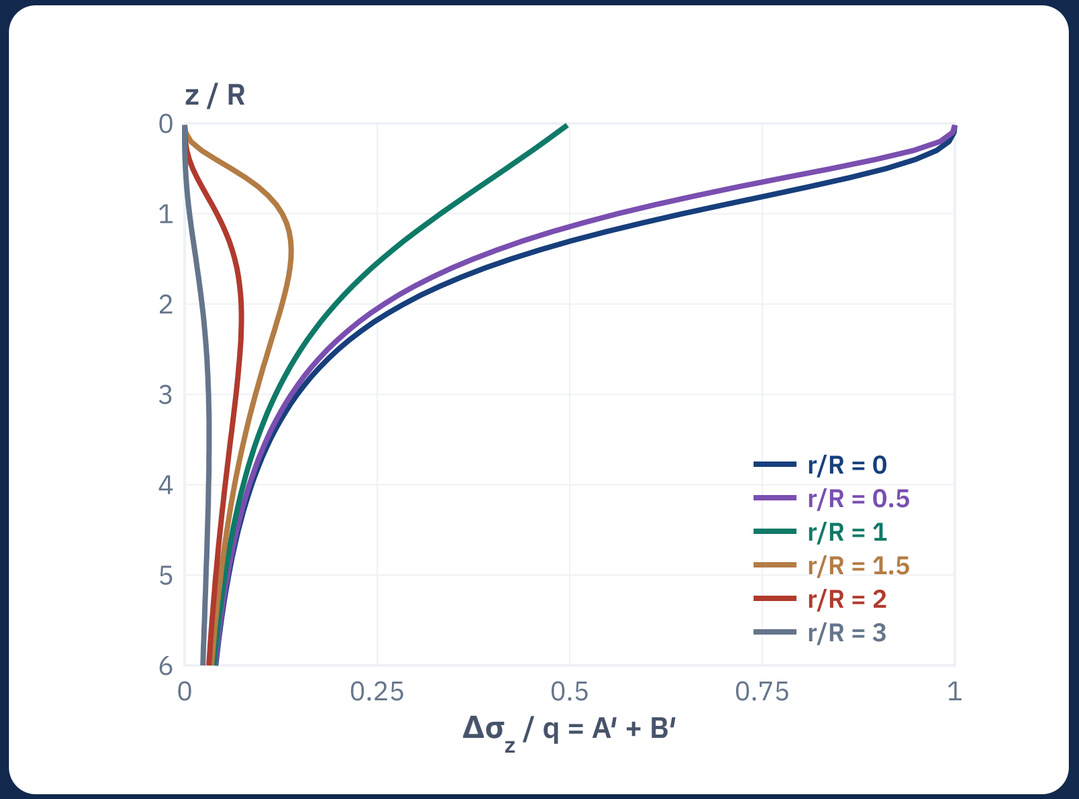
GeoTerva

岩土工程讲义 · 土体中的应力

圆形荷载下的应力

讲义：圆形荷载下的竖向应力；轴线上为闭合表达式，轴线外为A′ + B′；手算算例。

轴线上 | A′ + B′ | 极坐标积分 | 荷载范围外 | 多个圆



引言

本讲内容

均布荷载作用下**圆形面积**（储罐、筒仓、圆形基础）下方的竖向应力增量：$\Delta\sigma_z$

圆形荷载轴线上的闭式表达式：$\Delta\sigma_z = q\{1 - 1/[(R/z)^2 + 1]^{3/2}\}$

轴线以外，圆周边缘下方及其旁侧：$\Delta\sigma_z = q\,(A' + B')$；$A' + B'$仅取决于z/R和r/R

在**以A点为原点的极坐标**中对Boussinesq积分求值：ρ积分为闭合形式，φ积分为数值积分

荷载范围之外，应力**先增大后减小**；多个圆形荷载的应力**叠加**

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：公式及其依据

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

算例圆：R = 3 m，q = 100 kN/m²；A点距圆的轴线r = 4.5 m，深度z = 3 m（位于荷载范围之外）。

均布荷载作用下的圆形面积

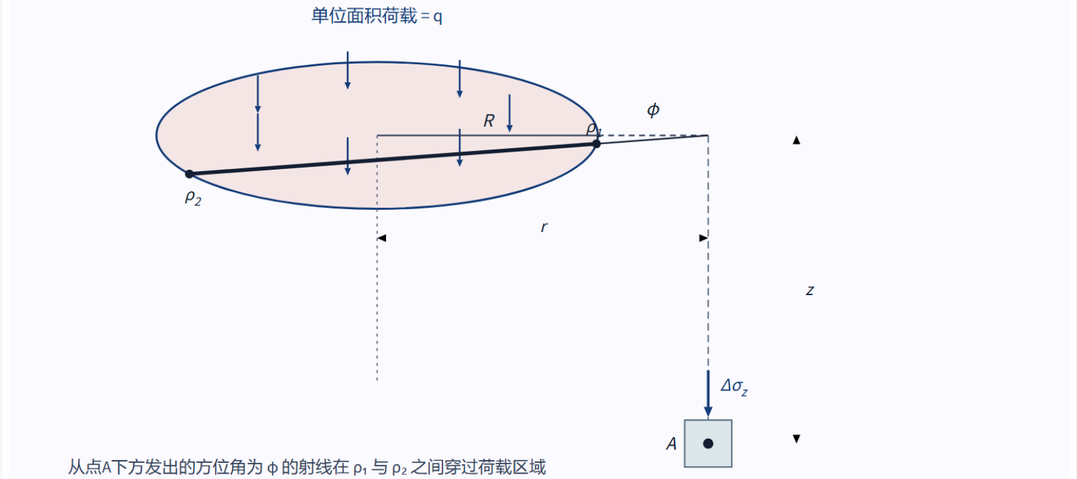
理论

承受均布压力**q**、半径为**R**的**柔性圆形受荷面积**（储罐、筒仓、圆形基础）

土体视为**均质、各向同性的线弹性**半无限介质；$\Delta\sigma_z$仅为荷载引起的应力增量

该问题为**轴对称问题**：应力仅取决于至中心的水平距离**r**和深度**z**，而与方向无关

荷载中心下方(r = 0)有**闭合解析式**；在轴线以外、边缘下方及边缘旁侧，Ahlvin和Ulery (1962)计算了该积分，并以**A′和B′**列表给出



圆心下方：闭式解

理论

$$\Delta\sigma_z = q\left\{1 - \frac{1}{[(R/z)^2+1]^{3/2}}\right\}$$

在地表处($z \to 0$)，$\Delta\sigma_z = q$；随深度**单调减小**，并在很大深度处趋于零

应力仅取决于**R/z**之比：对于相同的z/R，大圆和小圆给出相同的$\Delta\sigma_z/q$值

影响深度

$\Delta\sigma_z/q$	z/R
0.50	1.30
0.20	2.50
0.10	3.71
0.05	5.36

当深度达到3.7R时，应力仅降至地表值的十分之一。

$\Delta\sigma_z = q\,(A' + B')$

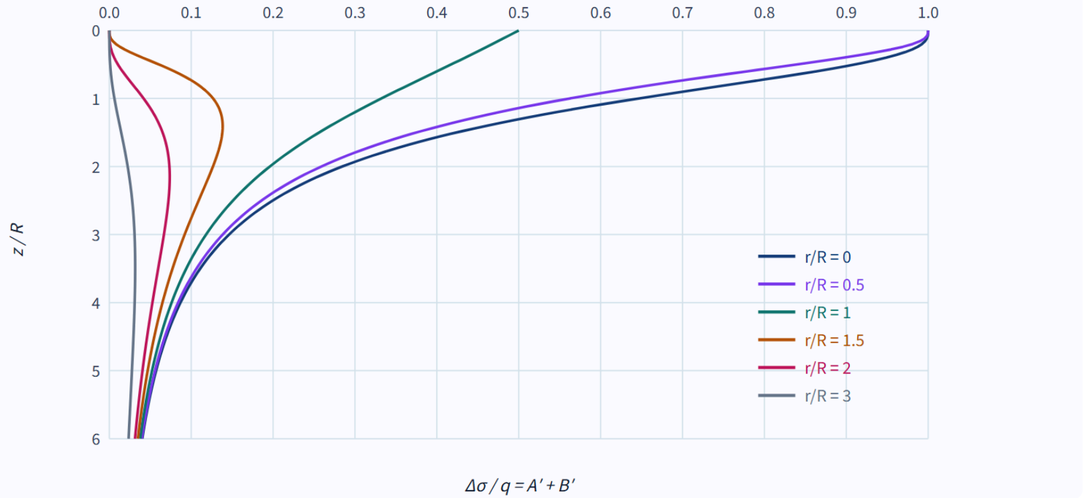
理论

$$\Delta\sigma_z = q\,(A' + B')$$

A′和B′是取决于**z/R**和**r/R**两个比值的两部分，由积分的分解产生；计算$\Delta\sigma_z$时只需要二者的**和**

在轴线上(r = 0)化为封闭形式的总表达式；在**边缘下方**(r/R = 1)，地表处从0.5开始

在荷载旁侧，数值从零开始，先增大，后减小



相对于该点的极坐标积分

理论

表格之间不进行插值：Boussinesq解直接在以A点下方的点为中心的**ρ, φ**极坐标中对圆面积进行积分

在每个φ方向上，射线在**ρ_1**与**ρ_2**之间穿过受荷圆（若A位于荷载之下，则$\rho_1 = 0$）；荷载微元为q ρ dρ dφ

$$d\sigma_z = \frac{3q}{2\pi} \frac{z^3 \rho}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} d\rho \, d\varphi$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{3z^3 \rho \, d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{z^3}{(\rho_1^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z^3}{(\rho_2^2 + z^2)^{3/2}}$$

A′ + B′与数值求和

理论

$$A' + B' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{z^3}{(\rho_1^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z^3}{(\rho_2^2 + z^2)^{3/2}} \right] d\varphi$$

$$\rho_{1,2} = -r\cos\varphi \mp \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2\varphi}$$

其余φ积分的被积函数连续，沿**2880个方向**数值求和；r = 0时 $\rho_1 = 0$，$\rho_2 = R$，该表达式退化为**闭合解**

A′ + B′取值

z/R	r/R	A′ + B′
1.0	1.0	0.33224
1.0	1.5	0.12664
2.0	0.4	0.26781
2.0	2.0	0.07334
0.5	0.8	0.64625
4.0	1.5	0.06487

叠加原理

理论

每个圆由各自的**q, R**和其在地面上的圆心(x_L, y_L)确定（模块中最多八个圆）

两个圆**可以相切，但不得重叠**：圆心距至少为$R_1 + R_2$

由于土体是弹性的，每个圆的应力根据A点到**该圆圆心的自身距离r**求得，再将各应力叠加

$$\Delta\sigma_z = \sum_k q_k \left(A' + B'\right)_k \qquad r_k = \sqrt{(x - x_{L,k})^2 + (y - y_{L,k})^2}$$

题目

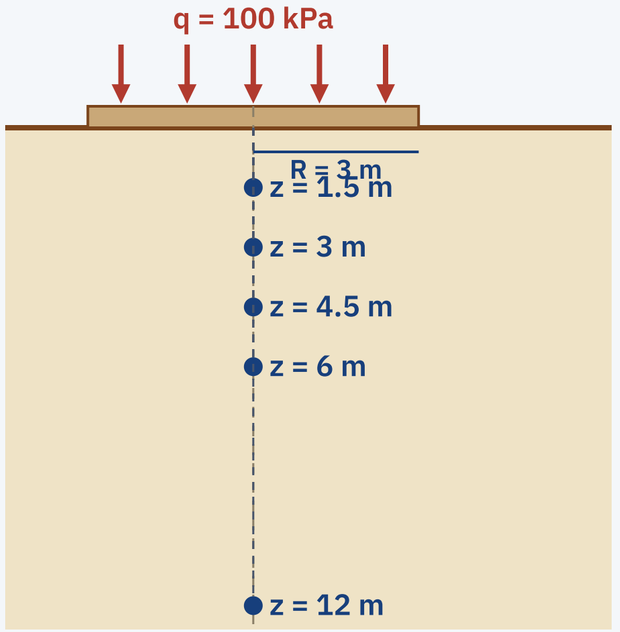
算例

已知条件

圆	**柔性，$R = 3$ m，$q = 100$ kN/m²**
点	**圆的轴线上($r = 0$)：$z = 1.5$；3；4.5；6；12 m**

求

用闭合表达式求**$\Delta\sigma_z$**（先详细计算z = 1.5 m处）、**A′ + B′**；$\Delta\sigma_z$ = 0.10 q时的深度。



解答 (1/3)

解答

1 比值

$$R/z = 3/1.5 = 2 \qquad (R/z)^2 + 1 = 4 + 1 = \mathbf{5}$$

2 指数与倒数

$$5^{3/2} = 11.1803 \qquad 1/11.1803 = 0.08944$$

3 竖向应力

$$\Delta\sigma_z = q\,(1 - 0.08944) = 100\,(0.91056) = \mathbf{91.06}\ \text{kPa}$$

深度z = 1.5 m处，**A′ + B′ = 0.91056**，**$\Delta\sigma_z$ = 91.06 kPa**：地表荷载的91.1%传至该深度。

解答 (2/3)

解答

z (m)	z/R	$(R/z)^2 + 1$	$[\ldots]^{3/2}$	$1 - 1/[\ldots]^{3/2}$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1.5	0.50	5.000	11.1803	0.91056	**91.06**
3.0	1.00	2.000	2.8284	0.64645	**64.64**
4.5	1.50	1.444	1.7360	0.42397	**42.40**
6.0	2.00	1.250	1.3975	0.28446	**28.45**
12.0	4.00	1.062	1.0952	0.08692	**8.69**

轴线上的应力单调递减：**91.1 → 8.7 kPa**(z = 1.5 m → 12 m)。z = 1.5 m一行为手算结果；每一行均用同一表达式求得。z = 3 m处应力约为地表荷载的65%，z = 12 m处为9%。

解答 (3/3)

解答

4 $\Delta\sigma_z$ = 0.10 q时的深度

$$\left[(R/z)^2+1\right]^{3/2} = 1/0.90 \;\Rightarrow\; (R/z)^2 = 1.0728 - 1 = 0.0728$$

$$z/R = 1/\sqrt{0.0728} = \mathbf{3.707} \;\Rightarrow\; z = 3\,(3.707) = \mathbf{11.12}\ \text{m}$$

$\Delta\sigma_z$ = 0.10 q所在的深度为**11.12 m**(z/R = 3.707)：在该深度处，轴线上的应力已降至地表荷载的十分之一。一半值（0.50 q）出现在z/R = 1.305处，即3.91 m。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

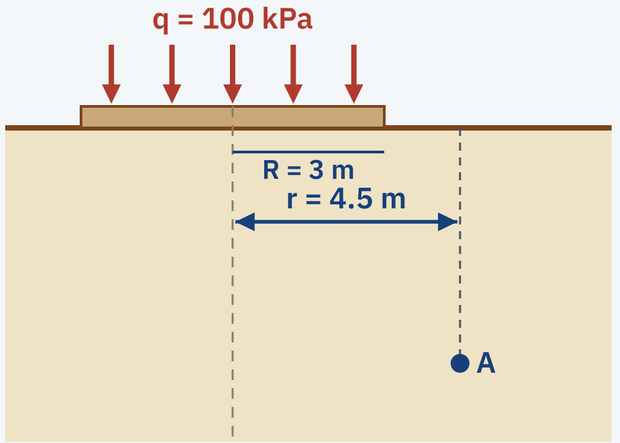
算例

已知条件

圆	**柔性，$R = 3$ m，$q = 100$ kN/m²**
点A	**距中心$r = 4.5$ m（$r/R = 1.5$；位于荷载范围之外），$z = 3$ m ($z/R = 1$)**
方法	**极坐标积分：先手算，取$N = 36$个方向；然后是模块的2880个方向**

求

A′ + B′与$\Delta\sigma_z$；方向数对结果的影响。



解答 (1/3)

解答

1 射线与圆相交处的距离

$$\rho_{1,2} = -r\cos\varphi \mp \sqrt{R^2 - r^2\sin^2\varphi} = -4.5\cos\varphi \mp \sqrt{9 - 20.25\sin^2\varphi}$$

2 射线在哪些方向上与圆相交?

$$R^2 - r^2\sin^2\varphi \geq 0 \;\Rightarrow\; |\sin\varphi| \leq R/r = 0.6667 \text{ 和 } \rho > 0 \;\Rightarrow\; \cos\varphi < 0$$

由于A位于圆外，只有朝向圆的方向才有贡献：**138.19° < φ < 221.81°**。

射线仅在**138.19° < φ < 221.81°**范围内才会射到圆上。若取**N = 36**个方向，则φ_i = 5°, 15°, 25°, ...；其中仅有**8**个落在该范围内：145°, 155°, 165°, 175°及其对称方向185°, 195°, 205°, 215°。

解答 (2/3)

解答

3 一条射线的贡献与平均值

$$F(\rho)=\frac{z^3}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}=\frac{27}{(\rho^2+9)^{3/2}} \qquad g(\varphi)=F(\rho_1)-F(\rho_2)$$

$$A'+B'=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(\varphi_i) \qquad \varphi_i=\left(i-\tfrac{1}{2}\right)\frac{360^\circ}{N}$$

φ (°)	cos φ	$R^2 - r^2\sin^2\varphi$	ρ_1	ρ_2	$F(\rho_1)$	$F(\rho_2)$	$g = F(\rho_1) - F(\rho_2)$
145	−0.8192	2.3380	2.1571	5.2152	0.5352	0.1240	**0.4112**
155	−0.9063	5.3832	1.7582	6.3986	0.6422	0.0765	**0.5657**
165	−0.9659	7.6435	1.5820	7.1114	0.6921	0.0587	**0.6334**
175	−0.9962	8.8462	1.5086	7.4571	0.7131	0.0520	**0.6611**

185°、195°、205°、215°射线是175°、165°、155°、145°射线的对称射线：给出相同的g值。g(145°) = 0.4112，g(175°) = 0.6611。

解答 (3/3)

解答

4 合计(N = 36)

$$\sum g = 2\,(0.4112 + 0.5657 + 0.6334 + 0.6611) = 4.5427$$

$$A' + B' \approx \frac{4.5427}{36} = 0.12619 \quad \Rightarrow \quad \Delta\sigma_z \approx 100\,(0.12619) = \mathbf{12.62}\ \text{kPa}$$

5 随着方向数的增加，结果收敛

N	6	12	24	36	72	180	720	2880
$\Delta\sigma_z$ (kPa)	16.856	10.556	13.200	12.619	12.541	12.688	12.667	12.664

模块采用**2880个方向**：**A′ + B′ = 0.12664**，**$\Delta\sigma_z$ = 12.664 kPa**。同一点的表列值为0.12663；采用36个方向的手算结果（12.62）与之仅相差0.4%。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

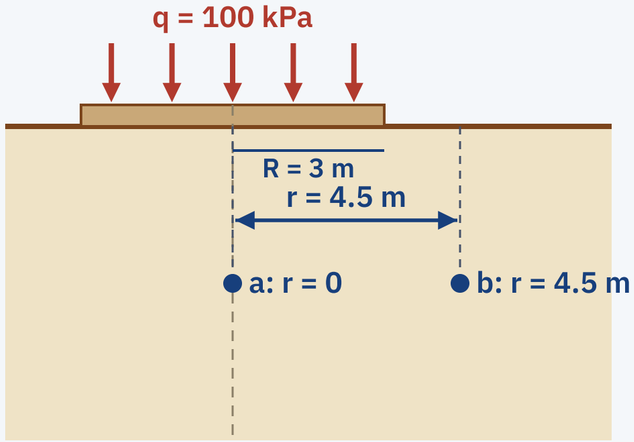
算例

已知条件

圆	**柔性**，$R = 3$ m，$q = 100$ kN/m²
点	**(a)轴线**，$r = 0$；**(b)** $r = 4.5$ m $(r/R = 1.5)$
深度	$z = 1.5; 3; 4.5; 6; 12$ m

求

两条线上的**$\Delta\sigma_z$**；(b)线上的**最大应力**及其深度。



解答 (1/3)

解答

z (m)	z/R	(a) A′ + B′	(a) $\Delta\sigma_z$ (kPa)	(b) A′ + B′	(b) $\Delta\sigma_z$ (kPa)
1.5	0.50	0.91056	91.06	0.06044	**6.04**
3.0	1.00	0.64645	64.64	0.12664	**12.66**
4.5	1.50	0.42397	42.40	0.13793	**13.79**
6.0	2.00	0.28446	28.45	0.12646	**12.65**
12.0	4.00	0.08692	8.69	0.06487	**6.49**

轴线：91.1 → 8.7 kPa，单调减小。**荷载以外(r = 4.5 m)：**6.04 → 13.79 → 6.49 kPa；先**增大**，后减小：荷载随深度向两侧扩散。

每一行是按2880个方向求得的A′ + B′值；(b)列中z = 3 m的一行即算例2的结果。

解答 (2/3)

解答

1 沿r/R = 1.5线，A′ + B′随深度的变化

z/R	z (m)	A′ + B′	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1.00	3.00	0.12664	**12.66**
1.20	3.60	0.13569	**13.57**
1.41	4.23	0.13833	**13.83**
1.60	4.80	0.13670	**13.67**
1.80	5.40	0.13238	**13.24**
2.00	6.00	0.12646	**12.65**

沿r/R = 1.5线，**最大应力出现在深度z ≈ 4.23 m**(z/R = 1.41)处，为**13.83 kPa**：在荷载作用范围以外，应力在某一深度处达到最大值，然后减小。

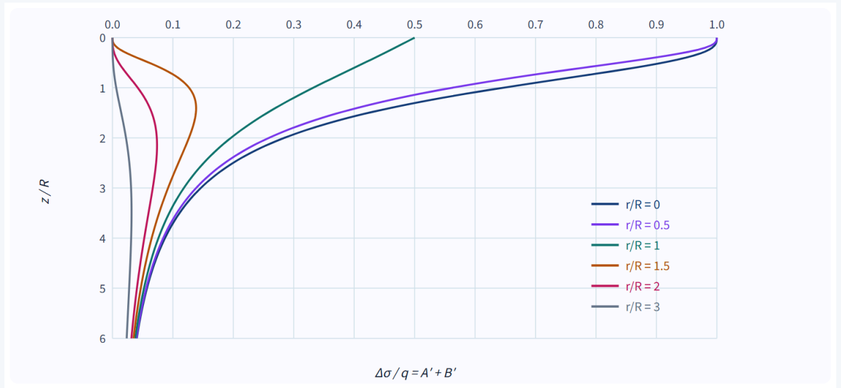
解答 (3/3)

解答

2 朝外的最大值

r/R	最大A′ + B′	深度z/R
1.5	0.1383	1.41
2.0	0.0737	2.15
3.0	0.0317	3.48

当点远离圆形荷载时，最大应力出现的深度**更深且数值更小**：r/R = 1.5时z/R = 1.41，r/R = 3时z/R = 3.48。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

表	$A' + B'$**的取值：** $z/R = 0.25 \ldots 6$**；** $r/R = 0 \ldots 3$
另一圆弧	$R = 5$ **m，** $q = 120$ **kN/m²；点** $r = 7.5$ **m，** $z = 5$ **m**

求

A′ + B′表；第二个圆内的$\Delta\sigma_z$（查表所得）及直接计算值。

解答 (1/2)

解答

z/R \ r/R	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0
0.25	0.9857	0.9658	0.4596	0.0142	0.0016	0.0001
0.50	0.9106	0.8396	0.4175	0.0604	0.0105	0.0010
1.00	0.6464	0.5622	0.3322	0.1266	0.0418	0.0062
1.50	0.4240	0.3750	0.2562	0.1379	0.0650	0.0146
2.00	0.2845	0.2589	0.1960	0.1265	0.0733	0.0225
3.00	0.1462	0.1384	0.1181	0.0919	0.0666	0.0309
4.00	0.0869	0.0840	0.0761	0.0649	0.0526	0.0311
6.00	0.0403	0.0396	0.0377	0.0349	0.0314	0.0236

r/R = 0列为闭合解；**r/R = 1**处，趋近地表时数值趋于0.5（z/R = 0.25时为0.4596）；**r/R ≥ 1.5**各列的数值先增大后减小。表中每个数值均为2880个方向上的积分。

解答 (2/2)

解答

1 比值

$$\frac{z}{R} = \frac{5}{5} = 1.0 \qquad \frac{r}{R} = \frac{7.5}{5} = 1.5$$

2 由表查得系数与应力

$$A' + B' \left(z/R = 1;\ r/R = 1.5\right) = 0.12664$$

$$\Delta\sigma_z = q\left(A' + B'\right) = 120\left(0.12664\right) = \mathbf{15.20}\ \text{kPa}$$

$\Delta\sigma_z/q$仅取决于**z/R**和**r/R**：对R = 5 m的圆，相同的比值给出算例2中R = 3 m的圆的系数（**0.12664**）；应力仅随q按比例变化(15.20 kPa)。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

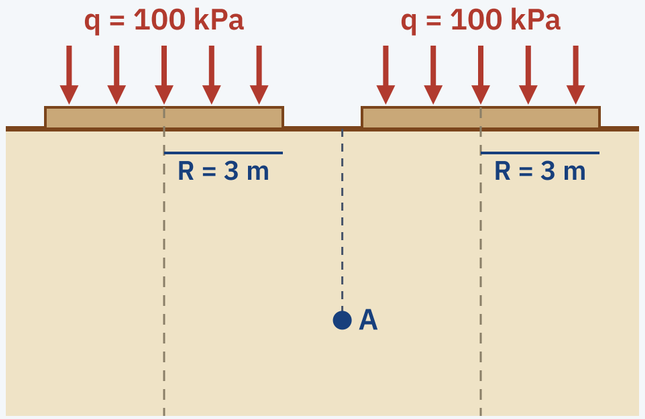
算例

已知条件

圆1	$R = 3$ m，$q = 100$ kN/m²，中心$x = 0$
圆2	$R = 3$ m，$q = 100$ kN/m²，中心$x = 8$ m
点A	$x = 4.5$ m，$y = 0$；$z = 3$ m（另有1.5；4.5；6；12 m）

求

两个圆形荷载面分别作用和共同作用时的 $\Delta\sigma_z$；沿深度分布。



解答 (1/2)

解答

1 重叠验算（圆不重叠，相隔2 m）及距离

$$d = 8\ \text{m} \ \geq R_1 + R_2 = 6\ \text{m}$$

$$r_1 = 4.5\ \text{m}\ (r_1/R = 1.5) \qquad r_2 = 8 - 4.5 = 3.5\ \text{m}\ (r_2/R = 1.1667)$$

2 每个圆的影响系数与应力(z/R = 1)

$$A' + B'_{(1)} = 0.12664 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z(1)} = 100\,(0.12664) = 12.664\ \text{kPa}$$

$$A' + B'_{(2)} = 0.25049 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z(2)} = 100\,(0.25049) = 25.049\ \text{kPa}$$

3 叠加原理

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 12.664 + 25.049 = \mathbf{37.714}\ \text{kPa}$$

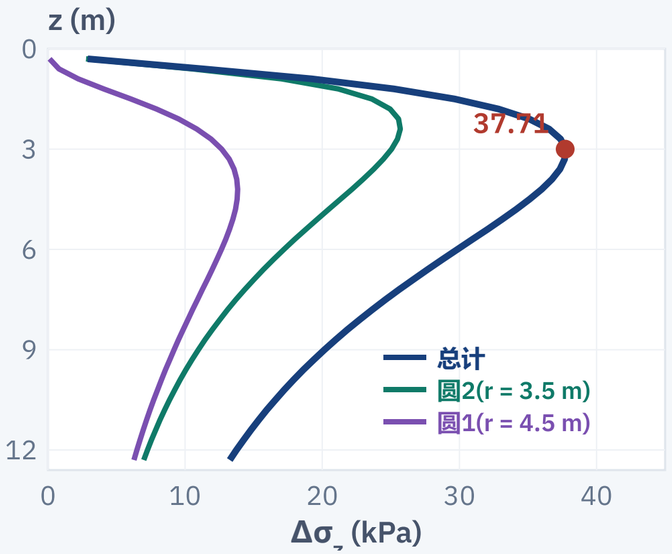
A点距第二个圆更近（3.5 m和4.5 m）：**圆2提供总值的66%**。总$\Delta\sigma_z$ = **37.71 kPa**；单个圆的数值为12.66 kPa。

解答 (2/2)

解答

z (m)	z/R	r_1/R = 1.5	r_2/R = 1,167	$\Delta\sigma_{z(1)}$	$\Delta\sigma_{z(2)}$	合计
1.5	0.50	0.06044	0.23608	6.04	23.61	**29.65**
3.0	1.00	0.12664	0.25049	12.66	25.05	**37.71**
4.5	1.50	0.13793	0.21324	13.79	21.32	**35.12**
6.0	2.00	0.12646	0.17204	12.65	17.20	**29.85**
12.0	4.00	0.06487	0.07258	6.49	7.26	**13.75**

z = 3 m处的总应力为**37.71 kPa**；圆2的贡献随深度减小，而圆1的贡献则增至4.5 m深度。结果为按各圆自身距离r求得的数值之和。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

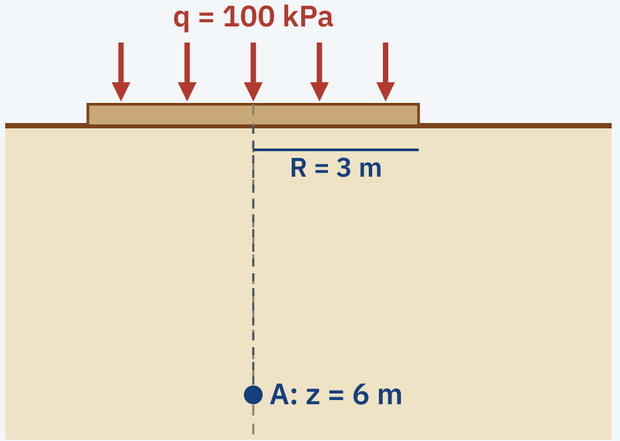
算例

已知条件

圆	$R = 3$ m，$q = 100$ kN/m²；总荷载$Q = q\pi R^2 = 2827.4$ kN
集中荷载	在同一Q圆的圆心处：$\Delta\sigma_z = Q\, I_1/z^2$，$I_1 = \frac{3}{2\pi}[(r/z)^2+1]^{-5/2}$
点	在轴线上($r=0$)和$r=2R$处；$z/R = 1$；2；3；5；10

求

两种解的比值；超过多大深度后，集中荷载近似方可接受?



解答 (1/2)

解答

1 总荷载

$$Q = q\pi R^2 = 100\,\pi\,(3)^2 = \mathbf{2{,}827.4}\ \text{kN}$$

2 集中荷载(Boussinesq)，轴线上r = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{Q}{z^2}\,\frac{3}{2\pi} = \frac{2{,}827.4}{36}\,(0.4775) = \mathbf{37.50}\ \text{kPa}$$

3 圆形（闭式表达式，z = 6 m）

$$\Delta\sigma_z = 100\left(1 - \frac{1}{(0.25+1)^{3/2}}\right) = \mathbf{28.45}\ \text{kPa}$$

z = 2R深度处，集中荷载近似使应力偏大，达**1.318倍**（31.8%）：37.5 kPa，而非28.4 kPa。

解答 (2/2)

解答

r/R	z/R	圆形$\Delta\sigma_z$(kPa)	集中荷载$\Delta\sigma_z$ (kPa)	集中荷载 / 圆形荷载
0	1	64.645	150.000	**2.320**
0	2	28.446	37.500	**1.318**
0	3	14.619	16.667	**1.140**
0	5	5.713	6.000	**1.050**
0	10	1.481	1.500	**1.013**
2	1	4.181	2.683	**0.642**
2	2	7.334	6.629	**0.904**
2	3	6.663	6.647	**0.997**
2	5	4.048	4.140	**1.023**
2	10	1.346	1.360	**1.010**

在轴线上z/R = 1处，集中荷载公式使应力高估**2.32倍**；z = 5R时相差5.0%，z = 10R时仅剩1.3%。r = 2R时，该近似在近地表处**偏小**(0.64)，而z ≥ 3R时相差不超过3%。

在GeoTerva中验算解答 ↗

小结

要点回顾

轴线上： $\Delta\sigma_z = q\{1 - 1/[(R/z)^2 + 1]^{3/2}\}$；z = 1.5 m时为91.06 kPa (A′ + B′ = 0.91056)；$\Delta\sigma_z$ = 0.10 q时的深度为**3.71R** (11.12 m)

任意点： $\Delta\sigma_z = q\,(A' + B')$；A′ + B′仅取决于z/R和r/R。**算例(r = 4.5 m; z = 3 m)：** A′ + B′ = 0.12664，**$\Delta\sigma_z$ = 12.664 kPa**

计算： Boussinesq积分在A点处采用极坐标；ρ方向为封闭解，φ方向为数值积分（2880个方向）。手算取36个方向时为12.62 kPa

在荷载范围之外(r/R = 1.5)，应力先增大：最大值在z ≈ 4.23 m处，为13.83 kPa；边缘下方地表处为0.5 q

两个圆： 各圆的应力按其自身的距离r求得后叠加：12.66 + 25.05 = 37.71 kPa。**集中荷载**近似在荷载附近误差较大（z = 2R时为1.32倍），z ≥ 5R时吻合

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Ahlvin, R.G. and Ulery, H.H. (1962). Tabulated values for determining the complete pattern of stresses, strains, and deflections beneath a uniform circular load on a homogeneous half space. Highway Research Bulletin 342, 1–13.

注

全部数值算例均由模块自身的计算引擎生成；模块给出相同的数值。模块打开时的默认输入为R = 3 m、q = 100 kN/m² 的圆形荷载和A点(r = 4.5 m; z = 3 m)。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入自己的圆形荷载（q、R、圆心）、A点和深度；模块同时给出A′ + B′、$\Delta\sigma_z$值、等应力线、随深度变化曲线、分步解答和报告。

打开模块→

理论页面 →

用手机打开

试用模块无需注册。