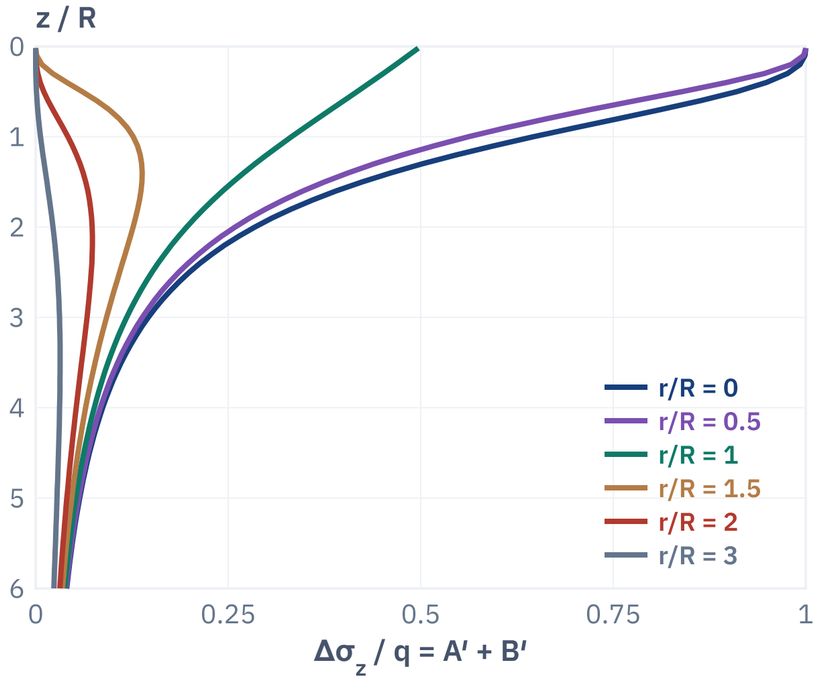
Apresentação de aula de geotecnia · Tensões no solo

Tensão sob carga circular

Aula: tensão vertical sob carga circular; expressão fechada no eixo, A′ + B′ fora do eixo; exemplos resolvidos à mão.

Sobre o eixo | A′ + B′ | Integral polar | Fora da carga | Vários círculos



Introdução

O que veremos nesta aula?

Calcular o acréscimo de tensão vertical sob uma **área circular** com carga uniformemente distribuída (tanque, silo, sapata circular): $\Delta\sigma_z$

Sobre o eixo do círculo, expressão fechada: $\Delta\sigma_z = q\{1 - 1/[(R/z)^2 + 1]^{3/2}\}$

Fora do eixo, abaixo da borda e ao lado dela: $\Delta\sigma_z = q\,(A' + B')$; $A' + B'$ depende apenas de z/R e r/R

Calcular a integral de Boussinesq **em coordenadas polares no ponto A**: integral em ρ em forma fechada e integral em φ numérica

Que, fora da carga, a tensão **primeiro aumenta e depois diminui**, e que as tensões de vários círculos são **somadas**

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: fórmula e justificativa

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Círculo do exemplo: R = 3 m, q = 100 kN/m²; o ponto A está a r = 4.5 m do eixo do círculo, na profundidade z = 3 m (fora da carga).

Área circular com carga uniforme

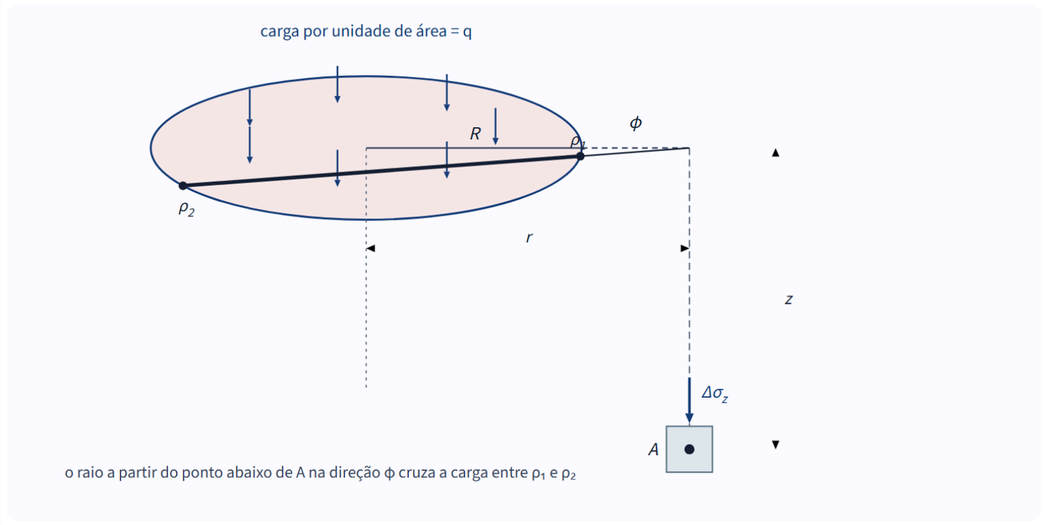
TEORIA

Área circular flexível de raio **R** sob pressão **q** uniformemente distribuída (tanque, silo, sapata circular)

O solo é um meio semi-infinito **homogêneo, isotrópico e linearmente elástico**; $\Delta\sigma_z$ é apenas o acréscimo de tensão produzido pela carga

O problema é **axissimétrico**: a tensão depende apenas da distância horizontal ao centro **r** e da profundidade **z**, e não da direção

Sob o centro (r = 0) existe uma **expressão fechada**; fora do eixo, sob a borda e ao lado dela, Ahlvin e Ulery (1962) calcularam a integral e a tabelaram como **A′ e B′**



Sob o centro do círculo: solução fechada

TEORIA

$$\Delta\sigma_z = q\left\{1 - \frac{1}{[(R/z)^2 + 1]^{3/2}}\right\}$$

Na superfície ($z \to 0$), $\Delta\sigma_z = q$; **diminui monotonicamente** com a profundidade e tende a zero a grande profundidade

A tensão depende apenas da razão **R/z**: para o mesmo z/R, um círculo grande e um pequeno fornecem o mesmo valor de $\Delta\sigma_z/q$

PROFUNDIDADE DE INFLUÊNCIA

$\Delta\sigma_z/q$	z/R
0.50	1.30
0.20	2.50
0.10	3.71
0.05	5.36

A tensão cai a apenas um décimo do valor na superfície quando a profundidade é 3.7R.

$\Delta\sigma_z = q\,(A' + B')$

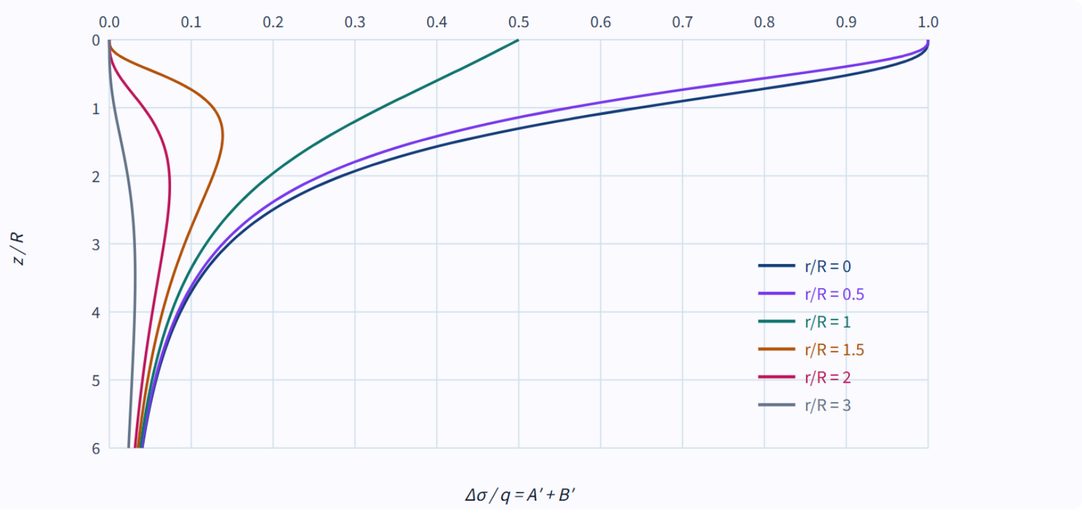
TEORIA

$$\Delta\sigma_z = q\,(A' + B')$$

A′ e B′ são duas parcelas que dependem das razões **z/R** e **r/R**; surgem da decomposição da integral e, para $\Delta\sigma_z$, só é necessária a sua **soma**

No eixo (r = 0), reduz-se à expressão fechada completa; **sob a borda** (r/R = 1), começa em 0.5 na superfície

Ao lado da carga, o valor parte de zero, primeiro aumenta e depois diminui



Integral polar em relação ao ponto

TEORIA

Não se faz interpolação entre tabelas: a solução de Boussinesq é integrada diretamente sobre o círculo, nas coordenadas polares **ρ, φ** centradas no ponto situado abaixo do ponto A

Em cada direção φ, o raio intercepta o círculo carregado entre **ρ_1** e **ρ_2** (ρ_1 = 0 se A estiver sob a carga); o elemento de carga é q ρ dρ dφ

$$d\sigma_z = \frac{3q}{2\pi}\,\frac{z^3\,\rho}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}\,d\rho\,d\varphi$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{3z^3\rho\,d\rho}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} = \frac{z^3}{(\rho_1^2+z^2)^{3/2}} - \frac{z^3}{(\rho_2^2+z^2)^{3/2}}$$

A′ + B′ e soma numérica

TEORIA

$$A' + B' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{z^3}{(\rho_1^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z^3}{(\rho_2^2 + z^2)^{3/2}} \right] d\varphi$$

$$\rho_{1,2} = -r \cos\varphi \mp \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2\varphi}$$

O integrando da integral restante em φ é contínuo e é somado numericamente em **2880 direções**; em r = 0, $\rho_1 = 0$ e $\rho_2 = R$, e a expressão retorna à **solução fechada**

VALORES DE A′ + B′

z/R	r/R	A′ + B′
1.0	1.0	0.33224
1.0	1.5	0.12664
2.0	0.4	0.26781
2.0	2.0	0.07334
0.5	0.8	0.64625
4.0	1.5	0.06487

Superposição

TEORIA

Cada círculo é definido por **q, R** próprios e pelo centro na superfície do terreno (x_L, y_L) (no máximo oito círculos no módulo)

Dois círculos **podem se tocar, mas não se sobrepor**: a distância entre os centros é de, no mínimo, $R_1 + R_2$

Como o solo é elástico, a tensão de cada círculo é obtida com **sua própria distância r do ponto A ao centro desse círculo**, e as tensões são somadas

$$\Delta\sigma_z = \sum_k q_k \left(A' + B'\right)_k \qquad r_k = \sqrt{(x - x_{L,k})^2 + (y - y_{L,k})^2}$$

Enunciado

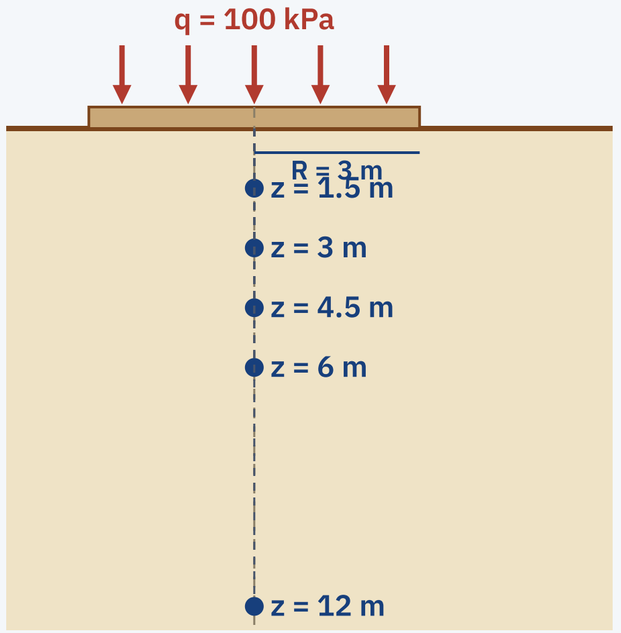
EXEMPLO

PEDE-SE

$\Delta\sigma_z$ em forma fechada (detalhado primeiro para z = 1.5 m), **A′ + B′**; profundidade em que $\Delta\sigma_z = 0.10\ q$.

Dados

Círculo	**flexível, $R = 3$ m, $q = 100$ kN/m²**
Pontos	**sobre o eixo do círculo ($r = 0$): $z = 1.5; 3; 4.5; 6; 12$ m**



Solução (1/3)

SOLUÇÃO

1 Razões

$$R/z = 3/1.5 = 2 \qquad (R/z)^2 + 1 = 4 + 1 = \mathbf{5}$$

2 Expoente e inverso

$$5^{3/2} = 11.1803 \qquad 1/11.1803 = 0.08944$$

3 Tensão vertical

$$\Delta\sigma_z = q\,(1 - 0.08944) = 100\,(0.91056) = \mathbf{91.06}\ \mathrm{kPa}$$

Na profundidade z = 1.5 m, **A′ + B′ = 0.91056** e **$\Delta\sigma_z$ = 91.06 kPa**: 91.1% da carga na superfície é transmitida.

Solução (2/3)

SOLUÇÃO

z (m)	z/R	$(R/z)^2 + 1$	$[\ldots]^{3/2}$	$1 - 1/[\ldots]^{3/2}$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1.5	0.50	5.000	11.1803	0.91056	**91.06**
3.0	1.00	2.000	2.8284	0.64645	**64.64**
4.5	1.50	1.444	1.7360	0.42397	**42.40**
6.0	2.00	1.250	1.3975	0.28446	**28.45**
12.0	4.00	1.062	1.0952	0.08692	**8.69**

No eixo, a tensão diminui em um único sentido: **91.1 → 8.7 kPa** (z = 1.5 m → 12 m). A linha z = 1.5 m é o cálculo resolvido à mão; cada linha é obtida com a mesma expressão. Em z = 3 m a tensão é cerca de 65% da carga na superfície e, em z = 12 m, 9%.

Solução (3/3)

SOLUÇÃO

4 Profundidade em que $\Delta\sigma_z = 0.10\ q$

$$\left[(R/z)^2 + 1\right]^{3/2} = 1/0.90 \;\Rightarrow\; (R/z)^2 = 1.0728 - 1 = 0.0728$$

$$z/R = 1/\sqrt{0.0728} = \mathbf{3.707} \;\Rightarrow\; z = 3\,(3.707) = \mathbf{11.12}\ \mathrm{m}$$

A profundidade em que $\Delta\sigma_z = 0.10\ q$ é **11.12 m** (z/R = 3.707): nessa profundidade, a tensão no eixo caiu a um décimo da carga na superfície. O valor pela metade (0.50 q) está em z/R = 1.305, isto é, a 3.91 m.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

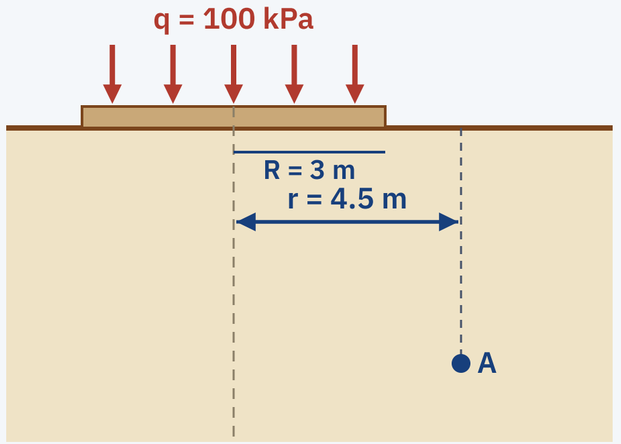
EXEMPLO

Dados

Círculo	**flexível, $R = 3$ m, $q = 100$ kN/m²**
Ponto A	**a $r = 4.5$ m do centro ($r/R = 1.5$; fora da carga), $z = 3$ m ($z/R = 1$)**
Método	**integral polar: primeiro à mão, $N = 36$ direções; depois as 2880 direções do módulo**

PEDE-SE

A′ + B′ e **$\Delta\sigma_z$**; efeito do número de direções sobre o resultado.



Solução (1/3)

SOLUÇÃO

1 Distâncias em que a semirreta intercepta o círculo

$$\rho_{1,2} = -r\cos\varphi \mp \sqrt{R^2 - r^2\sin^2\varphi} = -4.5\cos\varphi \mp \sqrt{9 - 20.25\sin^2\varphi}$$

2 Em quais direções os raios atingem o círculo?

$$R^2 - r^2\sin^2\varphi \geq 0 \;\Rightarrow\; |\sin\varphi| \leq R/r = 0.6667 \;\text{ e }\; \rho > 0 \;\Rightarrow\; \cos\varphi < 0$$

Como A está fora do círculo, apenas as direções voltadas para o círculo contribuem: **138.19° < φ < 221.81°**.

O raio atinge o círculo somente no intervalo **138.19° < φ < 221.81°**. Tomando-se **N = 36** direções, resulta φ_i = 5°, 15°, 25°, ...; dessas, apenas **8** estão nesse intervalo: 145°, 155°, 165°, 175° e as simétricas 185°, 195°, 205°, 215°.

Solução (2/3)

SOLUÇÃO

3 Contribuição de um raio e média

$$F(\rho) = \frac{z^3}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{27}{(\rho^2 + 9)^{3/2}} \qquad g(\varphi) = F(\rho_1) - F(\rho_2)$$

$$A' + B' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g(\varphi_i) \qquad \varphi_i = \left(i - \tfrac{1}{2}\right) \frac{360^\circ}{N}$$

φ (°)	cos φ	$R^2 - r^2 \operatorname{sen}^2\varphi$	ρ_1	ρ_2	$F(\rho_1)$	$F(\rho_2)$	$g = F(\rho_1) - F(\rho_2)$
145	−0.8192	2.3380	2.1571	5.2152	0.5352	0.1240	**0.4112**
155	−0.9063	5.3832	1.7582	6.3986	0.6422	0.0765	**0.5657**
165	−0.9659	7.6435	1.5820	7.1114	0.6921	0.0587	**0.6334**
175	−0.9962	8.8462	1.5086	7.4571	0.7131	0.0520	**0.6611**

Os raios de 185°, 195°, 205°, 215° são os simétricos de 175°, 165°, 155°, 145°: fornecem os mesmos valores de g. g(145°) = 0.4112 e g(175°) = 0.6611.

Solução (3/3)

SOLUÇÃO

4 Total (N = 36)

$$\sum g = 2\,(0.4112 + 0.5657 + 0.6334 + 0.6611) = 4.5427$$

$$A' + B' \approx \frac{4.5427}{36} = 0.12619 \quad \Rightarrow \quad \Delta\sigma_z \approx 100\,(0.12619) = \mathbf{12.62}\ \mathrm{kPa}$$

5 O resultado converge à medida que o número de direções aumenta

N	6	12	24	36	72	180	720	2880
$\Delta\sigma_z$ (kPa)	16.856	10.556	13.200	12.619	12.541	12.688	12.667	12.664

O módulo utiliza **2880 direções**: **A′ + B′ = 0.12664**, **$\Delta\sigma_z$ = 12.664 kPa**. O valor tabelado para o mesmo ponto é 0.12663; o resultado manual com 36 direções (12.62) difere deste em apenas 0.4%.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

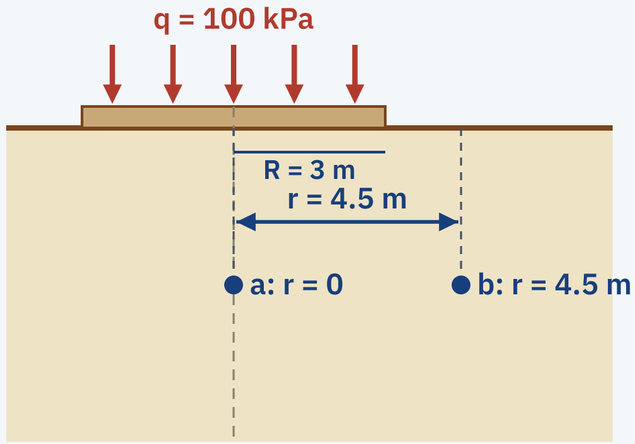
EXEMPLO

PEDE-SE

$\Delta\sigma_z$ nas duas linhas; **tensão máxima** e sua profundidade na linha (b).

Dados

Círculo	**flexível,** $R = 3$ **m,** $q = 100$ **kN/m²**
Pontos	**(a) eixo,** $r = 0$**; (b)** $r = 4.5$ **m** $(r/R = 1.5)$
Profundidades	$z = 1.5; 3; 4.5; 6; 12$ **m**



Solução (1/3)

SOLUÇÃO

z (m)	z/R	(a) A′ + B′	(a) $\Delta\sigma_z$ (kPa)	(b) A′ + B′	(b) $\Delta\sigma_z$ (kPa)
1.5	0.50	0.91056	91.06	0.06044	**6.04**
3.0	1.00	0.64645	64.64	0.12664	**12.66**
4.5	1.50	0.42397	42.40	0.13793	**13.79**
6.0	2.00	0.28446	28.45	0.12646	**12.65**
12.0	4.00	0.08692	8.69	0.06487	**6.49**

Eixo: 91.1 → 8.7 kPa, decrescendo em um único sentido. **Fora da carga (r = 4.5 m):** 6.04 → 13.79 → 6.49 kPa; primeiro **aumenta** e depois diminui: a carga se espalha lateralmente com a profundidade.

Cada linha é um valor de A′ + B′ de 2880 direções; a linha z = 3 m da coluna (b) é o resultado do Exemplo 2.

Solução (2/3)

SOLUÇÃO

1 A′ + B′ na linha r/R = 1.5, em função da profundidade

z/R	z (m)	A′ + B′	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1.00	3.00	0.12664	**12.66**
1.20	3.60	0.13569	**13.57**
1.41	4.23	0.13833	**13.83**
1.60	4.80	0.13670	**13.67**
1.80	5.40	0.13238	**13.24**
2.00	6.00	0.12646	**12.65**

Na linha r/R = 1.5, a **maior tensão ocorre à profundidade z ≈ 4.23 m** (z/R = 1.41), com **13.83 kPa**: fora da carga, a tensão atinge seu valor máximo em profundidade e depois diminui.

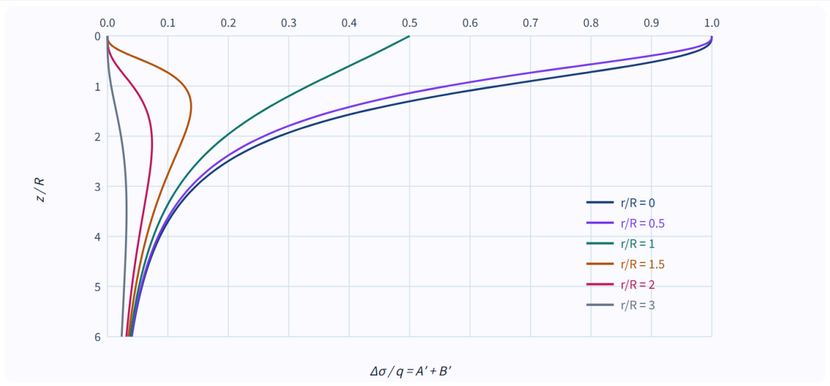
Solução (3/3)

SOLUÇÃO

2 Valor máximo para fora

r/R	maior A′ + B′	profundidade z/R
1.5	0.1383	1.41
2.0	0.0737	2.15
3.0	0.0317	3.48

À medida que o ponto se afasta do círculo, a tensão máxima ocorre **mais fundo e é menor**: para r/R = 1.5, z/R = 1.41; para r/R = 3, z/R = 3.48.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Tabela	**Valores de $A' + B'$: $z/R = 0.25$ … 6; $r/R = 0$ … 3**
Outro círculo	$R = 5$ **m,** $q = 120$ **kN/m²; ponto** $r = 7.5$ **m,** $z = 5$ **m**

PEDE-SE

Tabela A′ + B′; no segundo círculo, **$\Delta\sigma_z$** (da tabela) e por cálculo direto.

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

z/R \ r/R	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0
0.25	0.9857	0.9658	0.4596	0.0142	0.0016	0.0001
0.50	0.9106	0.8396	0.4175	0.0604	0.0105	0.0010
1.00	0.6464	0.5622	0.3322	0.1266	0.0418	0.0062
1.50	0.4240	0.3750	0.2562	0.1379	0.0650	0.0146
2.00	0.2845	0.2589	0.1960	0.1265	0.0733	0.0225
3.00	0.1462	0.1384	0.1181	0.0919	0.0666	0.0309
4.00	0.0869	0.0840	0.0761	0.0649	0.0526	0.0311
6.00	0.0403	0.0396	0.0377	0.0349	0.0314	0.0236

A coluna **r/R = 0** é a solução fechada; em **r/R = 1** o valor tende a 0.5 ao se aproximar da superfície (0.4596 em z/R = 0.25); nas colunas **r/R ≥ 1.5** o valor primeiro aumenta e depois diminui. Cada número da tabela é uma integral de 2880 direções.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

1 Razões

$$\frac{z}{R} = \frac{5}{5} = 1.0 \qquad \frac{r}{R} = \frac{7.5}{5} = 1.5$$

2 Coeficiente e tensão a partir da tabela

$$A' + B' \,(z/R = 1;\; r/R = 1.5) = 0.12664$$

$$\Delta\sigma_z = q\,(A' + B') = 120\,(0.12664) = \mathbf{15.20}\ \mathrm{kPa}$$

$\Delta\sigma_z/q$ depende apenas de **z/R** e **r/R**: em um círculo de R = 5 m, as mesmas razões fornecem o coeficiente do círculo de R = 3 m do Exemplo 2 (**0.12664**); a tensão varia em escala apenas com q (15.20 kPa).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

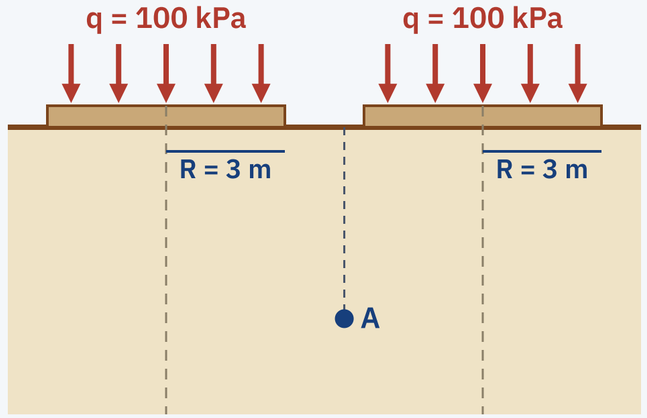
EXEMPLO

Dados

Círculo 1	$R = 3$ m, $q = 100$ kN/m², centro $x = 0$
Círculo 2	$R = 3$ m, $q = 100$ kN/m², centro $x = 8$ m
Ponto A	$x = 4.5$ m, $y = 0$; $z = 3$ m (também 1.5; 4.5 ; 6; 12 m)

PEDE-SE

$\Delta\sigma_z$ de cada círculo separadamente e dos dois em conjunto; perfil em profundidade.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Verificação de sobreposição (os círculos não se sobrepõem; 2 m entre eles) e distâncias

$$d = 8\ \text{m} \ \geq R_1 + R_2 = 6\ \text{m}$$

$$r_1 = 4.5\ \text{m}\ (r_1/R = 1.5) \qquad r_2 = 8 - 4.5 = 3.5\ \text{m}\ (r_2/R = 1.1667)$$

2 Fator de influência e tensão de cada círculo (z/R = 1)

$$A' + B'_{(1)} = 0.12664 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z(1)} = 100\,(0.12664) = 12.664\ \text{kPa}$$

$$A' + B'_{(2)} = 0.25049 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z(2)} = 100\,(0.25049) = 25.049\ \text{kPa}$$

3 Superposição

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 12.664 + 25.049 = \mathbf{37.714}\ \text{kPa}$$

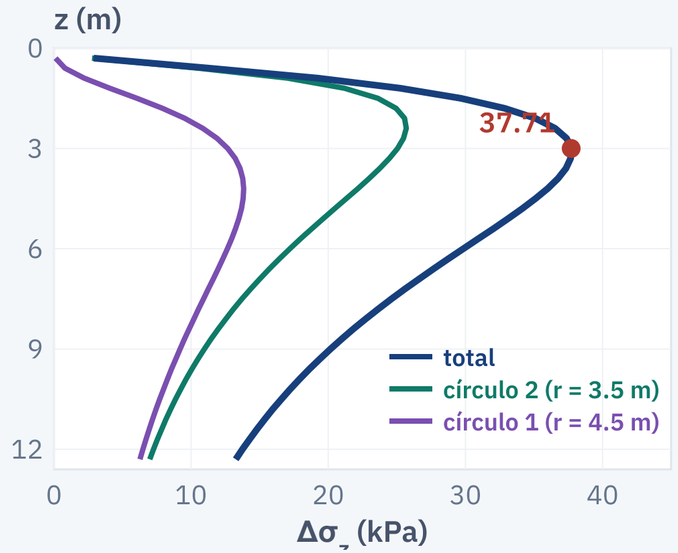
O ponto A está mais próximo do segundo círculo (3.5 m e 4.5 m): o **círculo 2 contribui com 66% do total**. $\Delta\sigma_z$ total = **37.71 kPa**; o valor do círculo isolado era 12.66 kPa.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

z (m)	z/R	$r_1/R = 1.5$	$r_2/R = 1{,}167$	$\Delta\sigma_{z(1)}$	$\Delta\sigma_{z(2)}$	Total
1.5	0.50	0.06044	0.23608	6.04	23.61	**29.65**
3.0	1.00	0.12664	0.25049	12.66	25.05	**37.71**
4.5	1.50	0.13793	0.21324	13.79	21.32	**35.12**
6.0	2.00	0.12646	0.17204	12.65	17.20	**29.85**
12.0	4.00	0.06487	0.07258	6.49	7.26	**13.75**

A tensão total em z = 3 m é **37.71 kPa**; a contribuição do círculo 2 diminui com a profundidade, ao passo que a do círculo 1 aumenta até 4.5 m. O resultado é a soma dos valores obtidos com a distância r própria de cada círculo.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

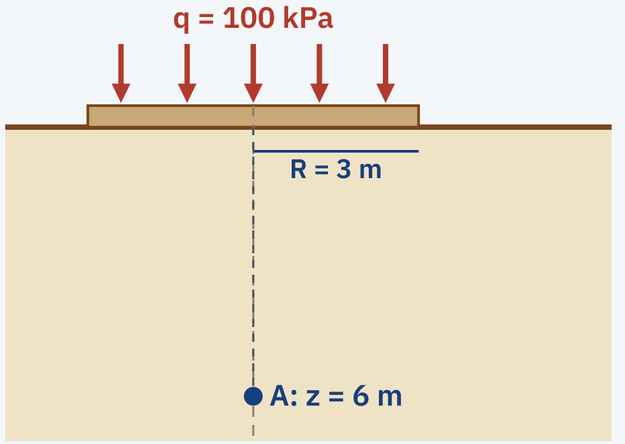
EXEMPLO

Dados

Círculo	$R = 3$ m, $q = 100$ kN/m²; carga total $Q = q\pi R^2 = 2827.4$ kN
Carga pontual	no centro do mesmo círculo Q: $\Delta\sigma_z = Q\, I_1/z^2$, $I_1 = \frac{3}{2\pi}[(r/z)^2 + 1]^{-5/2}$
Pontos	no eixo em ($r = 0$) e em $r = 2R$; $z/R = 1; 2; 3; 5; 10$

PEDE-SE

Razão entre as duas soluções; a partir de que profundidade a aproximação por carga pontual é aceitável?



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Carga total

$$Q = q\pi R^2 = 100\,\pi\,(3)^2 = \mathbf{2{,}827.4}\ \mathrm{kN}$$

2 Carga pontual (Boussinesq), no eixo r = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{Q}{z^2}\,\frac{3}{2\pi} = \frac{2{,}827.4}{36}\,(0.4775) = \mathbf{37.50}\ \mathrm{kPa}$$

3 Círculo (expressão em forma fechada, z = 6 m)

$$\Delta\sigma_z = 100\left(1 - \frac{1}{(0.25+1)^{3/2}}\right) = \mathbf{28.45}\ \mathrm{kPa}$$

Em z = 2R de profundidade, a aproximação de carga concentrada fornece uma tensão **1.318 vezes** maior (31.8%): 37.5 kPa em vez de 28.4 kPa.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

r/R	z/R	Círculo $\Delta\sigma_z$ (kPa)	Carga pontual $\Delta\sigma_z$ (kPa)	Carga pontual / circular
0	1	64.645	150.000	**2.320**
0	2	28.446	37.500	**1.318**
0	3	14.619	16.667	**1.140**
0	5	5.713	6.000	**1.050**
0	10	1.481	1.500	**1.013**
2	1	4.181	2.683	**0.642**
2	2	7.334	6.629	**0.904**
2	3	6.663	6.647	**0.997**
2	5	4.048	4.140	**1.023**
2	10	1.346	1.360	**1.010**

No eixo, em z/R = 1, a carga pontual superestima a tensão por um fator de **2.32**; em z = 5R a diferença é de 5.0% e, em z = 10R, cai para 1.3%. Em r = 2R, a aproximação **subestima** a tensão (0.64) junto à superfície, ao passo que, em z ≥ 3R, a diferença não excede 3%.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Resumo

Pontos-chave

No eixo: $\Delta\sigma_z = q\{1 - 1/[(R/z)^2 + 1]^{3/2}\}$; para z = 1.5 m, 91.06 kPa ($A' + B' = 0.91056$); a profundidade em que $\Delta\sigma_z = 0.10\ q$ é **3.71R** (11.12 m)

Ponto genérico: $\Delta\sigma_z = q\ (A' + B')$; $A' + B'$ depende apenas de z/R e r/R. **Exemplo (r = 4.5 m; z = 3 m):** $A' + B' = 0.12664$, **$\Delta\sigma_z$ = 12.664 kPa**

Cálculo: integral de Boussinesq no ponto A em coordenadas polares; ρ em forma fechada, φ numérico (2880 direções). À mão, com 36 direções: 12.62 kPa

Fora da carga (r/R = 1.5), a tensão primeiro aumenta: valor máximo de 13.83 kPa em z ≈ 4.23 m; sob a borda, 0.5 q na superfície

Dois círculos: as tensões são obtidas com a distância r própria de cada círculo e somadas: 12.66 + 25.05 = 37.71 kPa. A aproximação por **carga pontual** é imprecisa próximo à carga (×1.32 em z = 2R) e é adequada para z ≥ 5R

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Ahlvin, R.G. and Ulery, H.H. (1962). Tabulated values for determining the complete pattern of stresses, strains, and deflections beneath a uniform circular load on a homogeneous half space. Highway Research Bulletin 342, 1–13.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o próprio motor de cálculo do módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O módulo abre com um círculo carregado de R = 3 m, q = 100 kN/m² e o ponto A (r = 4.5 m; z = 3 m).

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva os círculos (q, R, centro), o ponto A e a profundidade; o módulo fornece juntos A′ + B′, o valor de $\Delta\sigma_z$, as curvas de isotensão, o perfil em profundidade, a solução passo a passo e o relatório.

Abrir o módulo → **Página de teoria →**

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.

Para utilização em aulas: info@geoterva.com