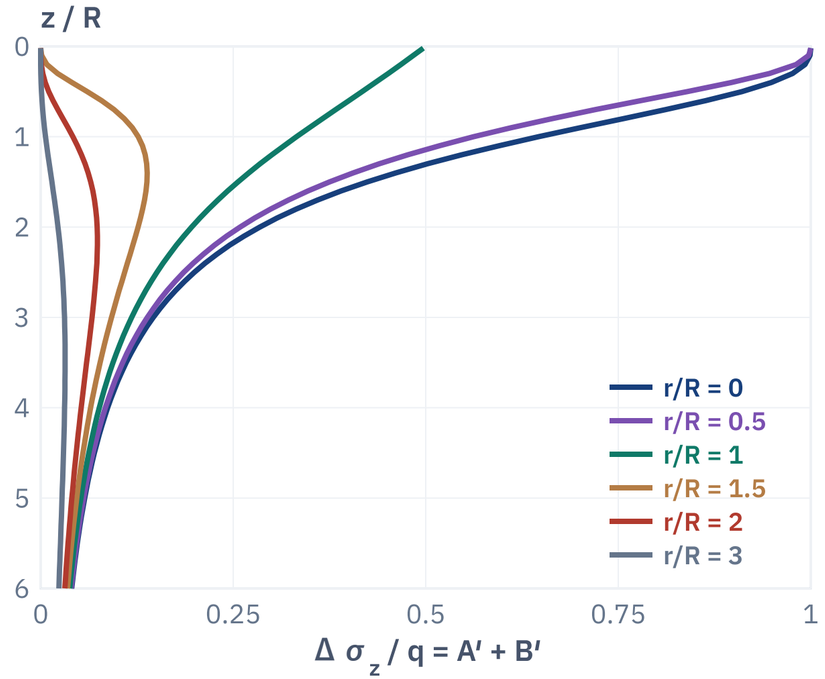
GeoTerva

地盤工学の講義スライド・地盤内の応力

円形荷重下の応力

講義：円形荷重下の鉛直応力。軸上では閉形式の式、軸外ではA′ + B′。手計算で解く例題。

軸上 | A′ + B′ | 極積分 | 荷重の外側 | 複数円



この講義で学ぶこと

一様分布荷重を受ける**円形領域**（タンク、サイロ、円形基礎）下の鉛直応力増分：**$\Delta\sigma_z$**

円形の軸上における閉形式の式：$\Delta\sigma_z = q\{1 - 1/[(R/z)^2 + 1]^{3/2}\}$

偏心、縁の下方および側方：**$\Delta\sigma_z = q(A' + B')$**；$A' + B'$はz/Rとr/Rのみに依存する

Boussinesq積分を**点Aにおける極座標**で評価すること：ρ積分は解析的に、ϕ積分は数値的に

荷重の外側では応力が**まず増加しその後減少する**こと；複数の円の応力が**合計される**こと

講義の流れ

各項目は**3つの手順**で扱う：

1 · **理論**：式とその根拠

2 · **問題**：与条件と求めるもの

3 · **解答**：数値を用いて手順ごとに

例題の円形載荷：R = 3 m、q = 100 kN/m²；点Aは円の軸からr = 4.5 m離れ、深さz = 3 mにある（載荷領域の外側）。

等分布荷重を受ける円形領域

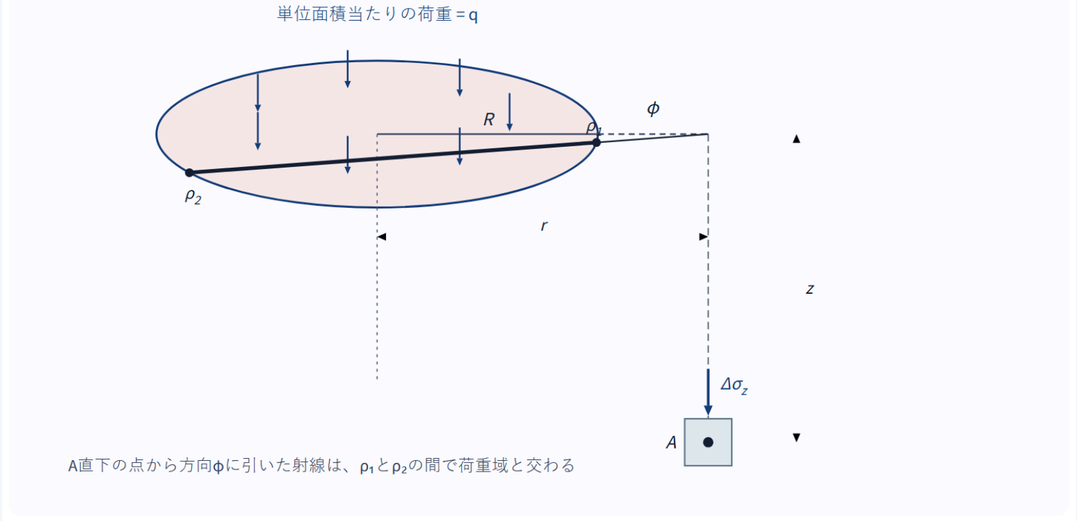
理論

等分布圧力**q**を受ける、半径**R**の**柔軟な円形領域**（タンク、サイロ、円形基礎）

地盤は**均質・等方・線形弾性**の半無限体である；$\Delta\sigma_z$は荷重による増分のみである

問題は**軸対称**である：応力は中心からの水平距離**r**と深さ**z**のみに依存し、方向には依存しない

中心の下方（r = 0）には**閉じた式**がある。軸外、縁の下方および側方では、AhlvinとUlery（1962）が積分を計算し**A′とB′**として表にまとめた



円の中心直下：閉形式解

理論

$$\Delta\sigma_z = q\left\{1 - \frac{1}{[(R/z)^2+1]^{3/2}}\right\}$$

表面（z → 0）では Δ σ z = q；深さとともに**一方向に減少**し、非常に深い位置ではゼロに近づく

応力は**R/z**比のみに依存する：同じz/Rに対して大きい円と小さい円は同じ Δ σ z/qを与える

影響深さ

Δ σz/q	z/R
0.50	1.30
0.20	2.50
0.10	3.71
0.05	5.36

応力は、深さが3.7Rになると地表面の値のわずか10分の1に低下する。

$\Delta \sigma_z = q\,(A' + B')$

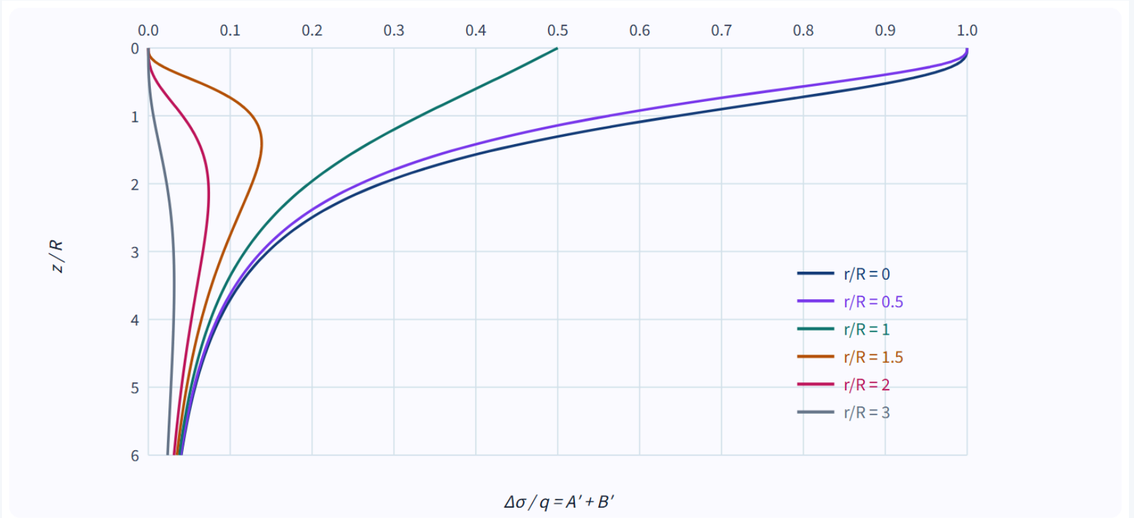
理論

$$\Delta\sigma_z = q\,(A' + B')$$

A′ と B′ は **z/R** および **r/R** の比に依存する2つの部分であり、積分の分解から生じる。Δ σ z には両者の**和**のみが必要である

軸上（r = 0）では完全な閉形式の式に帰着する；**縁の下**（r/R = 1）では表面で0.5から始まる

載荷位置の側方では値はゼロから始まり、まず増加し、その後減少する



点に関する極座標積分

理論

表の間で補間は行わない。Boussinesqの解は、A点の直下の点を中心とする ρ, ϕ 極座標において円上で直接積分する。

各 ϕ 方向において、光線は載荷円を ρ_1 と ρ_2 の間で横切る（Aが荷重直下にある場合は $\rho_1 = 0$）；荷重要素は q ρ d ρ d ϕ である。

$$d\sigma_z = \frac{3q}{2\pi} \frac{z^3 \rho}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} d\rho \, d\varphi$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{3z^3 \rho \, d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{z^3}{(\rho_1^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z^3}{(\rho_2^2 + z^2)^{3/2}}$$

A′ + B′と数値の合計

理論

$$A' + B' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{z^3}{(\rho_1^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z^3}{(\rho_2^2 + z^2)^{3/2}} \right] d\varphi$$

$$\rho_{1,2} = -r\cos\varphi \mp \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2\varphi}$$

残りの ϕ 積分の被積分関数は連続であり、**2880方向**について数値的に総和する。r = 0では $\rho_1 = 0$、$\rho_2 = R$ となり、式は**閉形式解**に帰着する。

A′ + B′の値

z/R	r/R	A′ + B′
1.0	1.0	0.33224
1.0	1.5	0.12664
2.0	0.4	0.26781
2.0	2.0	0.07334
0.5	0.8	0.64625
4.0	1.5	0.06487

重ね合わせ

理論

各円はそれぞれの**q**、**R**および地表面における中心(x_L, y_L)で定義される（モジュールでは最大8個の円）。

2つの円は**接することはできるが重なり合うことはできない**：中心間距離は少なくとも$R_1 + R_2$

地盤は弾性であるため、各円の応力は点Aから**その円の中心までのそれぞれの距離r**を用いて求め、応力を合計する

$$\Delta\sigma_z = \sum_k q_k \left(A' + B'\right)_k \qquad r_k = \sqrt{(x - x_{L,k})^2 + (y - y_{L,k})^2}$$

問題

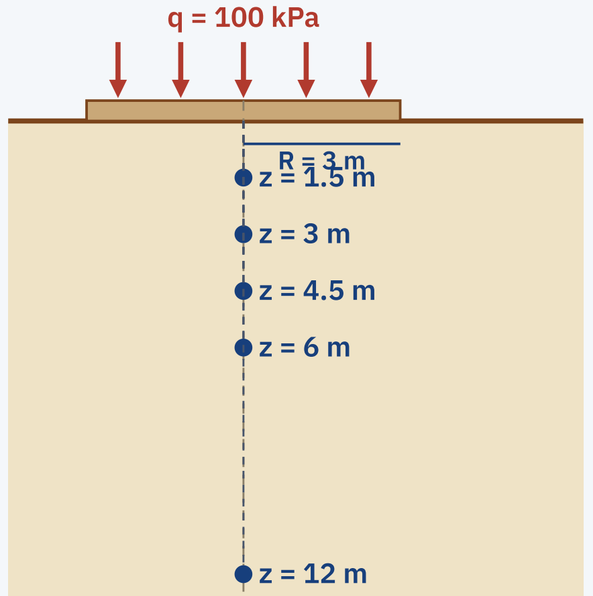
例題

求めるもの

閉形式による $\Delta\sigma_z$（まず z = 1.5 m で詳細に）、**A′ + B′**；$\Delta\sigma_z = 0.10\,q$ となる深さ。

与条件

円形	**弾性、$R = 3$ m、$q = 100$ kN/m²**
点	**円弧の軸上（$r = 0$）：$z = 1.5$; 3 ; 4.5 ; 6 ; 12 m**



解答 (1/3)

解答

1 比

$$R/z = 3/1.5 = 2 \qquad (R/z)^2 + 1 = 4 + 1 = \mathbf{5}$$

2 指数と逆数

$$5^{3/2} = 11.1803 \qquad 1/11.1803 = 0.08944$$

3 鉛直応力

$$\Delta\sigma_z = q\,(1 - 0.08944) = 100\,(0.91056) = \mathbf{91.06}\ \text{kPa}$$

z = 1.5 mの深さで**A′ + B′ = 0.91056**、**Δ σ_z = 91.06 kPa**：表面荷重の91.1%が伝達する。

解答 (2/3)

解答

z (m)	z/R	$(R/z)^2 + 1$	$[\ldots]^{3/2}$	$1 - 1/[\ldots]^{3/2}$	$\Delta\sigma_z$ (kPa)
1.5	0.50	5.000	11.1803	0.91056	**91.06**
3.0	1.00	2.000	2.8284	0.64645	**64.64**
4.5	1.50	1.444	1.7360	0.42397	**42.40**
6.0	2.00	1.250	1.3975	0.28446	**28.45**
12.0	4.00	1.062	1.0952	0.08692	**8.69**

軸上では応力が一方向に減少する：**91.1 → 8.7 kPa**（z = 1.5 m → 12 m）。z = 1.5 mの行は手計算による解であり、各行は同じ式で求められる。z = 3 mでは応力は地表面荷重の約65%、z = 12 mでは9%である。

解答 (3/3)

解答

4 Δ σ_z = 0.10 q となる深さ

$$\left[(R/z)^2+1\right]^{3/2} = 1/0.90 \;\Rightarrow\; (R/z)^2 = 1.0728 - 1 = 0.0728$$

$$z/R = 1/\sqrt{0.0728} = \mathbf{3.707} \;\Rightarrow\; z = 3\,(3.707) = \mathbf{11.12}\ \text{m}$$

Δ σ_z = 0.10 q となる深さは**11.12 m**（z/R = 3.707）である。この深さでは軸上の応力は載荷面の荷重の10分の1に低下している。半値（0.50 q）となるのはz/R = 1.305、すなわち3.91 mである。

GeoTervaで解答を確認する ↗

例題2・軸外：r = 4.5 m、z = 3 m

問題

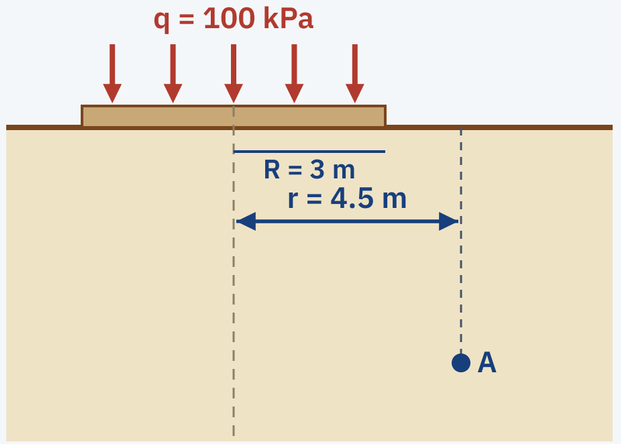
例題

与条件

円形	**弾性、$R = 3$ m、$q = 100$ kN/m²**
点A	**中心から$r = 4.5$ m（$r/R = 1.5$；荷重の外側）、$z = 3$ m（$z/R = 1$）**
手法	**極積分：まず手計算で$N = 36$方向、次にモジュールの2880方向**

求めるもの

A′ + B′および**Δ σ_z**；方向数の結果への影響。



解答 (1/3)

解答

1 直線が円と交わる距離

$$\rho_{1,2} = -r\cos\varphi \mp \sqrt{R^2 - r^2\sin^2\varphi} = -4.5\cos\varphi \mp \sqrt{9 - 20.25\sin^2\varphi}$$

2 どの方向の射線が円に当たるか

$$R^2 - r^2\sin^2\varphi \geq 0 \;\Rightarrow\; |\sin\varphi| \leq R/r = 0.6667 \;\text{ および }\; \rho > 0 \;\Rightarrow\; \cos\varphi < 0$$

Aは円の外側にあるため、円に向かう方向のみが寄与する：**138.19° < ϕ < 221.81°**。

光線は**138.19° < ϕ < 221.81°**の範囲でのみ円に当たる。**N = 36**方向をとるとϕ_i = 5°、15°、25°、…となり、このうち**8**方向のみがこの範囲に入る：145°、155°、165°、175°およびその対称の185°、195°、205°、215°。

解答 (2/3)

解答

3 1本の放射線の寄与と平均

$$F(\rho) = \frac{z^3}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{27}{(\rho^2 + 9)^{3/2}} \qquad g(\varphi) = F(\rho_1) - F(\rho_2)$$

$$A' + B' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} g(\varphi_i) \qquad \varphi_i = \left(i - \tfrac{1}{2}\right) \frac{360^\circ}{N}$$

ϕ (°)	cos ϕ	$R^2 - r^2 \sin^2\phi$	ρ_1	ρ_2	$F(\rho_1)$	$F(\rho_2)$	$g = F(\rho_1) - F(\rho_2)$
145	−0.8192	2.3380	2.1571	5.2152	0.5352	0.1240	**0.4112**
155	−0.9063	5.3832	1.7582	6.3986	0.6422	0.0765	**0.5657**
165	−0.9659	7.6435	1.5820	7.1114	0.6921	0.0587	**0.6334**
175	−0.9962	8.8462	1.5086	7.4571	0.7131	0.0520	**0.6611**

185°、195°、205°、215°の射線は175°、165°、155°、145°の対称であり、同じg値を与える。g(145°) = 0.4112、g(175°) = 0.6611。

解答 (3/3)

解答

4 合計（N = 36）

$$\sum g = 2\,(0.4112 + 0.5657 + 0.6334 + 0.6611) = 4.5427$$

$$A' + B' \approx \frac{4.5427}{36} = 0.12619 \quad \Rightarrow \quad \Delta\sigma_z \approx 100\,(0.12619) = \mathbf{12.62}\ \text{kPa}$$

5 方向数を増やすほど結果は収束する

N	6	12	24	36	72	180	720	2880
Δ σ_z (kPa)	16.856	10.556	13.200	12.619	12.541	12.688	12.667	12.664

モジュールは**2880方向**を用いる：**A′ + B′ = 0.12664**、**Δ σ_z = 12.664 kPa**。同一点に対する表の値は0.12663であり、36方向による手計算結果（12.62）はこれとわずか0.4%異なるのみである。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

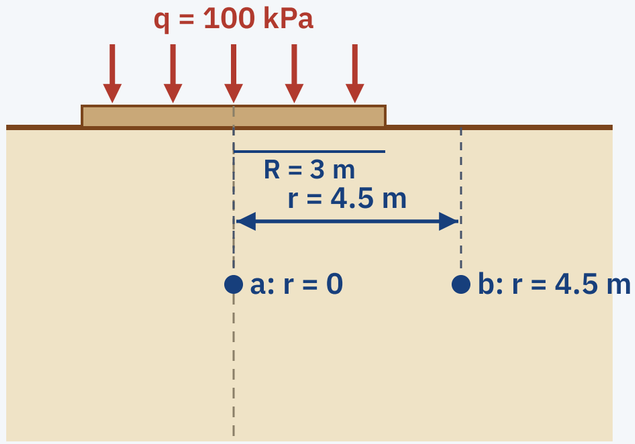
例題

求めるもの

両線上で**Δ σ_z**、(b)線上で**最大応力**とその深さ。

与条件

円形	**弾性、$R = 3$ m、$q = 100$ kN/m²**
点	**(a) 軸、$r = 0$; (b) $r = 4.5$ m ($r/R = 1.5$)**
深さ	$z = 1.5; 3; 4.5; 6; 12$ m



解答 (1/3)

解答

z (m)	z/R	(a) A′ + B′	(a) Δ σ_z (kPa)	(b) A′ + B′	(b) Δ σ_z (kPa)
1.5	0.50	0.91056	91.06	0.06044	**6.04**
3.0	1.00	0.64645	64.64	0.12664	**12.66**
4.5	1.50	0.42397	42.40	0.13793	**13.79**
6.0	2.00	0.28446	28.45	0.12646	**12.65**
12.0	4.00	0.08692	8.69	0.06487	**6.49**

軸上：91.1 → 8.7 kPa、一方向に減少する。**荷重の外側**（**r = 4.5 m**）：6.04 → 13.79 → 6.49 kPa；まず**増大**し、その後減少する：荷重は深さとともに側方へ広がる。

各行は2880方向のA′ + B′の値である；(b)列のz = 3 mの行は例題2の結果である。

解答 (2/3)

解答

1 r/R = 1.5の線上でのA′ + B′、深さに対する分布

z/R	z (m)	A′ + B′	Δ σ_z (kPa)
1.00	3.00	0.12664	**12.66**
1.20	3.60	0.13569	**13.57**
1.41	4.23	0.13833	**13.83**
1.60	4.80	0.13670	**13.67**
1.80	5.40	0.13238	**13.24**
2.00	6.00	0.12646	**12.65**

r/R = 1.5の線上では、**最大応力は深さz ≈ 4.23 m**（z/R = 1.41）で生じ、**13.83 kPa**である：載荷領域の外側では応力は深さ方向にある深さで最大値に達した後、減少する。

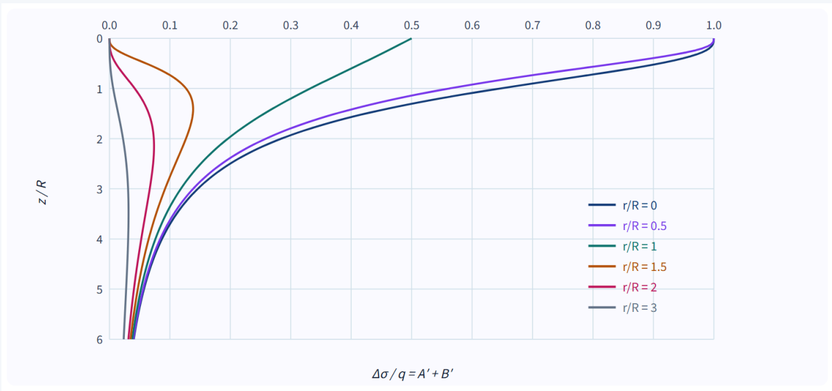
解答 (3/3)

解答

2 外向きの最大値

r/R	最大のA′ + B′	深さ z/R
1.5	0.1383	1.41
2.0	0.0737	2.15
3.0	0.0317	3.48

点が円から遠ざかるほど最大応力は**より深く、より小さく**なる：r/R = 1.5ではz/R = 1.41、r/R = 3ではz/R = 3.48。



GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

例題

与条件

表	$A' + B'$の値：$z/R = 0.25 \ldots 6$；$r/R = 0 \ldots 3$
別の円	$R = 5$ m、$q = 120$ kN/m²；点 $r = 7.5$ m、$z = 5$ m

求めるもの

A′ + B′の表；第2円では $\Delta \sigma_z$（表から）および直接計算による。

解答 (1/2)

解答

z/R \ r/R	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0
0.25	0.9857	0.9658	0.4596	0.0142	0.0016	0.0001
0.50	0.9106	0.8396	0.4175	0.0604	0.0105	0.0010
1.00	0.6464	0.5622	0.3322	0.1266	0.0418	0.0062
1.50	0.4240	0.3750	0.2562	0.1379	0.0650	0.0146
2.00	0.2845	0.2589	0.1960	0.1265	0.0733	0.0225
3.00	0.1462	0.1384	0.1181	0.0919	0.0666	0.0309
4.00	0.0869	0.0840	0.0761	0.0649	0.0526	0.0311
6.00	0.0403	0.0396	0.0377	0.0349	0.0314	0.0236

r/R = 0の列は閉形式解である。**r/R = 1**では値は地表に近づくにつれて0.5に近づく（z/R = 0.25で0.4596）。**r/R ≥ 1.5**の列では値はまず増加し、その後減少する。表中の各数値は2880方向の積分である。

解答 (2/2)

解答

1 比

$$\frac{z}{R} = \frac{5}{5} = 1.0 \qquad \frac{r}{R} = \frac{7.5}{5} = 1.5$$

2 表から係数と応力

$$A' + B' \left(z/R = 1;\ r/R = 1.5\right) = 0.12664$$

$$\Delta\sigma_z = q\left(A' + B'\right) = 120\left(0.12664\right) = \mathbf{15.20}\ \text{kPa}$$

Δ σ$_z$/qは**z/R**と**r/R**のみに依存する：R = 5 mの円では同じ比により、例題2のR = 3 mの円の係数（**0.12664**）が得られる；応力はqのみでスケールされる（15.20 kPa）。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

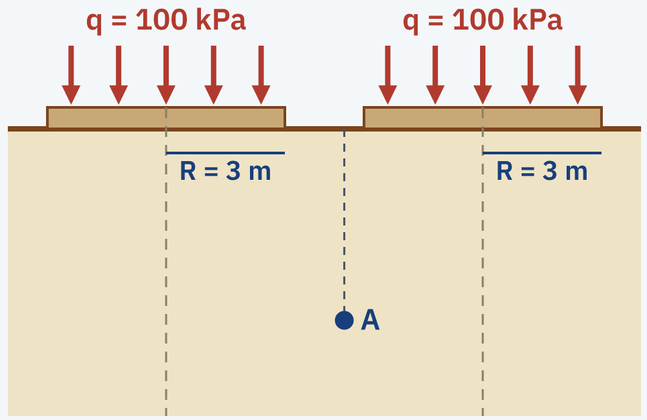
例題

与条件

円1	$R = 3$ m、$q = 100$ kN/m²、中心 $x = 0$
円2	$R = 3$ m、$q = 100$ kN/m²、中心 $x = 8$ m
点A	$x = 4.5$ m、$y = 0$；$z = 3$ m（さらに1.5；4.5；6；12 m）

求めるもの

2つの円それぞれ単独および同時載荷時の $\Delta\sigma_z$；深さ方向分布。



解答 (1/2)

解答

1 重なり照査（円は重ならない；間隔は2 m）と距離

$$d = 8\ \text{m} \ \geq R_1 + R_2 = 6\ \text{m}$$

$$r_1 = 4.5\ \text{m}\ (r_1/R = 1.5) \qquad r_2 = 8 - 4.5 = 3.5\ \text{m}\ (r_2/R = 1.1667)$$

2 各円の影響係数と応力（z/R = 1）

$$A' + B'_{(1)} = 0.12664 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z(1)} = 100\,(0.12664) = 12.664\ \text{kPa}$$

$$A' + B'_{(2)} = 0.25049 \ \Rightarrow\ \Delta\sigma_{z(2)} = 100\,(0.25049) = 25.049\ \text{kPa}$$

3 重ね合わせ

$$\Delta\sigma_z = \Delta\sigma_{z(1)} + \Delta\sigma_{z(2)} = 12.664 + 25.049 = \mathbf{37.714}\ \text{kPa}$$

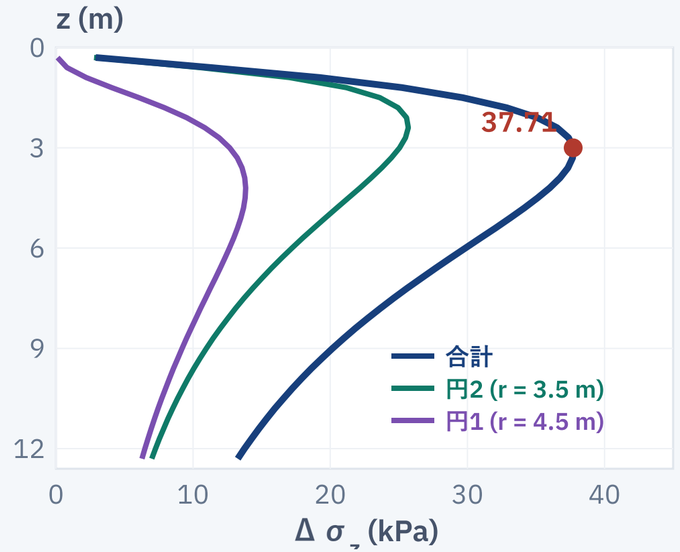
Aは第2円に近い（3.5 mおよび4.5 m）：**円2が全体の66%**を与える。合計Δ σ_z = **37.71 kPa**；単一円の値は12.66 kPaであった。

解答 (2/2)

解答

z (m)	z/R	r_1/R = 1.5	r_2/R = 1,167	$\Delta\sigma_{z(1)}$	$\Delta\sigma_{z(2)}$	合計
1.5	0.50	0.06044	0.23608	6.04	23.61	**29.65**
3.0	1.00	0.12664	0.25049	12.66	25.05	**37.71**
4.5	1.50	0.13793	0.21324	13.79	21.32	**35.12**
6.0	2.00	0.12646	0.17204	12.65	17.20	**29.85**
12.0	4.00	0.06487	0.07258	6.49	7.26	**13.75**

z = 3 mにおける全応力は**37.71 kPa**である。円2の寄与は深さとともに減少するが、円1の寄与は4.5 mまで増加する。結果は、各円のそれぞれの距離rで求めた値の合計である。



GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

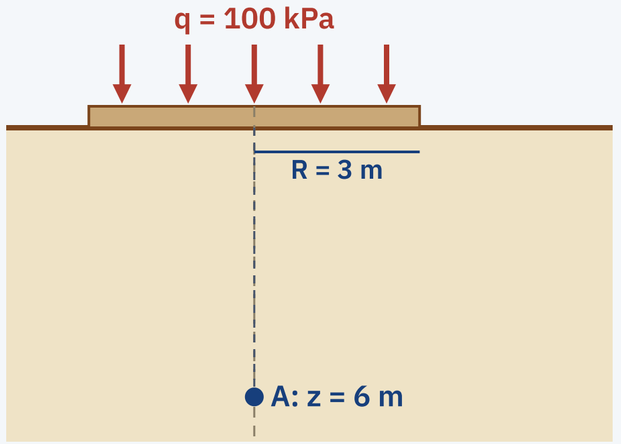
例題

与条件

円形	$R = 3$ m、$q = 100$ kN/m²；全荷重$Q = q\pi R^2 = 2827.4$ kN
集中荷重	同じQ円の中心において：$\Delta\sigma_z = Q\, I_1/z^2$、$I_1 = \frac{3}{2\pi}\left[(r/z)^2+1\right]^{-5/2}$
点	軸上（$r=0$）および$r = 2R$において；$z/R = 1$；2；3；5；10

求めるもの

二つの解の比。集中荷重近似はどの深さ以深で許容できるか。



解答 (1/2)

解答

1 全荷重

$$Q = q\pi R^2 = 100\,\pi\,(3)^2 = \mathbf{2{,}827.4}\ \text{kN}$$

2 集中荷重（Boussinesq）、軸上r = 0

$$\Delta\sigma_z = \frac{Q}{z^2}\,\frac{3}{2\pi} = \frac{2{,}827.4}{36}\,(0.4775) = \mathbf{37.50}\ \text{kPa}$$

3 円形（閉形式解、z = 6 m）

$$\Delta\sigma_z = 100\left(1 - \frac{1}{(0.25+1)^{3/2}}\right) = \mathbf{28.45}\ \text{kPa}$$

z = 2Rの深さでは集中荷重近似は応力を**1.318倍**（31.8%）大きく与える：37.5 kPaではなく28.4 kPaとなる。

解答 (2/2)

解答

r/R	z/R	円形荷重 $\Delta\sigma_z$ (kPa)	集中荷重 $\Delta\sigma_z$ (kPa)	集中荷重 / 円形
0	1	64.645	150.000	**2.320**
0	2	28.446	37.500	**1.318**
0	3	14.619	16.667	**1.140**
0	5	5.713	6.000	**1.050**
0	10	1.481	1.500	**1.013**
2	1	4.181	2.683	**0.642**
2	2	7.334	6.629	**0.904**
2	3	6.663	6.647	**0.997**
2	5	4.048	4.140	**1.023**
2	10	1.346	1.360	**1.010**

軸上z/R = 1では、集中荷重は応力を**2.32倍**過大評価する。z = 5Rでは差は5.0%、z = 10Rでは1.3%にとどまる。r = 2Rでは近似は地表面付近で**過小**（0.64）となるが、z ≥ 3Rでは差は3%を超えない。

GeoTervaで解答を確認する ↗

まとめ

ポイントのまとめ

軸上： $\Delta\sigma_z = q\{1 - 1/[(R/z)^2 + 1]^{3/2}\}$。z = 1.5 mでは91.06 kPa（A′ + B′ = 0.91056）。$\Delta\sigma_z = 0.10\,q$となる深さは **3.71R**（11.12 m）。

一般点： $\Delta\sigma_z = q\,(A' + B')$。A′ + B′はz/Rとr/Rのみに依存する。**例（r = 4.5 m、z = 3 m）：** A′ + B′ = 0.12664、**$\Delta\sigma_z$ = 12.664 kPa**

計算： Boussinesqの積分をA点における極座標で；ρ は閉形式、ϕ は数値（2880方向）。手計算で36方向では12.62 kPa

載荷域の外側（r/R = 1.5）では応力がまず増加する：最大値は z ≈ 4.23 m で 13.83 kPa；縁の直下では地表で 0.5 q

2つの円： 応力は各円のそれぞれの距離rを用いて求め、合計する：12.66 + 25.05 = 37.71 kPa。**集中荷重**による近似は荷重付近で誤差が大きい（z = 2Rで×1.32）が、z ≥ 5Rでは妥当である

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Ahlvin, R.G. and Ulery, H.H. (1962). Tabulated values for determining the complete pattern of stresses, strains, and deflections beneath a uniform circular load on a homogeneous half space. Highway Research Bulletin 342, 1–13.

注記

数値例はすべてモジュール自身の計算エンジンで生成したものであり、モジュールは同じ値を与える。モジュールは R = 3 m、q = 100 kN/m²の円形荷重およびA点（r = 4.5 m、z = 3 m）で開く。

GeoTerva

オンライン地盤工学計算

理論から実務へ

円（q、R、中心）、点Aおよび深さをGeoTervaに入力する；モジュールはA′ + B′、Δ σ_zの値、等応力曲線、深さ方向分布、手順ごとの解答およびレポートをまとめて出力する。

モジュールを開く →

理論ページ →

スマートフォンで開く
お試しモジュールは登録不要です。

講義で使用したい場合：info@geoterva.com