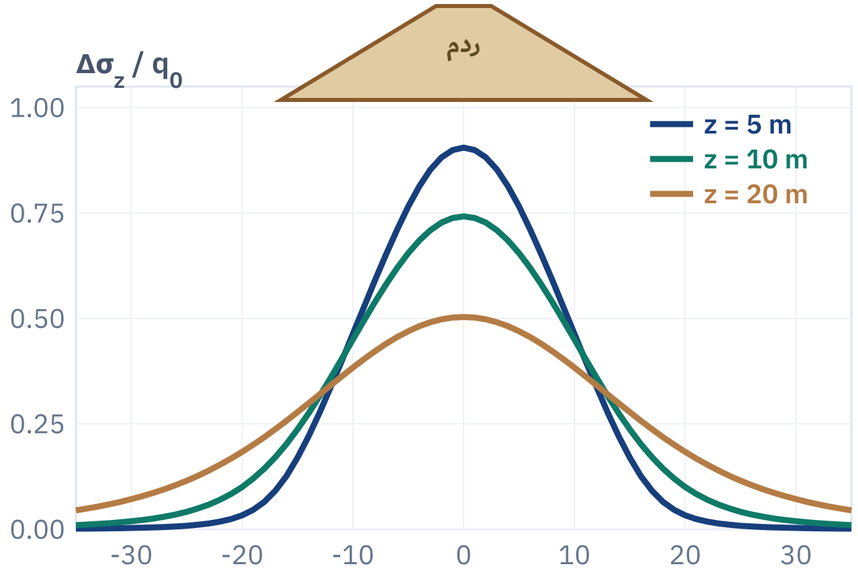


شرائح محاضرات الجيوتكنيك · الإجهادات في التربة

الإجهاد تحت الردم

المحاضرة: الإجهاد الرأسي تحت جسم ردم (حمل شبه منحرف)؛ حل Osterberg، وتراكب الشرائط، وأمثلة محلولة يدوياً.

- $q_0 = \gamma H$
- Osterberg I_2
- ثلاثة أشرطة
- تحت المنحدر وبجانبه
- ردميات متعددة

ماذا سنتعلم في هذه المحاضرة؟

زيادة الإجهاد الرأسي تحت **ردم طويل ذي مقطع شبه منحرف** فوق الأرض (ردم طريق أو سكة حديد، جسر ترابي): الحمل $q_0 = \gamma H$، والمسألة ثنائية الأبعاد

حل Osterberg: في حالة الردم النصفي $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$؛ وتعتمد I_2 على B_1/z و B_2/z فقط

أسفل قمة المنحدر **جمع** النصفين، وبجانب الردم **طرح** النصف الصغير من النصف الكبير

جمع **ثلاثة أشرطة** تعطي النتيجة نفسها: شريط القمة + شريطان مثلثان؛ وتعمل الوحدة بهذه الطريقة

أن إجهادات عدة أعمال ردم **تُجمع** تراكبياً

تسلسل المحاضرة

يعالج كل موضوع في **ثلاث خطوات**:

1 · **النظرية**: المعادلة ومبرراتها

2 · **المسألة**: المعطيات والمطلوب

3 · **الحل**: خطوة بخطوة، بالأرقام

ردم المثال: $\gamma = 17.5\ \text{kN/m}^3$، $H = 7\ \text{m}$، عرض القمة 5 m، والمنحدران 14 m. تقع A_1 تحت مركز القمة، و A_2 تحت نقطة تبعد 5 m عن قدم الردم اليسرى؛ وكلتاهما على عمق $z = 5\ \text{m}$.

النظرية

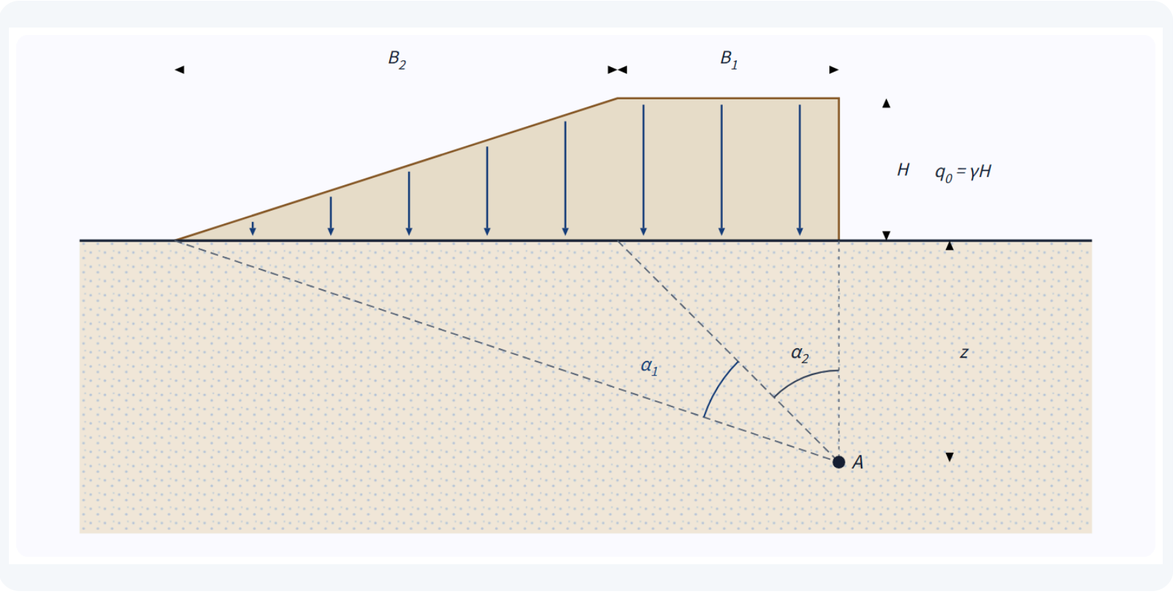
ردم بمقطع شبه منحرف

ردم طريق بري أو سكة حديدية، سد ترابي، كومة طويلة: حمل ردم **ذي مقطع شبه منحرف** فوق الأرض

الوزن لكل وحدة مساحة تحت القمة هو $q_0 = \gamma H$ ويتناقص خطياً إلى **الصفر** عند قدمي المنحدرين

الردم طويل: المسألة **ثنائية الأبعاد** (انفعال مستوٍ)، كما في الأحمال الشريطية

يؤثر الردم، مع إهمال جساءته الذاتية، كحمل مرن على سطح الأرض؛ والتربة وسط شبه لانهائي متجانس ومتماثل الخواص وخطي المرونة؛ و $\Delta\sigma_z$ هي الزيادة الناتجة عن الردم وحدها



النظرية

$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$

من أجل **نصف الردم** الذي تقع فيه النقطة A تحت الخط الرأسي المار بالحافة الداخلية للعرض B_1 ($q_0 = \gamma H$؛ الزوايا بالراديان):

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[\frac{B_1 + B_2}{B_2}\,(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{B_1}{B_2}\,\alpha_2\right]$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\frac{B_1 + B_2}{z} - \tan^{-1}\frac{B_1}{z} \qquad \alpha_2 = \tan^{-1}\frac{B_1}{z}$$

باختصار **$\Delta\sigma_z = q_0\, I_2$**: وتتوقف قيمة التأثير I_2 على **B_1/z** و **B_2/z** فقط (Osterberg 1957)

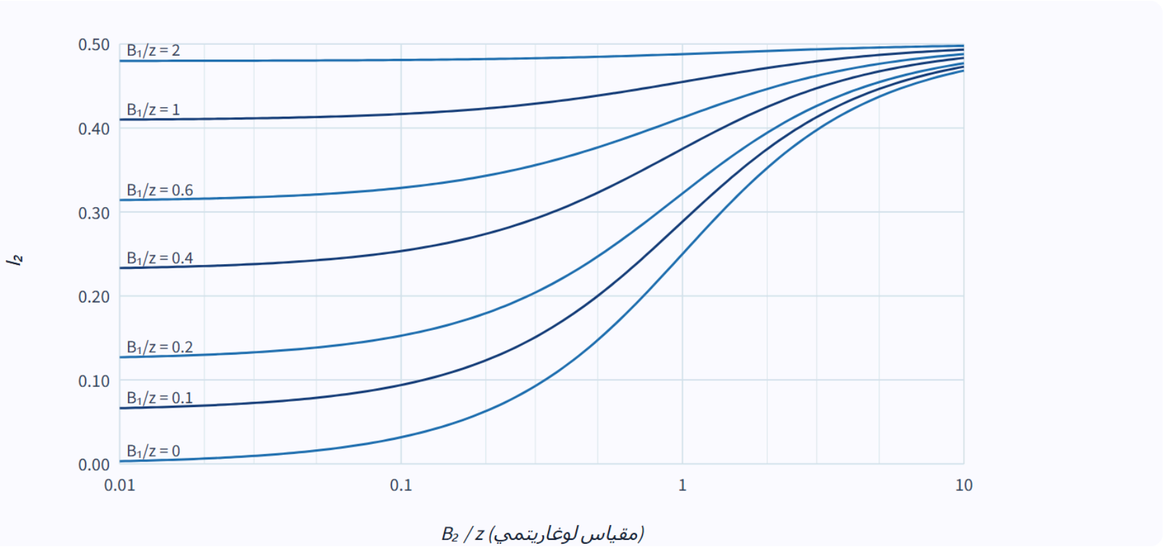
I_2 والنصفان

النظرية

تقسم نقطة تقع تحت قمة الردم جسم الردم إلى **نصفين** أيسر وأيمن؛ وتجمع قيم I_2: $\Delta\sigma_z = q_0(I_{2,left} + I_{2,right})$

بالنسبة إلى نقطة **بجانب** الردم، **يُطرح** نصف صغير من نصف كبير

تكون مساهمة كل نصف على الأكثر **0.5**



أي نقطة، وأي ميل

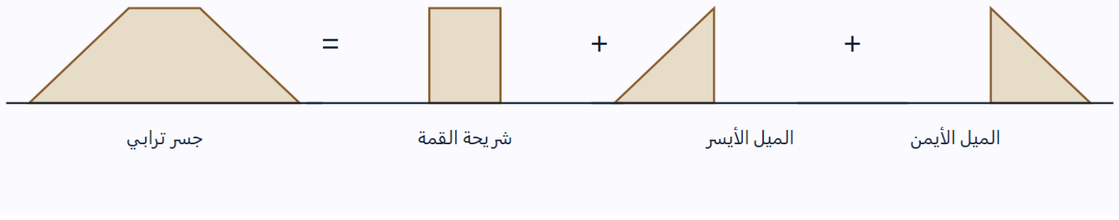
النظرية

شبه المنحرف = **شريط منتظم** عرضه B_c وشدته q_0 + **شريطان مثلثيان** يرتفعان من الصفر عند الكعبين إلى q_0 عند حافتي القمة

تعمل الوحدة بهذه الطريقة: لا تمييز بين الحالات ولا مخطط؛ وتستخرج القيمة $q_0(I_{2,left} + I_{2,right})$ تحت القمة بدقة تامة، ويعرض هذا التحقق أيضاً في خطوات الحساب

قد تختلف عروض المنحدرات؛ **$B_c = 0$** يعطي ردماً بمقطع مثلثي

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(\text{قمة})} + \Delta\sigma_{z(\text{المنحدر الأيسر})} + \Delta\sigma_{z(\text{المنحدر الأيمن})}$$



التراكب

النظرية

يعرف كل جسم ردم بخصائصه الخاصة **H، γ، القمة، المنحدرات الجانبية** وموضع محور القمة x_C (ثمانية أجسام ردم كحد أقصى في الوحدة)

لا يمكن **اقتسام** الأرض التي تغطيها عمليتا ردم من الطرف إلى الطرف؛ ويجوز أن يتلامس الطرفان

لما كانت التربة مرنة فإن إجهاد كل جسم ردم يحسب **بالنسبة إلى محور القمة** $(x - x_C)$، ثم تجمع الإجهادات

$$\Delta\sigma_{z(k)} = q_{0,k}\,[\text{قمة} + \text{المنحدر الأيسر} + \text{المنحدر الأيمن}] \qquad \Delta\sigma_z = \sum_k \Delta\sigma_{z(k)}$$

المسألة

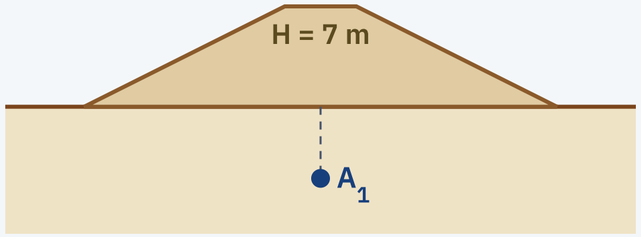
مثال

المعطيات

الردم	$H = 7$ m، $\gamma = 17.5$ kN/m³؛ القمة $B_c = 5$ m، الميول $L_1 = L_2 = 14$ m
النقطة A_1	أسفل محور قمة السد، $z = 5$ m

المطلوب

$\Delta\sigma_z$: بحل Osterberg (نصفين) وبمجموع الشرائط الثلاث.



الحل (1/2)

الحل

1 الحمل والنسب والزوايا (لكل نصف: B_1 = 2.5 m؛ B_2 = 14 m؛ z = 5 m)

$$q_0 = \gamma H = 17.5\,(7) = \mathbf{122.5}\ \text{kPa} \qquad B_1/z = 0.5 \qquad B_2/z = 2.8$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}(2.5/5) = 0.4636 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}(16.5/5) - \alpha_2 = 1.2766 - 0.4636 = 0.8129$$

2 قيمة التأثير والإجهاد

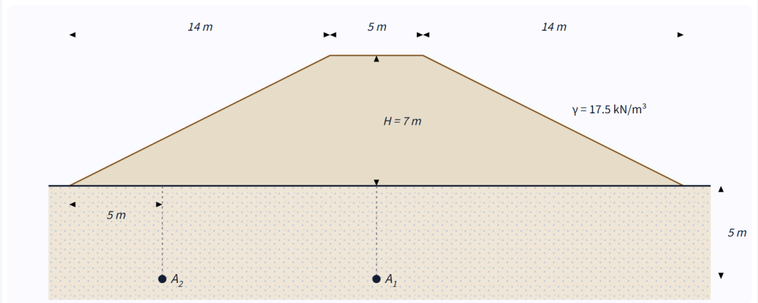
$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{16.5}{14}(1.2766) - \frac{2.5}{14}(0.4636)\right] = \frac{1.4217}{\pi} = \mathbf{0.4525}$$

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(I_{2,\text{يسار}} + I_{2,\text{يمين}}) = 122.5\,(0.4525 + 0.4525) = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z$ = 110.87 kPa على عمق 5 m تحت مركز قمة الجسر الترابي: أي 90.5% من حمل الردم (q_0 = 122.5 kPa).

الحل (2/2)

الحل



1 شريط القمة (q_0، B_c = 5 m): $F(u) = \tan^{-1}(u/z) + zu/(u^2 + z^2)$

$$\Delta\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[F(2.5) - F(-2.5)\right] = \frac{122.5}{\pi}\left(2 \times 0.8636\right) = \mathbf{67.35}\ \text{kPa}$$

2 المنحدر الأيسر (L_1 = 14 m؛ x' = 16.5 m من القدم اليسرى): $G(u) = (x'/2)[zu/(u^2 + z^2) + \tan^{-1}(u/z)] + z^3/[2(u^2 + z^2)]$

$$\Delta\sigma_z = \frac{2q_0}{\pi L_1}\left[G(16.5) - G(2.5)\right] = \frac{245}{14\pi}\left(13.0316 - 9.1251\right) = \mathbf{21.76}\ \text{kPa}$$

3 المنحدر الأيمن (متماثل) والإجمالي

$$\Delta\sigma_z = 67.35 + 21.76 + 21.76 = \mathbf{110.87}\ \text{kPa}$$

مجموع الأشرطة الثلاثة يطابق حل Osterberg: **110.87 kPa**. وتعمل الوحدة بهذه الطريقة وتعرض أيضاً قيمة Osterberg تحت قمة الردم للتحقق.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

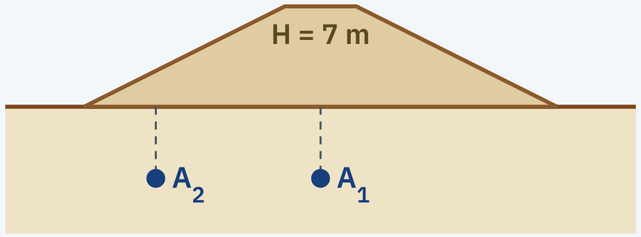
مثال

المعطيات

الردم	**الردم في المثال 1:** $q_0 = 122.5$ **kPa**
النقطة A_2	**5 m إلى الداخل من مقدمة القاعدة اليسرى (** $x = -11.5$ **m،** $z = 5$ **m**

المطلوب

$\Delta\sigma_z$: بجمع قيم I_2 وطرحها (ثلاثة أجزاء) وبثلاثة أشرطة.



الحل (1/2)

الحل

1 التقسيم على العمودي المار بالنقطة A_2: $x = -11.5$ m؛ الارتفاع $5 \text{ m} \times 7/14 = 2.5 \text{ m} \rightarrow q = 2.5 \times 17.5 = 43.75$ kPa

القطعة	q (kPa)	B_1 (m)	B_2 (m)	B_1/z	B_2/z	I_2	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
(+) منحدر صغير على اليسار	43.75	0	5	0	1.0	0.25000	**10.94**
(+) الارتفاع الكامل إلى اليمين: مستطيل + حمل متدرج	122.5	14	14	2.8	2.8	0.49669	**60.84**
مثلث (−) مضاف أسفل المنحدر	78.75	0	9	0	1.8	0.33859	**26.66**

2 قيم I_2 ($z = 5$ m)

$$I_2(0;\,5) = \frac{1}{\pi}\,\frac{5}{5}\,\tan^{-1}1 = 0.25000 \qquad I_2(14;\,14) = \frac{1}{\pi}\left[2\,(1.3941) - 1.2278\right] = 0.49669$$

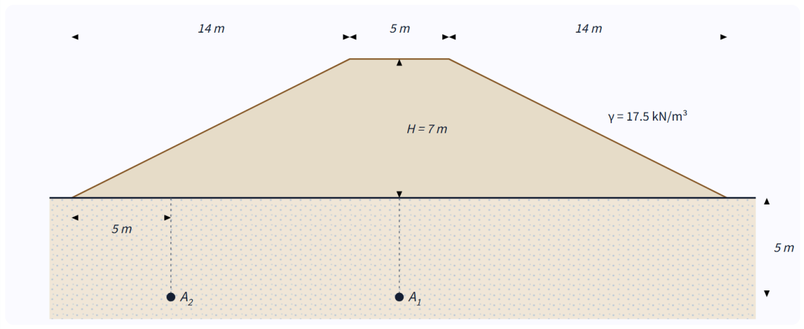
$$I_2(0;\,9) = \frac{1}{\pi}\,\tan^{-1}1.8 = 0.33859 \qquad \Delta\sigma_z = 10.94 + 60.84 - 26.66 = \mathbf{45.12}\ \text{kPa}$$

عند النقطة A_2 تبلغ ($\Delta\sigma_z/q_0 = 0.3683$) **$\Delta\sigma_z$ = 45.12 kPa**: أي نحو 41% من قيمتها تحت مركز القمة (110.87 kPa).

الحل (2/2)

الحل

الشريط	الحمل	العرض (m)	الموضع بالنسبة إلى النقطة	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
شريط القمة	q_0 = 122.5	5	$x = -11.5$: $u = x \pm 2.5 = -9$ و -14	2.195
المنحدر الأيسر (مثلثي)	q_0 = 122.5	14	$x' = -11.5 + 16.5 = 5$ (من مقدمة القاعدة اليسرى)	42.304
المنحدر الأيمن (مثلثي)	q_0 = 122.5	14	$x' = 16.5 + 11.5 = 28$	0.620
الإجمالي				**45.119**



مجموع الأشرطة الثلاثة **45.12 kPa**؛ وهو مطابق للقيمة 45.12 kPa التي تُوجد بطريقة I_2 المجزأة. ويتحمل **المنحدر الأيسر** (42.30 kPa) معظم الإجهاد أسفل النقطة؛ بينما لا يعطي شريط التاج سوى 2.19 kPa.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

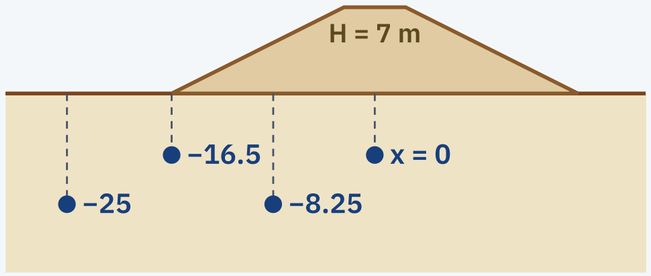
مثال

المعطيات

الردم	الردم في المثال 1 ($q_0 = 122.5$ kPa)
المواضع	$x = 0$ (محور القمة)؛ -8.25 (منتصف المنحدر)؛ -16.5 (المقدمة اليسرى)؛ -25 m (على بعد 8.5 m خارج المقدمة)
الأعماق	$z = 2$; 5; 10; 15; 20; 30 m

المطلوب

في كل موقع $\Delta\sigma_z$ و $\Delta\sigma_z/q_0$؛ وتفسير التغير مع العمق.



الحل (1/2)

الحل

$x = 0$: $\Delta\sigma_z/q_0$	$x = -25$ m	$x = -16.50$ m	$x = -8.25$ m	$x = 0$ m	z (m)
0.986	0.08	5.52	72.03	120.81	2
0.905	1.03	13.17	70.42	110.87	5
0.742	5.08	22.78	64.71	90.88	10
0.606	10.02	28.12	57.80	74.26	15
0.503	14.12	30.28	51.17	61.67	20
0.368	18.60	29.66	40.38	45.06	30

تحت محور القمة يبدأ الإجهاد قريبا من q_0 ويتناقص مع العمق (من 120.8 إلى 45.1 kPa). و**عند منتصف الميل** من 72.0 إلى 40.4 kPa؛ و**عند القدم اليسرى** يكون صغيرا قرب السطح (5.5 kPa) ويزداد في العمق (29.7 kPa)؛ وعلى بعد 8.5 m خارج القدم يرتفع من 0.08 kPa إلى 18.6 kPa.

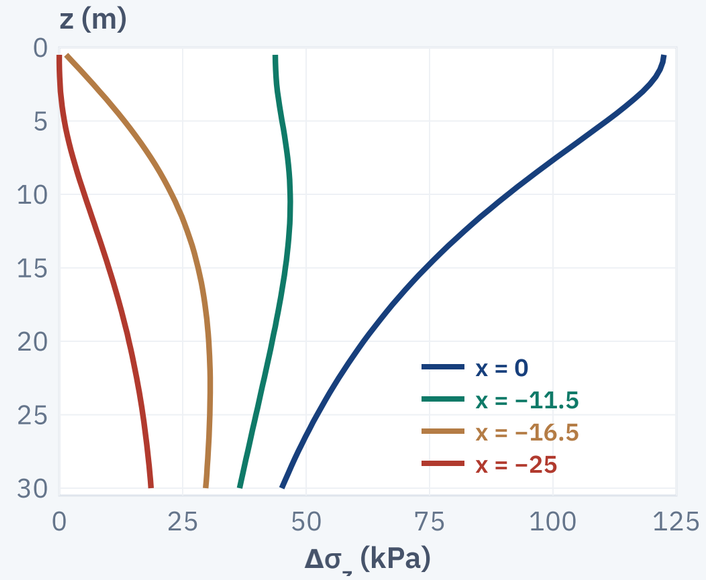
الحل (2/2)

الحل

1 أقصى إجهاد عند كعب القاعدة وخارجه (تم مسح العمق حتى 120 m)

الموضع	أقصى $\Delta\sigma_z$ (kPa)	العمق z (m)
x = −16.5 (الكعب)	30.57	23.2
x = −25 (خارج الحدود)	19.62	39.9

تحت محور القمة يتناقص الإجهاد مع العمق باتجاه واحد؛ أما **عند قدم الميل** و**في الخارج** فيزداد أولا ثم يتناقص: إذ ينتشر حمل الردم جانبيا مع العمق. وتبلغ القيمة العظمى عند قدم الميل 30.6 kPa عند $z \approx 23.2$ m؛ وعلى بعد 8.5 m إلى الخارج تقع على عمق أكبر ($z \approx 39.9$ m) وتكون أصغر (19.6 kPa).



تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

مثال

المعطيات

الجدول $B_1/z = 0$ ... 2 و$B_2/z = 0.1$ ... 10 **من أجل** I_2

يدوياً $B_1 = B_2 = z$: $I_2(1;\ 1)$

المطلوب

جدول I_2؛ القيمة الحدية؛ حساب تفصيلي من أجل $B_1 = B_2 = z$.

الحل (1/2)

الحل

$B_2/z \setminus B_1/z$	0.0	0.1	0.2	0.4	0.6	1.0	2.0
0.1	0.0317	0.0939	0.1527	0.2534	0.3287	0.4166	0.4809
0.5	0.1476	0.2001	0.2470	0.3230	0.3769	0.4385	0.4847
1.0	0.2500	0.2885	0.3221	0.3751	0.4123	0.4548	0.4879
2.0	0.3524	0.3749	0.3943	0.4250	0.4465	0.4714	0.4916
5.0	0.4372	0.4465	0.4546	0.4674	0.4764	0.4869	0.4958
10.0	0.4683	0.4730	0.4770	0.4834	0.4879	0.4933	0.4978

كل قيمة أقل من **0.5**؛ وكلما زادت B_1/z وزادت B_2/z اقتربت I_2 من 0.5 (عندما $B_1 \to \infty$ تكون $I_2 = 0.5$). ولأن النصفين يتجمعان تحت القمة فإن $\Delta\sigma_z$ لا تتجاوز q_0.

الحل (2/2)

الحل

1 الزوايا ($B_1 = B_2 = 1$ ؛$z = 1$)

$$\alpha_2 = \tan^{-1} 1 = 0.7854$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1 = 1.1071 - 0.7854 = 0.3218$$

2 قيمة التأثير

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{1}(1.1071) - \frac{1}{1}(0.7854)\right] = \frac{1.4289}{\pi} = \mathbf{0.45483}$$

$I_2(1; 1) = 0.45483$: تطابق القيمة المدرجة في الجدول عند $B_1/z = 1$ و $B_2/z = 1$. وللنقطة الواقعة تحت هذا النصف يكون $\Delta\sigma_z = 0.455\ q_0$.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

مثال

المعطيات

مشترك: $\gamma = 17.5$ kN/m³، $H = 7$ m، $q_0 = 122.5$ kPa)؛ القمة أسفل المحور $z = 2$؛ 5؛ 10؛ 20 m

الأشكال: (1) $B_c = 5$، $L = 14$؛ (2) $B_c = 0$، $L = 16.5$؛ (3) $B_c = 5$، $L = 7$ (القاع نفسه 33 m)؛ (4) $B_c =$ 20، $L = 14$

المطلوب

$\Delta\sigma_z$ أسفل محور قمة الجدار؛ تأثير الشكل؛ تحقق يدوي من الردم المثلثي.

الحل (1/2)

الحل

الصيغة	القاعدة (m)	z = 2 m	z = 5 m	z = 10 m	z = 20 m	z = 5: $\Delta\sigma_z/q_0$
شبه منحرف (الابتدائي)	33	120.81	110.87	90.88	61.67	0.905
مثلث (القاعدة نفسها 33 m)	33	113.09	99.55	80.01	53.79	0.813
منحدر رأسي (L = 7 m)	19	119.33	102.06	73.59	43.47	0.833
قمة عريضة (20 m)	48	122.38	120.87	113.47	91.29	0.987

عند الارتفاع نفسه ينقل الردم ذو **القمة العريضة** الحمل إلى عمق أكبر (z = 20 m: 91.3 kPa)، بينما ينقله الردم **المثلثي** والردم **شديد الانحدار** بدرجة أقل (53.8 و 43.5 kPa). وعند z = 5 m يكون الترتيب: مثلثي 99.6 > شديد الانحدار 102.1 > شبه منحرف 110.9 > ذو قمة عريضة 120.9 kPa.

الحل (2/2)

الحل

1 كل نصف: $B_1 = 0$؛ $B_2 = 16.5$ m ($z = 5$ m)

$$\alpha_2 = 0 \qquad \alpha_1 = \tan^{-1}\frac{16.5}{5} = 1.2766$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\,\frac{16.5}{16.5}\,\alpha_1 = 0.40634$$

2 الإجهاد

$$\Delta\sigma_z = q_0\,(2\,I_2) = 122.5\,(2 \times 0.40634) = \mathbf{99.55}\ \text{kPa}$$

99.55 kPa على عمق 5 m تحت قمة الردم المثلثي: أقل بمقدار 11.32 kPa من الردم شبه المنحرف ذي القاعدة نفسها (110.87 kPa)؛ فالمقطع المثلثي يحمل حجم ردم أقل من شبه المنحرف على القاعدة نفسها.

تحقق من الحل في GeoTerva ↗

المسألة

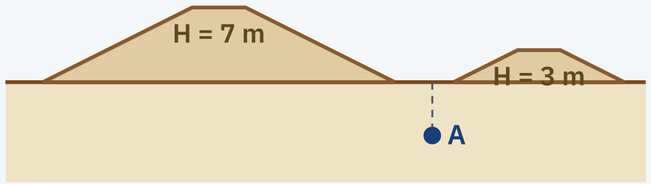
مثال

المعطيات

الردم 1	$L_1 = L_2 = 14$ m، $B_c = 5$، $H = 7$ m، $\gamma = 17.5$ ؛ محور القمة $x = 0$
الردم 2	$L_1 = L_2 = 6$ m، $B_c = 4$، $H = 3$ m، $\gamma = 17.5$؛ محور القمة $x = 30$ m
النقطة A	$x = 20$ m (بين الردمين)، $z = 5$ m؛ وكذلك $x = 30$ m – 2

المطلوب

الأشرطة الثلاثة لكل ردم، و $\Delta\sigma_z$ لكل ردم وللمجموع؛ توزيعه مع العمق.



الحل (1/2)

الحل

1 التحقق من التداخل (أقدام الردم: الردم 1 → 16.5 m؛ الردم 2 → 22 m) والأشرطة الثلاثة لكل ردم

الردم	q_0 (kPa)	$dx = x - x_c$	شريط القمة	المنحدر الأيسر	المنحدر الأيمن	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1 (H = 7 m)	122.5	20	0.282	0.133	3.654	**4.069**
2 (H = 3 m)	52.5	10−	1.160	3.992	0.276	**5.427**

2 التراكب

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 4.069 + 5.427 = \mathbf{9.497}\ \text{kPa}$$

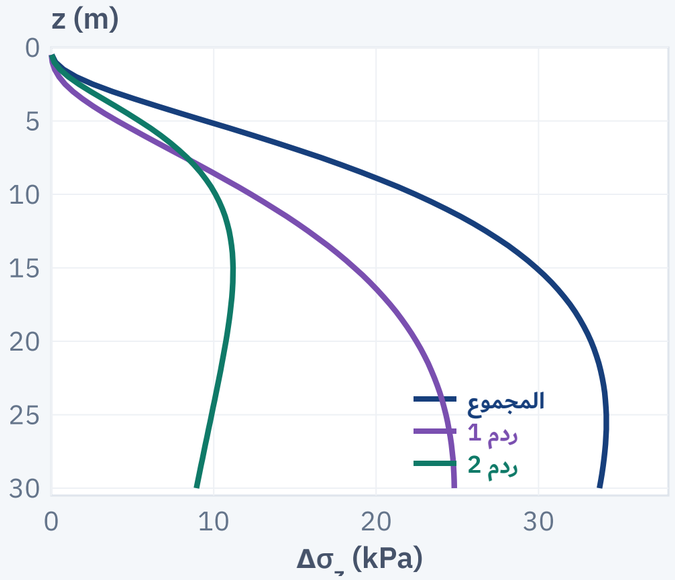
تبعد النقطة A مسافة 3.5 m عن قدم الردم 1 الأيمن و 2 m عن قدم الردم 2 الأيسر. ويسهم **الردم 2** المنخفض لكنه القريب بالجزء الأكبر من المجموع (5.43 kPa)؛ والمجموع **$\Delta\sigma_z$ = 9.50 kPa**.

الحل (2/2)

الحل

z (m)	الردم 1	الردم 2	المجموع
2	0.48	1.06	**1.53**
5	4.07	5.43	**9.50**
10	12.30	10.11	**22.41**
15	18.67	11.19	**29.86**
20	22.48	10.75	**33.23**
30	24.82	8.94	**33.76**

يبلغ الإجهاد الكلي أكبر قيمة له (34.18 kPa) عند z ≈ 25.5 m؛ وتزداد حصة الردم العالي 1 مع العمق (24.82 :z = 30 m و 8.94 kPa).



تحقق من الحل في GeoTerva ↗

النقاط الرئيسية

الحمل: $q_0 = \gamma H = 122.5$ kPa؛ **Osterberg:** $\Delta\sigma_z = q_0\, I_2(B_1/z, B_2/z)$، وكل نصف بحد أقصى 0.5؛ وتحت القمة يجمع النصفان

A_1 (تحت القمة، $z = 5$ m): $I_2 = 0.4525$؛ $\Delta\sigma_z = 122.5 \times (2 \times 0.4525) =$ **110.87 kPa**؛ الأشرطة الثلاثة: 67.35 + 21.76 + 21.76

A_2 (تحت المنحدر): 10.94 + 60.84 − 26.66 = **45.12 kPa**؛ وإلى جانب جسم الردم يطرح النصف الأصغر من النصف الأكبر؛ وتعطي الأشرطة الثلاثة النتيجة نفسها

الموضع: عند قدم الردم وخارجه يزداد الإجهاد أولاً ثم يتناقص؛ وتحت تاج الردم يتناقص في اتجاه واحد. **الشكل:** التاج العريض ينقل حملاً أكبر إلى الأعماق؛ والردم المثلثي يعطي 99.6 kPa عند القاعدة نفسها (شبه المنحرف 110.9)

ردمان: تُحسب الإجهادات بالنسبة إلى محاور القمة وتُجمع: 4.07 + 5.43 = 9.50 kPa

المراجع

.Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning

Osterberg, J.O. (1957). Influence values for vertical stresses in a semi-infinite mass due to an embankment loading. Proc. 4th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation .Engineering, London, Vol. 1, 393–394

ملاحظة

جميع الأمثلة العددية مستخرجة بمحرك الحساب الخاص بالوحدة؛ وتعطي الوحدة القيم نفسها. والمثال الابتدائي للوحدة هو ردم ارتفاعه $H = 7\ m$ ووزنه الحجمي $\gamma = 17.5\ kN/m^3$ مع النقطة A_1 ($x = 0$؛ $z = 5\ m$).

حسابات الجيوتكنيك عبر الإنترنت

من النظرية إلى التطبيق

أدخل في GeoTerva الردميات الخاصة بك (γ و H والقمة والمنحدرات والموضع والنقطة A والعمق؛ وتعطي الوحدة معاً الأشرطة الثلاثة وتحقق Osterberg وقيمة $\Delta\sigma_z$ ومنحنيات تساوي الإجهاد ومخطط العمق والحل خطوة بخطوة والتقرير.

افتح الوحدة ← | **صفحة النظرية ←**

افتح على الهاتف

لا تتطلب الوحدات التجريبية تسجيلاً.

إذا رغبت في استخدامها في محاضراتك: info@geoterva.com