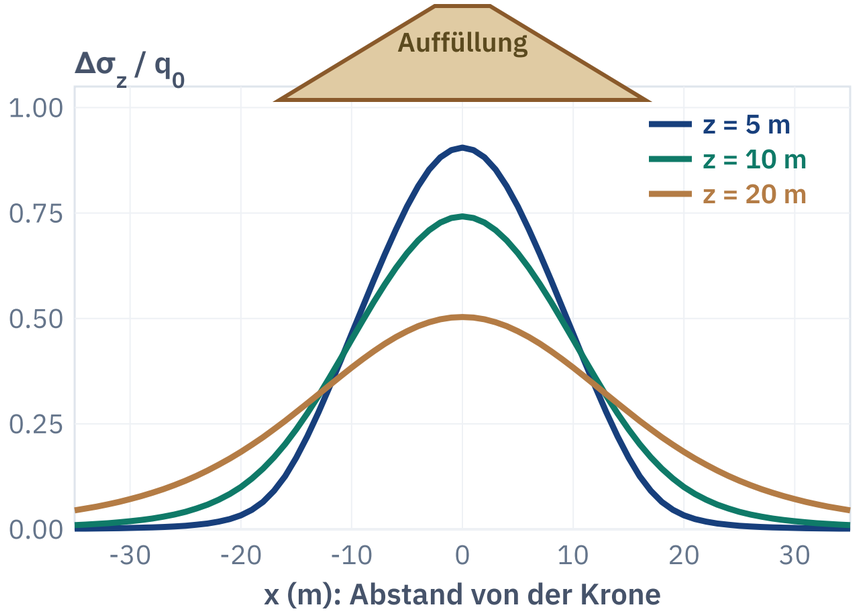
GeoTerva

Geotechnische Vorlesungspräsentation · Spannungen im Baugrund

Spannung unter der Auffüllung

Vorlesung: vertikale Spannung unter einem Damm (Trapezlast); die Lösung nach Osterberg, Superposition von Streifen und von Hand gerechnete Beispiele.

- $q_0 = \gamma H$
- Osterberg I_2
- Drei Streifen
- Unterhalb und seitlich der Böschung
- Mehrfache Auffüllung



Was lernen wir in dieser Vorlesung?

Der Anstieg der vertikalen Spannung unter einem langen **trapezförmigen Damm** (Straßen- oder Bahndamm, Auffüllung) auf dem Baugrund: Last $q_0 = \gamma H$, das Problem ist zweidimensional

Die Lösung nach Osterberg: für eine halbseitige Auffüllung gilt $\Delta\sigma_z = q_0 I_2$; I_2 hängt nur von B_1/z und B_2/z ab

Unter der Krone die **Summierung** der beiden Hälften, neben dem Damm die **Subtraktion** der kleinen Hälfte von der großen Hälfte

Die **Summe dreier Streifen**, die dasselbe Ergebnis liefert: der Kammstreifen + zwei dreieckige Streifen; das Modul arbeitet auf diesem Weg

dass sich die Spannungen mehrerer Auffüllungen **überlagern**

VORLESUNGSABLAUF

Jedes Thema wird in **drei Schritten** behandelt:

1 · **Theorie**: Formel und Begründung

2 · **Aufgabe**: Gegeben und Gesucht

3 · **Lösung**: Schritt für Schritt, mit Zahlen

Beispiel Damm: H = 7 m, γ = 17.5 kN/m³, Krone 5 m, Böschungen 14 m. A_1 liegt unterhalb der Mitte der Krone, A_2 unterhalb eines Punktes 5 m vom linken Böschungsfuß; beide in der Tiefe z = 5 m.

Trapezförmiger Damm (Auffüllung)

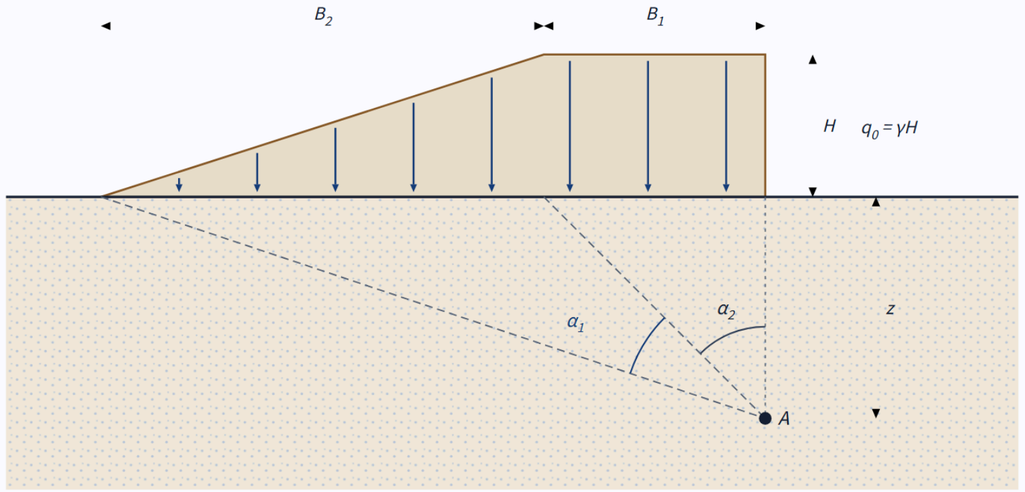
THEORIE

Eine Verkehrsdamm- oder Eisenbahndamm-Auffüllung, ein Wall, eine lange Halde: die Last einer **Auffüllung mit trapezförmigem Querschnitt** auf dem Baugrund

Das Gewicht je Flächeneinheit beträgt unter der Krone $\mathbf{q_0 = \gamma H}$ und nimmt zum Fuß hin linear auf **null** ab

Der Damm ist lang: Das Problem ist **zweidimensional** (ebener Verzerrungszustand), wie bei Streifenlasten

Der Damm wirkt unter Vernachlässigung seiner eigenen Steifigkeit als flexible Last auf der Geländeoberfläche; der Baugrund ist ein homogener, isotroper, linear elastischer Halbraum; $\Delta\sigma_z$ ist nur der Zuwachs aus dem Damm



$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$

THEORIE

Für die **halbe Schüttung**, bei der der Punkt A unter der durch den Innenrand der Breite B_1 verlaufenden Vertikalen liegt ($q_0 = \gamma H$; Winkel im Bogenmaß):

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[\frac{B_1 + B_2}{B_2}\,(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{B_1}{B_2}\,\alpha_2\right]$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{B_1 + B_2}{z} - \tan^{-1}\frac{B_1}{z} \qquad \alpha_2 = \tan^{-1}\frac{B_1}{z}$$

Kurz gefasst **$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$**: Der Einflussbeiwert I_2 hängt nur von **B_1/z** und **B_2/z** ab (Osterberg 1957)

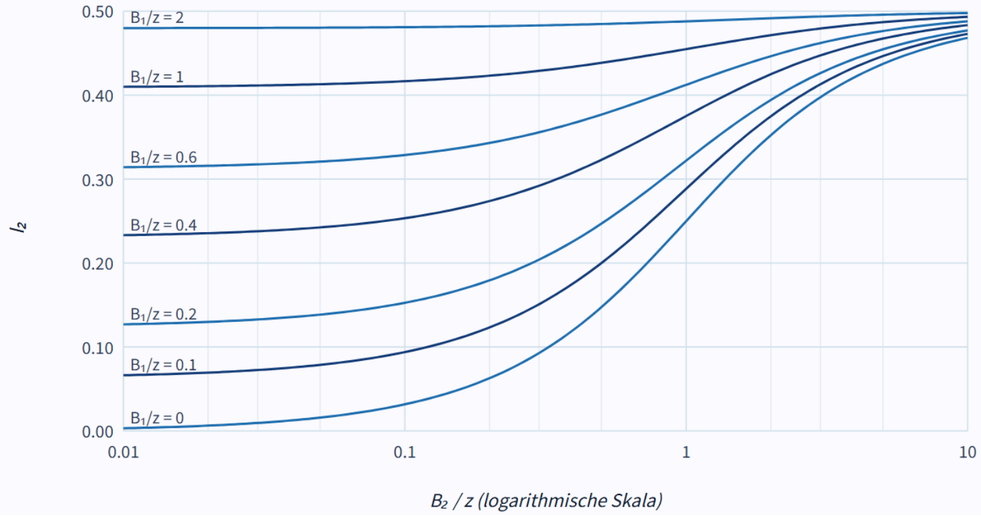
I_2 und die beiden Hälften

THEORIE

Ein Punkt unterhalb der Krone teilt den Damm in **zwei Hälften**, links und rechts; die I_2-Werte werden addiert: $\Delta\sigma_z = q_0(I_{2,links} + I_{2,rechts})$

Für einen Punkt **neben** der Auffüllung wird eine kleine Hälfte von einer großen Hälfte **abgezogen**

Der Beitrag jeder Hälfte beträgt höchstens **0.5**



Beliebiger Punkt, beliebige Neigungen

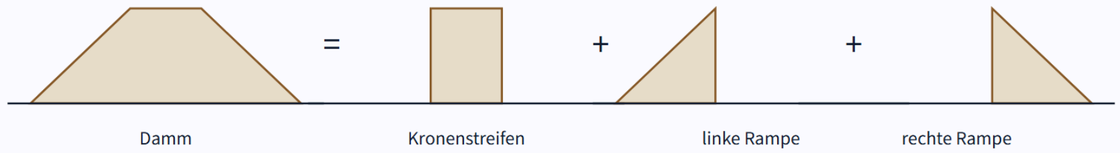
THEORIE

Trapez = eine **Gleichlaststreifenlast** der Breite B_c mit der Intensität q_0 + **zwei Dreieckslaststreifen**, die am hinteren Sporn von null bis q_0 an den Kronenrändern ansteigen

Das Modul arbeitet auf diese Weise: Es gibt keine Fallunterscheidung und kein Nomogramm; $q_0(I_{2,links} + I_{2,rechts})$ unter der Krone wird exakt ermittelt, und dieser Nachweis wird auch in den Berechnungsschritten gezeigt

Die Breiten der Böschungen können unterschiedlich sein; **$B_c = 0$** ergibt einen Damm mit dreieckigem Querschnitt

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(\text{Krone})} + \Delta\sigma_{z(\text{linke Böschung})} + \Delta\sigma_{z(\text{rechte Böschung})}$$



Superposition

THEORIE

Jede Auffüllung wird durch ihre eigenen **γ, H, Krone, Böschungen** und die Lage der Kronenachse x_c definiert (im Modul höchstens acht)

Der von zwei Auffüllungen von Sporn zu Sporn eingenommene Baugrund ist **nicht teilbar**; die beiden Sporne dürfen einander berühren

Da der Boden elastisch ist, wird die Spannung jeder Auffüllung **bezogen auf die Achse der Krone** ($x - x_c$) berechnet und die Spannungen werden summiert

$$\Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)} \qquad \Delta\sigma_{z(k)} = q_{0,k}\,[\,\text{Krone} + \text{linke Böschung} + \text{rechte Böschung}\,]$$

Aufgabe

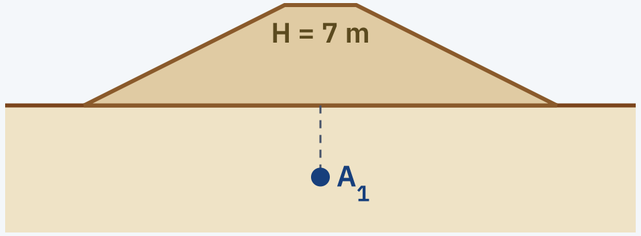
BEISPIEL

Gegeben

Auffüllung	$H = 7$ **m,** $\gamma = 17.5$ **kN/m³; Krone** $B_c = 5$ **m, Böschungen** $L_1 = L_2 = 14$ **m**
Punkt A_1	**unterhalb der Krone,** $z = 5$ **m**

GESUCHT

$\Delta\sigma_z$: nach der Lösung von Osterberg (zwei Hälften) und als Summe der drei Streifen.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Last, Verhältnisse und Winkel (je Hälfte: B_1 = 2.5 m; B_2 = 14 m; z = 5 m)

$$q_0 = \gamma H = 17.5\,(7) = \mathbf{122.5}\ \text{kPa} \qquad B_1/z = 0.5 \qquad B_2/z = 2.8$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}(2.5/5) = 0.4636 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}(16.5/5) - \alpha_2 = 1.2766 - 0.4636 = 0.8129$$

2 Einflusswert und Spannung

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{16.5}{14}(1.2766) - \frac{2.5}{14}(0.4636)\right] = \frac{1.4217}{\pi} = \mathbf{0.4525}$$

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(I_{2,\text{links}} + I_{2,\text{rechts}}) = 122.5\,(0.4525 + 0.4525) = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 110.87 kPa in 5 m Tiefe unter der Mitte der Krone: 90.5 % der Dammauflast (q_0 = 122.5 kPa).

Lösung (2/2)

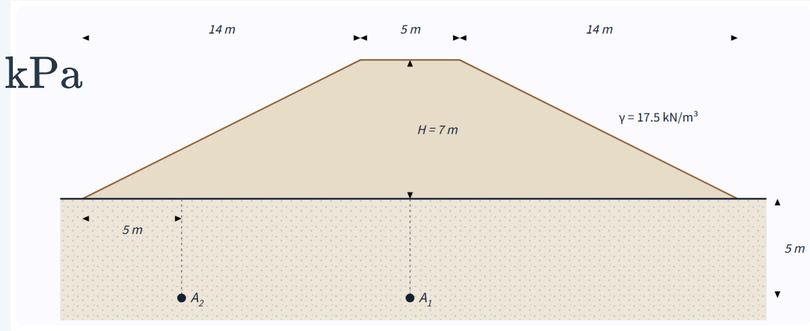
LÖSUNG

1 Kuppenstreifen (q_0, B_c = 5 m): $F(u) = \tan^{-1}(u/z) + zu/(u^2 + z^2)$

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\,[F(2.5) - F(-2.5)] = \frac{122.5}{\pi}\,(2 \times 0.8636) = \mathbf{67.35}\ \mathrm{kPa}$$

2 Linke Böschung (L_1 = 14 m; x′ = 16.5 m vom linken Sporn): $G(u) = (x'/2)\,[zu/(u^2 + z^2) + \tan^{-1}(u/z)] + z^3/[2(u^2 + z^2)]$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_0}{\pi L_1}\,[G(16.5) - G(2.5)] = \frac{245}{14\pi}\,(13.0316 - 9.1251) = \mathbf{21.76}\ \mathrm{kPa}$$



3 Rechte Böschung (symmetrisch) und Gesamtwert

$$\Delta\sigma_z = 67.35 + 21.76 + 21.76 = \mathbf{110.87}\ \mathrm{kPa}$$

Die Summe der drei Streifen ist gleich der Osterberg-Lösung: **110.87 kPa**. Das Modul arbeitet auf diese Weise und zeigt unterhalb der Krone zusätzlich den Osterberg-Wert als Kontrolle an.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

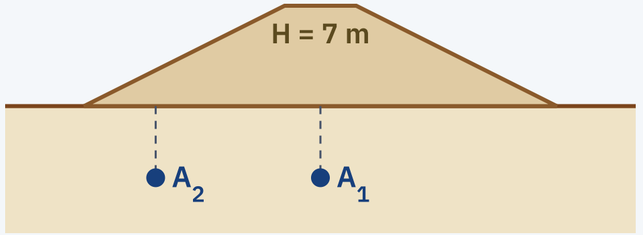
BEISPIEL

Gegeben

Auffüllung	**Damm aus Beispiel 1: $q_0 = 122.5$ kPa**
Punkt A_2	**5 m vom linken vorderen Sporn nach innen ($x = -11.5$ m), $z = 5$ m**

GESUCHT

$\Delta\sigma_z$: durch Addieren und Subtrahieren der I_2-Werte (drei Teile) und mit drei Streifen.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Aufteilung auf der Vertikalen durch A_2: x = −11.5 m; Höhe 5 m × 7/14 = 2.5 m → q = 2.5 × 17.5 = 43.75 kPa

Teil	q (kPa)	B_1 (m)	B_2 (m)	B_1/z	B_2/z	I_2	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
(+) kleine Rampe links	43.75	0	5	0	1.0	0.25000	**10.94**
(+) volle Höhe auf der rechten Seite: Rechteck + Rampe	122.5	14	14	2.8	2.8	0.49669	**60.84**
(–) Dreieck unterhalb der Böschung hinzugefügt	78.75	0	9	0	1.8	0.33859	**26.66**

2 I_2-Werte (z = 5 m)

$$I_2(0;\,5) = \frac{1}{\pi}\,\frac{5}{5}\,\tan^{-1}1 = 0.25000 \qquad I_2(14;\,14) = \frac{1}{\pi}\left[2\,(1.3941) - 1.2278\right] = 0.49669$$

$$I_2(0;\,9) = \frac{1}{\pi}\,\tan^{-1}1.8 = 0.33859 \qquad \Delta\sigma_z = 10.94 + 60.84 - 26.66 = \mathbf{45.12}\ \text{kPa}$$

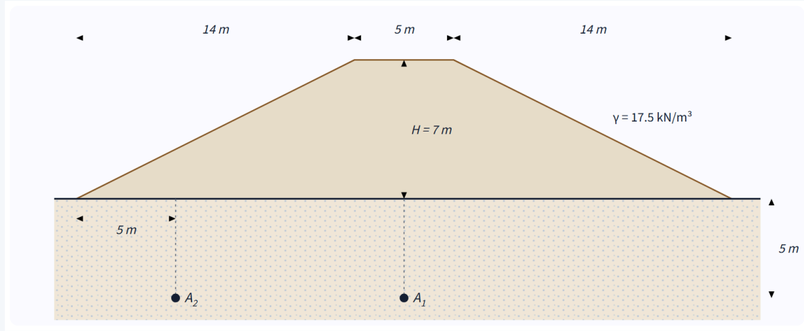
Im Punkt A_2 beträgt **$\Delta\sigma_z$ = 45.12 kPa** ($\Delta\sigma_z/q_0$ = 0.3683): etwa 41 % des Wertes unter der Krone (110.87 kPa).

Lösung (2/2)

LÖSUNG

Streifen	Last	Breite (m)	Lage relativ zum Punkt	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
Kronenstreifen	q_0 = 122.5	5	x = −11.5: u = x ± 2.5 = −9 und −14	2.195
Linke Böschung (dreieckig)	q_0 = 122.5	14	x′ = −11.5 + 16.5 = 5 (vom linken Sporn aus)	42.304
Rechte Böschung (dreieckig)	q_0 = 122.5	14	x′ = 16.5 + 11.5 = 28	0.620
Summe				**45.119**

Die Summe der drei Streifen beträgt **45.12 kPa**; sie stimmt mit den 45.12 kPa überein, die über den Ansatz mit der Teileinflussgröße I_2 ermittelt wurden. Den größten Anteil der Spannung unter dem Punkt liefert die **linke Böschung** (42.30 kPa); der Streifen am Böschungskamm trägt nur 2.19 kPa bei.



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

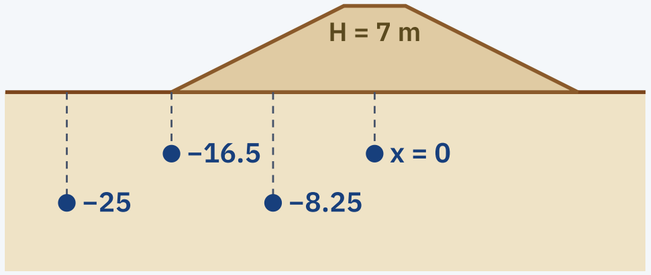
Gegeben

Auffüllung	**Damm in Beispiel 1 ($q_0 = 122.5$ kPa)**
Lagen	**$x = 0$ (Kronenachse); -8.25 (Böschungsmitte); -16.5 (linker Fuß); -25 m (8.5 m außerhalb des Fußes)**
Tiefen	$z = 2; 5; 10; 15; 20; 30$ **m**

GESUCHT

An jeder Stelle **$\Delta\sigma_z$** und $\Delta\sigma_z/q_0$;

Interpretation der Änderung mit der Tiefe.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

z (m)	x = 0 m	x = -8.25 m	x = -16.50 m	x = -25 m	x = 0: $\Delta\sigma_z/q_0$
2	120.81	72.03	5.52	0.08	0.986
5	110.87	70.42	13.17	1.03	0.905
10	90.88	64.71	22.78	5.08	0.742
15	74.26	57.80	28.12	10.02	0.606
20	61.67	51.17	30.28	14.12	0.503
30	45.06	40.38	29.66	18.60	0.368

Unter der Achse der Krone beginnt die Spannung nahe q_0 und nimmt mit der Tiefe ab (120.8 → 45.1 kPa). **In der Böschungsmitte** 72.0 → 40.4 kPa; **am linken Fuß** ist sie oberflächennah klein (5.5 kPa) und nimmt in der Tiefe zu (29.7 kPa); 8.5 m außerhalb des Fußes steigt sie von 0.08 kPa auf 18.6 kPa.

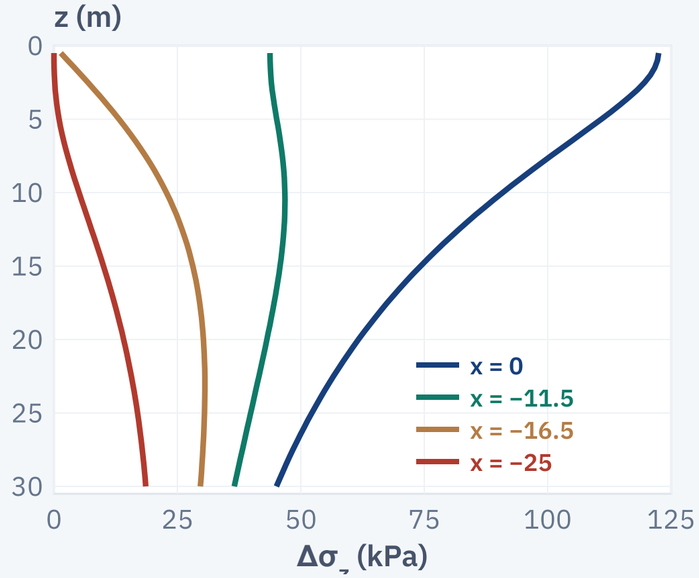
Lösung (2/2)

LÖSUNG

1 Größte Spannung am hinteren Sporn und außerhalb davon (Tiefe bis 120 m abgesucht)

Lage	größtes $\Delta\sigma_z$ (kPa)	Tiefe z (m)
x = −16.5 (vorderer Sporn)	30.57	23.2
x = −25 (außerhalb)	19.62	39.9

Unterhalb der Achse des Kammes nimmt die Spannung mit der Tiefe monoton ab; am **vorderen Sporn** und **außerhalb** steigt sie zunächst an und nimmt dann ab: Die Dammauflast breitet sich mit der Tiefe seitlich aus. Am vorderen Sporn beträgt der Größtwert 30.6 kPa bei z ≈ 23.2 m; 8.5 m außerhalb liegt er tiefer (z ≈ 39.9 m) und ist kleiner (19.6 kPa).



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Tabelle	$B_1/z = 0$ **…** 2 **und** $B_2/z = 0.1$ **…** 10 **für** I_2
Handbuch	$B_1 = B_2 = z$**:** $I_2(1;\ 1)$

GESUCHT

I_2-Tabelle; Grenzwert; ausführliche Berechnung für $B_1 = B_2 = z$.

Lösung (1/2)

LÖSUNG

$B_2/z \setminus B_1/z$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	1.0	2.0
0.1	0.0317	0.0939	0.1527	0.2534	0.3287	0.4166	0.4809
0.5	0.1476	0.2001	0.2470	0.3230	0.3769	0.4385	0.4847
1.0	0.2500	0.2885	0.3221	0.3751	0.4123	0.4548	0.4879
2.0	0.3524	0.3749	0.3943	0.4250	0.4465	0.4714	0.4916
5.0	0.4372	0.4465	0.4546	0.4674	0.4764	0.4869	0.4958
10.0	0.4683	0.4730	0.4770	0.4834	0.4879	0.4933	0.4978

Jeder Wert ist kleiner als **0.5**; mit zunehmendem B_1/z und zunehmendem B_2/z nähert sich I_2 dem Wert 0.5 (für $B_1 \to \infty$ gilt $I_2 = 0.5$). Da sich unter der Krone beide Hälften addieren, ist $\Delta\sigma_z$ höchstens gleich q_0.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

1 Winkel (z = 1; $B_1 = B_2 = 1$)

$$\alpha_2 = \tan^{-1} 1 = 0.7854$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1 = 1.1071 - 0.7854 = 0.3218$$

2 Einflusswert

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{1}(1.1071) - \frac{1}{1}(0.7854)\right] = \frac{1.4289}{\pi} = \mathbf{0.45483}$$

$I_2(1; 1) = 0.45483$: Dieser Wert stimmt mit dem Tabellenwert für $B_1/z = 1$, $B_2/z = 1$ überein. Für den Punkt unter dieser Hälfte ergibt sich $\Delta\sigma_z = 0.455\ q_0$.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Allgemein	$\gamma = 17.5$ **kN/m³,** $H = 7$ **m (**$q_0 = 122.5$ **kPa); Krone unterhalb der Achse** $z = 2; 5; 10; 20$ **m**
Formen	**(1)** $B_c = 5$, $L = 14$**; (2)** $B_c = 0$, $L = 16.5$ **(gleiche Basis** 33 **m); (3)** $B_c = 5$, $L = 7$**; (4)** $B_c = 20$, $L = 14$

GESUCHT

$\Delta\sigma_z$ unterhalb der Kroneachse; Einfluss der Form; Handrechnung für die dreieckförmige Auffüllung.

Lösung (1/2)

LÖSUNG

Format	Sohlbreite (m)	z = 2 m	z = 5 m	z = 10 m	z = 20 m	z = 5: $\Delta\sigma_z/q_0$
Trapezförmig (Öffnung)	33	120.81	110.87	90.88	61.67	0.905
Dreieck (gleiche Basis 33 m)	33	113.09	99.55	80.01	53.79	0.813
Senkrechte Böschung (L = 7 m)	19	119.33	102.06	73.59	43.47	0.833
Breite Krone (20 m)	48	122.38	120.87	113.47	91.29	0.987

Bei gleicher Höhe trägt eine **breite Krone** die Last tiefer (z = 20 m: 91.3 kPa), während **Dreiecks**- und **steil geböschte** Schüttungen weniger übertragen (53.8 und 43.5 kPa). Bei z = 5 m lautet die Reihenfolge: Dreieck 99.6 < steile Böschung 102.1 < Trapez 110.9 < breite Krone 120.9 kPa.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

1 Jede Hälfte: B_1 = 0; B_2 = 16.5 m (z = 5 m)

$$\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}\frac{16.5}{5} = 1.2766$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\,\frac{16.5}{16.5}\,\alpha_1 = 0.40634$$

2 Spannung

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(2\,I_2) = 122.5\,(2 \times 0.40634) = \mathbf{99.55}\ \mathrm{kPa}$$

99.55 kPa 5 m unter dem First der dreieckförmigen Schüttung: 11.32 kPa weniger als bei der trapezförmigen Schüttung mit gleicher Basis (110.87 kPa); der Dreiecksquerschnitt erfordert weniger Schüttvolumen als das Trapez auf gleicher Basis.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

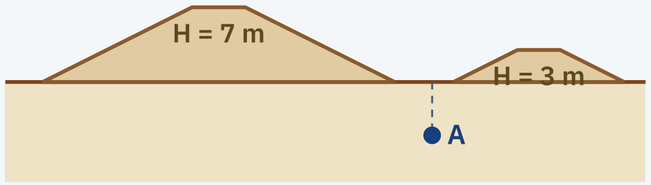
BEISPIEL

Gegeben

Auffüllung 1	$\gamma = 17.5$, $H = 7$ **m**, $B_c = 5$, $L_1 = L_2 = 14$ **m; Kronenachse** $x = 0$
Auffüllung 2	$\gamma = 17.5$, $H = 3$ **m**, $B_c = 4$, $L_1 = L_2 = 6$ **m; Achse der Krone** $x = 30$ **m**
Punkt A	$x = 20$ **m (zwischen den beiden Dämmen),** $z = 5$ **m; außerdem 2 – 30 m**

GESUCHT

Drei Streifen je Damm, $\Delta\sigma_z$ für jeden Damm und für die Summe; Tiefenprofil.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Überprüfung der Überlappung (Sporne: Damm 1 → 16.5 m; Damm 2 → 22 m) und drei Streifen je Damm

Auffüllung	q_0 (kPa)	$dx = x - x_c$	Kronenstreifen	Linke Böschung	Rechte Böschung	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1 (H = 7 m)	122.5	20	0.282	0.133	3.654	**4.069**
2 (H = 3 m)	52.5	−10	1.160	3.992	0.276	**5.427**

2 Superposition

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 4.069 + 5.427 = \mathbf{9.497}\ \mathrm{kPa}$$

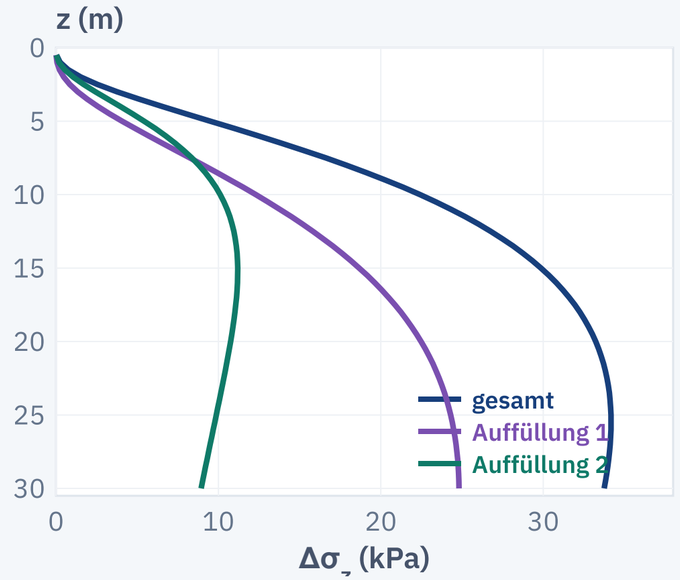
Der Punkt A liegt 3.5 m vom rechten Sporn der Aufschüttung 1 und 2 m vom linken Sporn der Aufschüttung 2 entfernt. Die niedrige, aber nahe **Aufschüttung 2** liefert den größten Teil der Summe (5.43 kPa); die Summe beträgt **$\Delta\sigma_z$ = 9.50 kPa**.

Lösung (2/2)

LÖSUNG

z (m)	Auffüllung 1	Auffüllung 2	Gesamt
2	0.48	1.06	**1.53**
5	4.07	5.43	**9.50**
10	12.30	10.11	**22.41**
15	18.67	11.19	**29.86**
20	22.48	10.75	**33.23**
30	24.82	8.94	**33.76**

Die totale Spannung erreicht bei z ≈ 25.5 m ihren Größtwert (34.18 kPa); mit der Tiefe wächst der Anteil der hohen Auffüllung 1 (z = 30 m: 24.82 und 8.94 kPa).



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Zusammenfassung

Die wichtigsten Punkte

Last: $q_0 = \gamma H = 122.5$ kPa; **Osterberg:** $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2(B_1/z, B_2/z)$, jede Hälfte höchstens 0.5; unterhalb der Krone werden die beiden Hälften summiert

A_1 (unter der Krone, z = 5 m): $I_2 = 0.4525$; $\Delta\sigma_z = 122.5\ (2 \times 0.4525) =$ **110.87 kPa**; drei Streifen: 67.35 + 21.76 + 21.76

A_2 (unterhalb der Böschung): 10.94 + 60.84 − 26.66 = **45.12 kPa**; neben dem Damm wird die kleinere Hälfte von der größeren Hälfte abgezogen; die drei Streifen ergeben dasselbe Ergebnis

Lage: am vorderen Sporn und außerhalb steigt die Spannung zunächst an und fällt dann ab; unterhalb der Krone nimmt sie in einer Richtung ab. **Form:** Eine breite Krone trägt mehr Last in die Tiefe; eine dreieckförmige Hinterfüllung ergibt bei gleicher Basis 99.6 kPa (trapezförmig 110.9)

Zwei Hinterfüllungen: die Spannungen werden bezüglich der Achsen der Geländekante berechnet und summiert: 4.07 + 5.43 = 9.50 kPa

Literatur

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Osterberg, J.O. (1957). Influence values for vertical stresses in a semi-infinite mass due to an embankment loading. Proc. 4th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, Vol. 1, 393–394.

HINWEIS

Alle Rechenbeispiele wurden mit der moduleigenen Berechnungsengine erzeugt; das Modul liefert dieselben Werte. Das Modul öffnet mit einem Damm von H = 7 m, γ = 17.5 kN/m³ und dem Punkt A_1 (x = 0; z = 5 m).

GeoTerva

Geotechnische Berechnungen online

Von der Theorie zur Praxis

Geben Sie Ihre Dammbauwerke (γ, H, Krone, Böschungen, Lage), den Punkt A und die Tiefe in GeoTerva ein; das Modul liefert die drei Streifen, den Nachweis nach Osterberg, den Wert $\Delta\sigma_z$, die Linien gleicher Spannung, das Tiefenprofil, die Schritt-für-Schritt-Lösung und den Bericht zusammen.

Modul öffnen →

Theorieseite →

Auf dem Smartphone öffnen

Die Beispielmodule erfordern keine Registrierung.

Falls Sie sie in Ihren Vorlesungen verwenden möchten: info@geoterva.com