de cada terraplén, $\Delta\sigma_z$ de cada terraplén y total; perfil en profundidad.



Solución (1/2)

SOLUCIÓN

1 Comprobación del solape (pies: terraplén 1 → 16.5 m; terraplén 2 → 22 m) y tres franjas de cada terraplén

Relleno	q_0 (kPa)	$dx = x - x_c$	Franja de coronación	Talud izquierdo	Talud derecho	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1 (H = 7 m)	122.5	20	0.282	0.133	3.654	**4.069**
2 (H = 3 m)	52.5	−10	1.160	3.992	0.276	**5.427**

2 Superposición

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 4.069 + 5.427 = \mathbf{9.497}\ \text{kPa}$$

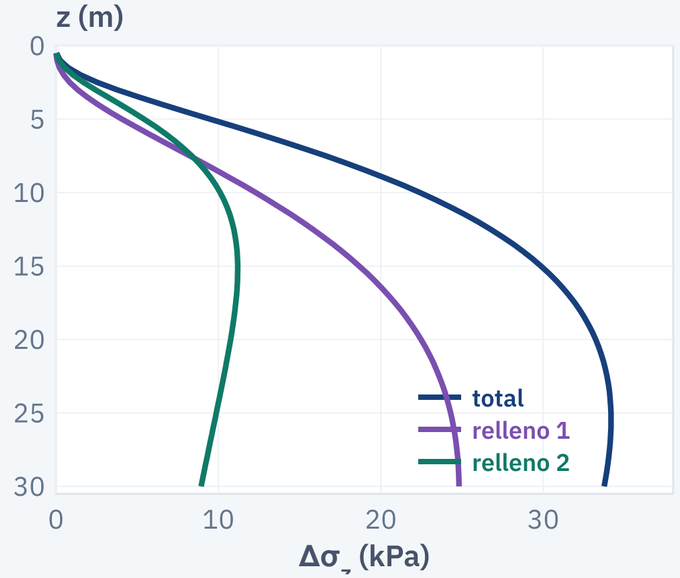
El punto A está a 3.5 m del pie derecho del relleno 1 y a 2 m del pie izquierdo del relleno 2. El **relleno 2**, bajo pero cercano, aporta la mayor parte del total (5.43 kPa); el total es **$\Delta\sigma_z$ = 9.50 kPa**.

Solución (2/2)

SOLUCIÓN

z (m)	Relleno 1	Relleno 2	Total
2	0.48	1.06	**1.53**
5	4.07	5.43	**9.50**
10	12.30	10.11	**22.41**
15	18.67	11.19	**29.86**
20	22.48	10.75	**33.23**
30	24.82	8.94	**33.76**

La tensión total alcanza su valor máximo (34.18 kPa) en z ≈ 25.5 m; con la profundidad aumenta la participación del terraplén alto 1 (z = 30 m: 24.82 y 8.94 kPa).



Comprobar la solución en GeoTerva ↗

Resumen

Puntos clave

Carga: $q_0 = \gamma H = 122.5$ kPa; **Osterberg:** $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2(B_1/z, B_2/z)$, cada mitad como máximo 0.5; bajo la coronación se suman las dos mitades

A_1 (bajo la coronación, z = 5 m): $I_2 = 0.4525$; $\Delta\sigma_z = 122.5\ (2 \times 0.4525) =$ **110.87 kPa**; tres franjas: 67.35 + 21.76 + 21.76

A_2 (bajo el talud): 10.94 + 60.84 − 26.66 = **45.12 kPa**; junto al terraplén se resta la mitad menor de la mitad mayor; las tres franjas dan el mismo resultado

Posición: al pie y en el exterior, la tensión primero aumenta y luego disminuye; bajo la coronación disminuye en un solo sentido. **Forma:** una coronación ancha transmite más carga en profundidad; un relleno triangular da 99.6 kPa en la misma base (trapezoidal 110.9)

Dos terraplenes: las tensiones se calculan respecto a los ejes de coronación y se suman: 4.07 + 5.43 = 9.50 kPa

Referencias bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Osterberg, J.O. (1957). Influence values for vertical stresses in a semi-infinite mass due to an embankment loading. Proc. 4th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, Vol. 1, 393–394.

NOTA

Todos los ejemplos numéricos se han obtenido con el propio motor de cálculo del módulo; el módulo da los mismos valores. El módulo se abre con un terraplén de H = 7 m, $\gamma = 17.5\ kN/m^3$ y el punto A_1 (x = 0; z = 5 m).

GeoTerva

Cálculos geotécnicos en línea

De la teoría a la práctica

Introducir en GeoTerva los terraplenes (γ, H, coronación, taludes, posición), el punto A y la profundidad; el módulo proporciona las tres franjas, la comprobación de Osterberg, el valor de $\Delta\sigma_z$, las curvas de isotensión, el perfil en profundidad, la solución paso a paso y el informe.

Abrir el módulo → | **Página de teoría →**

Abrir en el teléfono
Los módulos de prueba no requieren registro.

Si desea utilizarlas en sus clases: info@geoterva.com