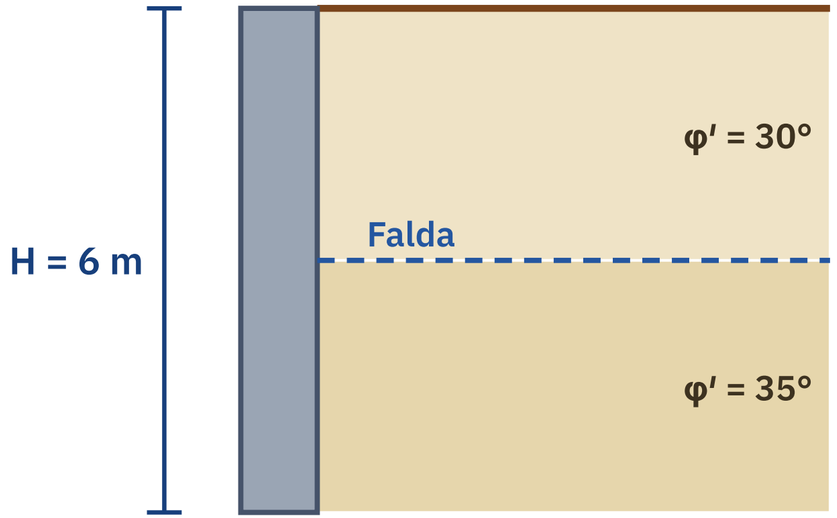
Lezione di geotecnica · Spinta delle terre

Spinta delle terre di Rankine

Lezione: spinta attiva e passiva delle terre agente su un muro verticale privo di attrito; terrapieno incoerente e coesivo, sovraccarico, falda freatica e terreno stratificato; un esempio di calcolo per ciascun argomento.

- Stati attivo e passivo
- $K_a = \tan^2(45° - \varphi'/2)$
- Sovraccarico e falda freatica
- Terrapieno stratificato
- Fessura di trazione



Introduzione

Che cosa si impara in questa lezione?

- con il cerchio di Mohr dello stato attivo e passivo, **perché** $\sigma'_a = K_a\sigma'_o - 2c'\sqrt{K_a}$
- Calcolare i coefficienti K_a e K_p da φ'; confrontarli con il coefficiente a riposo K_0
- Determinare la **forza** e l'**altezza di applicazione** dal triangolo delle pressioni in un rilevato incoerente
- Vedere come il sovraccarico, la falda freatica e i confini degli strati modificano il diagramma
- in terreno c'–φ' e $\varphi = 0$, a distinguere la **zona di trazione** e la forza con / senza fessura
- Calcolare la resistenza passiva e sapere di quanto deve spostarsi il muro

SVOLGIMENTO DELLA LEZIONE

Ogni argomento è trattato in **tre passaggi**:

1 · **Teoria**: qual è la regola e perché è così?

2 · **Traccia**: dati e richiesto

3 · **Soluzione**: passo per passo, con i numeri

Le forze sono per unità di lunghezza del muro (kN/m); le pressioni sono in kPa, tutte le tensioni sono efficaci.

Equilibrio plastico e cerchio di Mohr

TEORIA

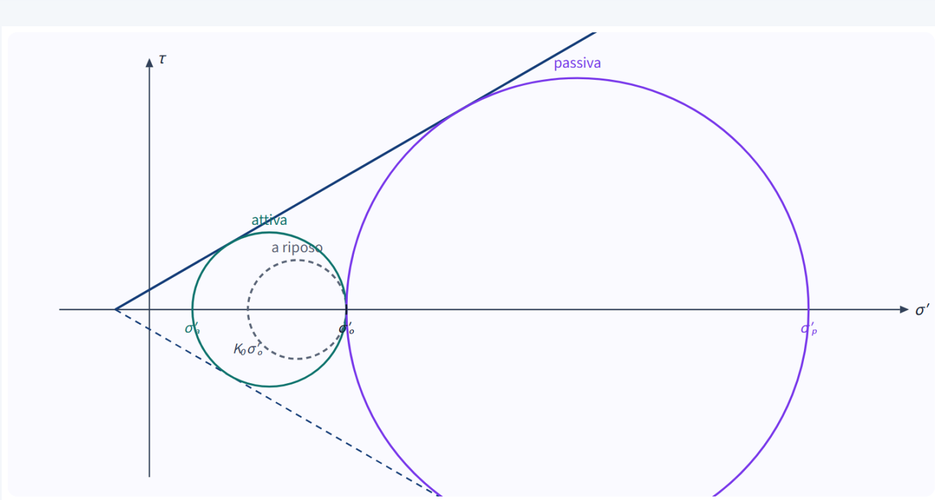
Rankine (1857) esaminò un ammasso di terreno in cui ogni punto è al limite della rottura. Se un muro verticale e privo di attrito **si allontana dal terreno**, la tensione orizzontale diminuisce rispetto al valore a riposo $K_0\sigma'_0$ e il cerchio di Mohr diventa tangente all'inviluppo di rottura: **stato attivo**. Se il muro **viene spinto contro il terreno**, la tensione orizzontale supera σ'_0: **stato passivo**.

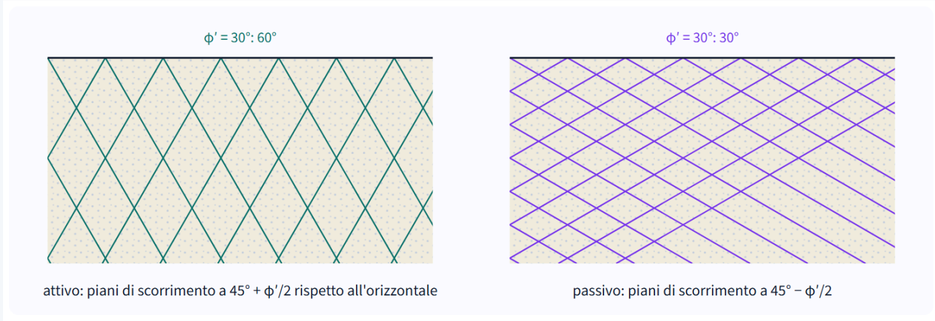
$$\sigma'_a = \sigma'_o \tan^2\left(45^\circ - \frac{\varphi'}{2}\right) - 2c' \tan\left(45^\circ - \frac{\varphi'}{2}\right)$$

$$\sigma'_p = \sigma'_o \tan^2\left(45^\circ + \frac{\varphi'}{2}\right) + 2c' \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi'}{2}\right)$$

σ'_0 è la tensione efficace verticale (pressione di confinamento); a tergo del muro la tensione principale massima è verticale (nel caso attivo) oppure orizzontale (nel caso passivo).

I piani di scorrimento formano un angolo di 45° + φ′/2 con l'orizzontale nel caso attivo e di 45° − φ′/2 nel caso passivo.





attivo: piani di scorrimento a 45° + ϕ′/2 rispetto all'orizzontale

passivo: piani di scorrimento a 45° − ϕ′/2

Coefficienti K_a e K_p

TEORIA

Dalla geometria del cerchio di Mohr si definiscono due coefficienti; sono l'uno il reciproco dell'altro:

$$K_a = \tan^2\left(45^\circ - \frac{\varphi'}{2}\right) = \frac{1-\sin\varphi'}{1+\sin\varphi'} \qquad K_p = \tan^2\left(45^\circ + \frac{\varphi'}{2}\right) = \frac{1}{K_a}$$

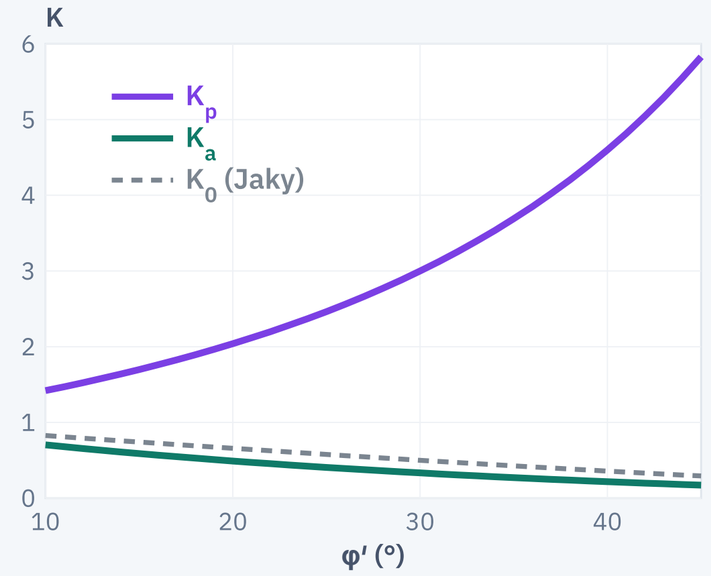
$$\sigma'_a = K_a\sigma'_o - 2c'\sqrt{K_a} \qquad \sigma'_p = K_p\sigma'_o + 2c'\sqrt{K_p}$$

φ′	25°	30°	35°	40°
K_a	0.406	0.333	0.271	0.217
K_p	2.464	3.000	3.690	4.599
K_0 (Jaky)	0.577	0.500	0.426	0.357

$K_a < K_0 < K_p$: la spinta a riposo, prima che il muro si muova, è compresa tra i due limiti.

K_p cresce rapidamente con φ′: per φ′ = 40° la spinta passiva è più di 20 volte quella attiva.

K_a, K_p e K_0 – φ′



Traccia

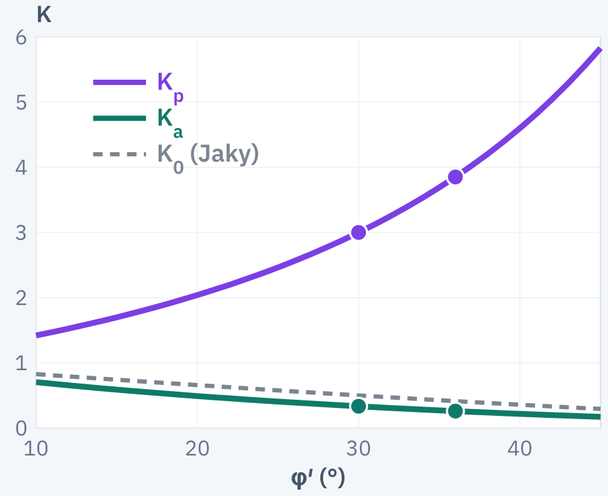
ESEMPIO

Dati

Terreno	**sabbia incoerente, $c' = 0$; due casi: $\varphi' = 36°$ e $\varphi' = 30°$**
Muro	**verticale, senza attrito; superficie del terrapieno orizzontale**

RICHIESTO

K_a, K_p e **K_0** secondo Jaky; verificare l'ordinamento dei tre.



Soluzione

SOLUZIONE

1 φ′ = 36°

$$K_a = \tan^2(45^\circ - 18^\circ) = \tan^2 27^\circ = \mathbf{0.2596} \qquad K_p = \tan^2 63^\circ = \frac{1}{K_a} = \mathbf{3.852}$$

2 φ′ = 30°

$$K_a = \frac{1 - \sin 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} = \frac{0.5}{1.5} = \mathbf{0.3333} \qquad K_p = \frac{1 + \sin 30^\circ}{1 - \sin 30^\circ} = \mathbf{3}$$

3 Coefficiente a riposo (Jaky): $K_0 = 1 - \sin\varphi'$

$$\varphi' = 36^\circ:\ K_0 = 1 - 0.5878 = \mathbf{0.4122} \qquad \varphi' = 30^\circ:\ K_0 = 1 - 0.5 = \mathbf{0.50}$$

In entrambi i terreni **$K_a < K_0 < K_p$**; $K_a \cdot K_p = 1$. Quando φ′ passa da 30° a 36°, K_a passa da 0.333 → 0.260 e K_p da 3.00 → 3.85.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Triangolo delle pressioni, forza e altezza del punto di applicazione

TEORIA

Per c′ = 0 e terrapieno con superficie orizzontale, la spinta cresce **linearmente** con la profondità; il diagramma è triangolare. La forza per unità di lunghezza del muro è l'area del triangolo e il suo punto di applicazione è il baricentro (H/3 sopra la base):

$$\sigma'_a = K_a \gamma z \qquad P_a = \tfrac{1}{2} K_a \gamma H^2 \qquad \bar{z} = \frac{H}{3}$$

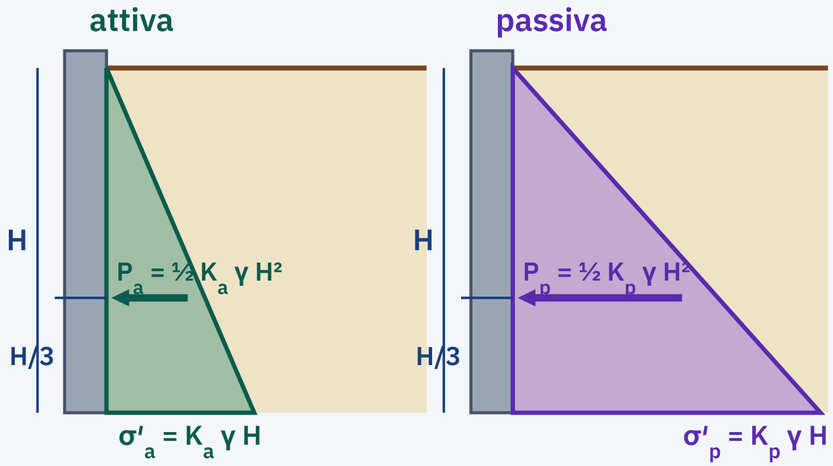
$$\sigma'_p = K_p \gamma z \qquad P_p = \tfrac{1}{2} K_p \gamma H^2 \qquad \bar{z} = \frac{H}{3}$$

La forza cresce con **H²**: raddoppiando l'altezza del muro la forza quadruplica.

La forza è perpendicolare al muro e orizzontale (muro senza attrito, δ′ = 0).

Unità: γ in kN/m³, H in m dà P in kN/m.

DUE STATI LIMITE



Traccia

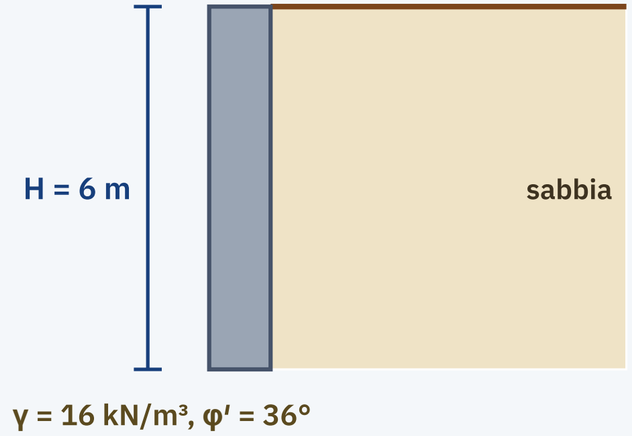
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 6$ **m, verticale, senza attrito; superficie del terrapieno orizzontale**
Terreno	**sabbia asciutta:** $\gamma = 16\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 36°,\ c' = 0$

RICHIESTO

Le forze **attiva** e **passiva** P_a, P_p con la quota di applicazione; inoltre la forza a riposo P_0.



Soluzione

SOLUZIONE

1 Coefficienti (Esempio 1): $K_a = 0.2596$, $K_p = 3.852$

$$\sigma'_a(6) = K_a \gamma H = 0.2596(16)(6) = \mathbf{24.92}\ \text{kPa}$$

2 Forza attiva (area del triangolo)

$$P_a = \tfrac{1}{2}\sigma'_a(6)\, H = \tfrac{1}{2}(24.92)(6) = \mathbf{74.77}\ \text{kN/m}$$

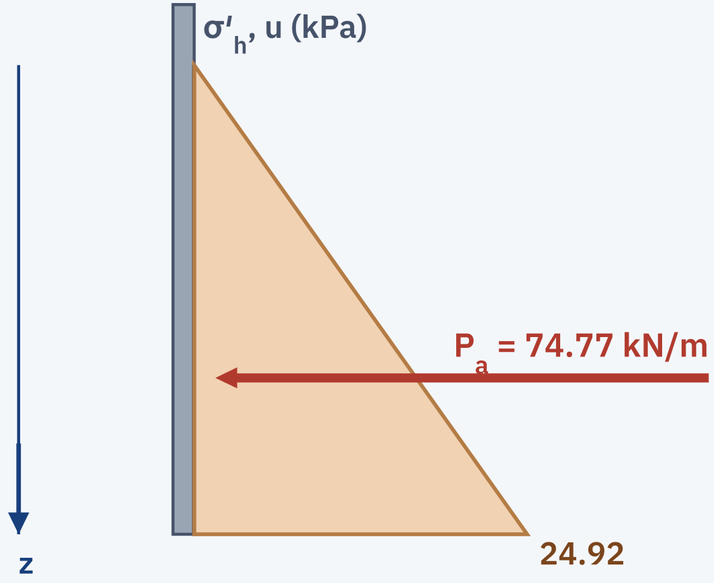
$$\bar{z} = \tfrac{6}{3} = \mathbf{2.0\ m}$$

3 Forza passiva

$$P_p = \tfrac{1}{2} K_p \gamma H^2 = \tfrac{1}{2}(3.852)(16)(36) = \mathbf{1{,}109.3}\ \text{kN/m}$$

$$\bar{z} = \tfrac{6}{3} = \mathbf{2.0\ m}$$

P_a = **74.77 kN/m**, P_p = **1,109.3 kN/m**, entrambe a 2.0 m sopra la base. La resistenza passiva è **14.8 volte** la spinta attiva; la spinta a riposo P_0 = 118.72 kN/m si colloca tra le due.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Due effetti che modificano il diagramma

TEORIA

Un **sovraccarico uniforme q** aggiunge la stessa pressione a ogni profondità: si aggiunge un rettangolo. **Al di sotto della falda freatica** la tensione efficace si calcola con $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$ e in aggiunta si somma la pressione dell'acqua $u = \gamma_w(z - H_1)$ **con il suo valore pieno**:

$$P_a = K_a q H + \tfrac{1}{2} K_a \gamma H_1^2 + K_a \gamma H_1 H_2 + \tfrac{1}{2}\left(K_a \gamma' + \gamma_w\right) H_2^2$$

Componente	Forza	Braccio (dalla base)
Sovraccarico (rettangolare)	$K_a\, q\, H$	$H/2$
Triangolo superiore	$\tfrac{1}{2} K_a\, \gamma\, H_1^2$	$H_2 + H_1/3$
Rettangolo inferiore	$K_a\, \gamma\, H_1\, H_2$	$H_2/2$
Triangolo inferiore (efficace)	$\tfrac{1}{2} K_a\, \gamma'\, H_2^2$	$H_2/3$
Pressione dell'acqua	$\tfrac{1}{2} \gamma_w\, H_2^2$	$H_2/3$

Prendendo il momento delle componenti rispetto al punto di base si ottiene l'altezza della risultante: $\bar{z} = \Sigma P_i z_i \,/\, \Sigma P_i$.

La spinta passiva si determina con le stesse componenti utilizzando K_p; la pressione dell'acqua è la stessa.

PERCHÉ L'ACQUA È COSÌ INFLUENTE?

La pressione dell'acqua **non dipende dall'angolo di attrito**: si moltiplica per 1 anziché per K_a. Poiché nella zona immersa $\gamma' \approx \gamma_{sat}/2$, la spinta efficace delle terre diminuisce, ma la pressione dell'acqua la compensa ampiamente.

Traccia

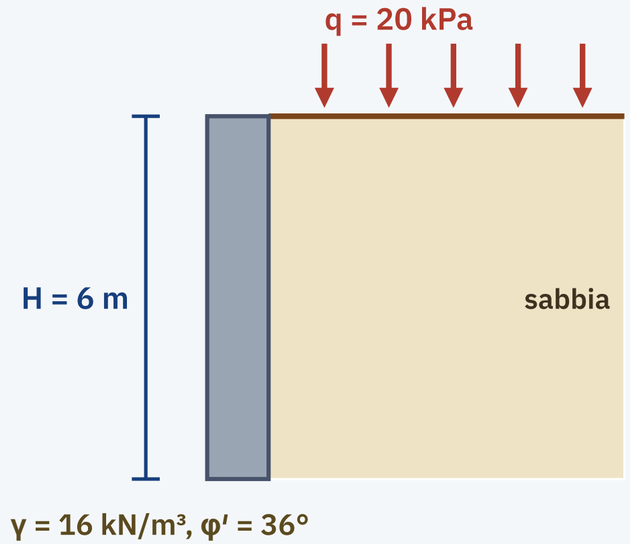
ESEMPIO

RICHIESTO

P_a e **$\bar{z}$**; effetto del sovraccarico.

Dati

Muro e terreno	**Il muro dell'Esempio 2: $H = 6$ m, $\gamma = 16\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 36°$, asciutto**
Sovraccarico	**carico uniformemente distribuito $q = 20$ kPa sulla superficie del terrapieno**



Soluzione

SOLUZIONE

1 Pressione: $K_a q$ in sommità, $K_a q + K_a \gamma H$ alla base

$$\sigma'_a(0) = 0.2596(20) = 5.19 \text{ kPa}$$
$$\sigma'_a(6) = 5.19 + 24.92 = \mathbf{30.12} \text{ kPa}$$

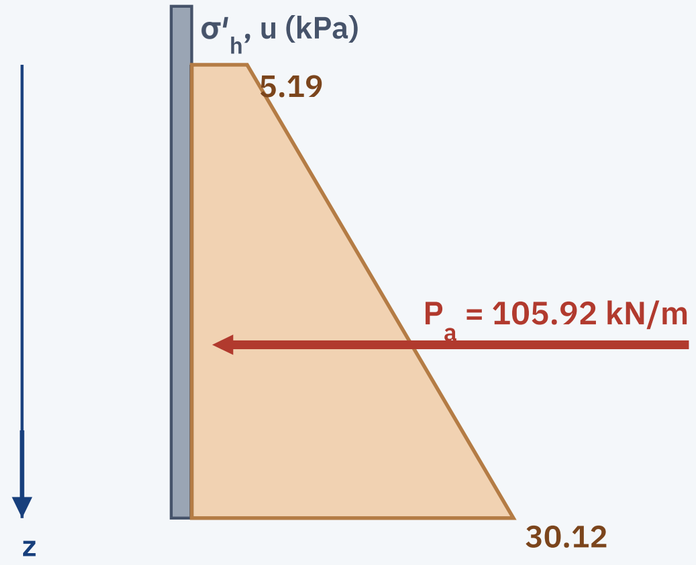
2 Forze: rettangolo (braccio 3.0 m) + triangolo (braccio 2.0 m)

$$P_q = K_a q H = 5.19(6) = 31.15 \text{ kN/m}$$
$$P_\gamma = \tfrac{1}{2} K_a \gamma H^2 = 74.77 \text{ kN/m}$$

3 Risultante e altezza di applicazione

$$P_a = 31.15 + 74.77 = \mathbf{105.92} \text{ kN/m}$$
$$\bar{z} = \frac{31.15(3) + 74.77(2)}{105.92} = \mathbf{2.29} \text{ m}$$

La forza del sovraccarico l'ha aumentata di 31.15 kN/m (42%); il punto di applicazione è salito da **2.00 m a 2.29 m** (il braccio del rettangolo è H/2).



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

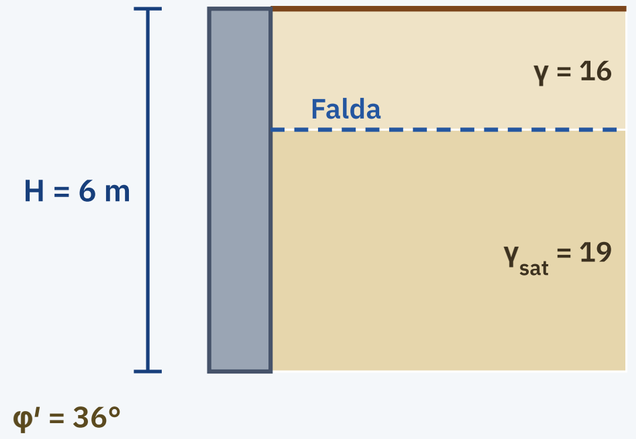
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 6$ m, verticale; terrapieno di sabbia con superficie orizzontale, senza sovraccarico
Terreno	in sommità $\gamma = 16\ \mathrm{kN/m^3}$ (asciutto); falda freatica a 2 m di profondità; in basso $\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3}$; $\varphi' = 36°$

RICHIESTO

La **forza totale** dovuta alla spinta efficace delle terre e alla pressione dell'acqua e la sua altezza di applicazione; l'effetto dell'acqua.



Soluzione

SOLUZIONE

1 Tensioni efficaci (z = 2 e 6 m)

$$\sigma'_o(2) = 16(2) = 32\ \text{kPa}$$

$$\sigma'_o(6) = 32 + 4(19 - 9.81) = 68.76\ \text{kPa}$$

$$\sigma'_a(6) = K_a\sigma'_o(6) = \mathbf{17.85}\ \text{kPa}$$

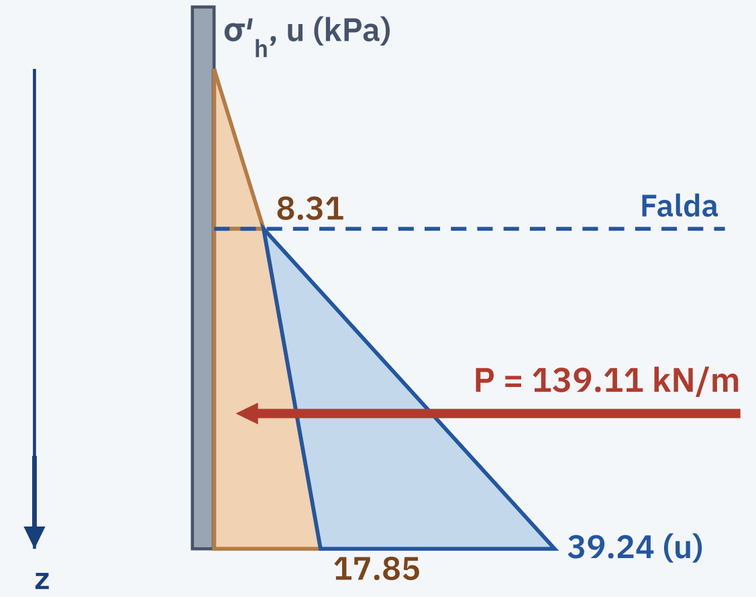
2 Pressione dell'acqua alla base: u = γ_w(6 − 2)

$$u(6) = 9.81(4) = \mathbf{39.24}\ \text{kPa}$$

3 Forze: triangolo superiore · rettangolo inferiore · triangolo inferiore · acqua

$$P_a = 8.31 + 33.23 + 19.09 = 60.63\ \text{kN/m}\ (\text{terreno})$$

$$P_w = \tfrac{1}{2}(39.24)(4) = 78.48\ \text{kN/m}$$



Totale = 60.63 + 78.48 = **139.11 kN/m**, **z̄ = 1.69 m**. La forza del muro asciutto era 74.77 kN/m: la forza dell'acqua l'ha portata a **1.9 volte**.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Ogni strato utilizza il proprio valore di K

TEORIA

Se il riporto è costituito da più strati, la **tensione efficace verticale σ'_o è continua** (non presenta salti al confine tra gli strati); tuttavia, poiché la tensione orizzontale $\sigma'_a = K_i\sigma'_o$ utilizza in ciascuno strato il proprio valore di K_i, **il diagramma presenta un salto al confine in cui varia φ'**:

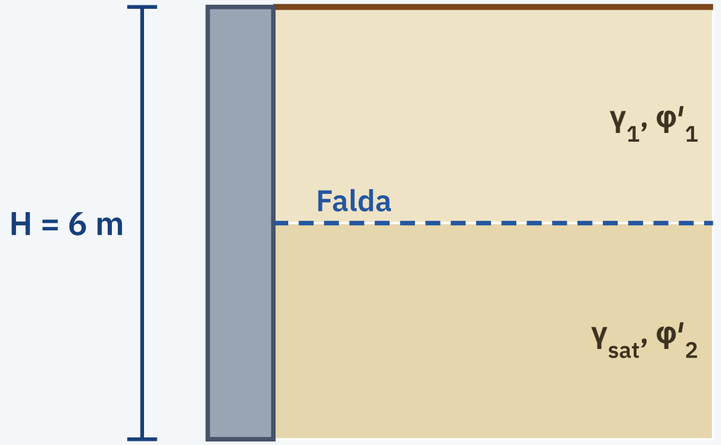
$$\sigma'_a = K_{a,i}\,\sigma'_o(z) \qquad \sigma'_o(z) = q + \sum \gamma_i h_i \;\; (\gamma' \text{ in zona immersa})$$

Al confine si leggono due valori: il valore $K_{a,1}\sigma'_o$ dello strato superiore e il valore $K_{a,2}\sigma'_o$ di quello inferiore. Se il φ' dello strato inferiore è elevato, la pressione **diminuisce** verso il basso.

La falda freatica è trattata come un confine di strato: inizia γ', si aggiunge u.

La forza si ottiene sommando le aree di ciascun segmento (triangolo / rettangolo), e la linea d'azione prendendo i momenti.

RIPORTO STRATIFICATO E ACQUA



Traccia

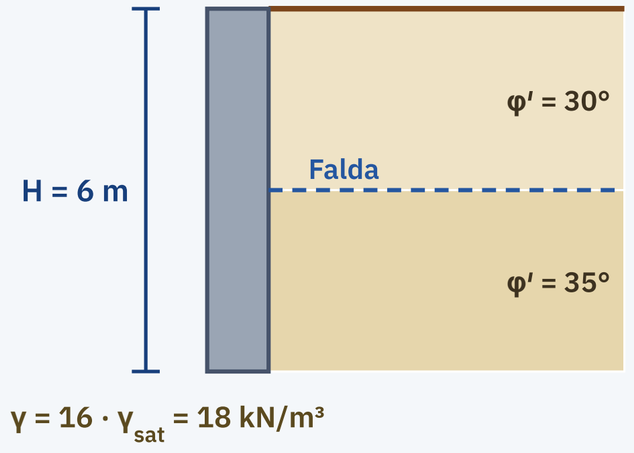
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 6$ **m, verticale, senza attrito; superficie orizzontale; assenza di sovraccarico**
Strato superiore (0–3 m)	**sabbia:** $\gamma = 16\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30°$
Strato inferiore (3–6 m)	**sabbia:** $\gamma_{sat} = 18\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 35°$
Falda freatica	**A 3 m di profondità (al confine tra gli strati)**

RICHIESTO

La **forza** totale (terreno + acqua) e l'**altezza di applicazione**. Il muro di questo esempio è quello che si apre nel modulo.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Coefficienti

$$K_{a,1} = \tfrac{1}{3} = \mathbf{0.3333} \qquad K_{a,2} = \tan^2 27.5^\circ = \mathbf{0.2710}$$

2 alla profondità di 3 m (confine): $\sigma'_o = 16(3) = 48$ kPa

$$\sigma'_a = 0.3333(48) = \mathbf{16.00}\ \text{kPa (sommità)}$$

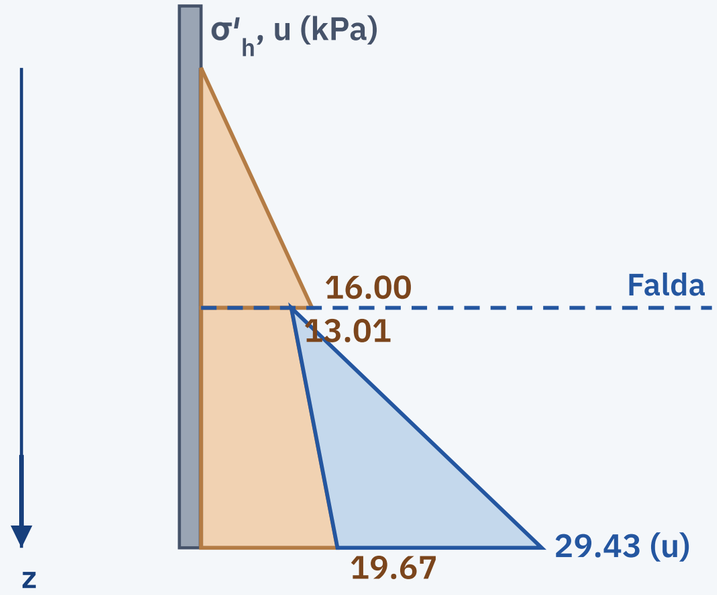
$$\sigma'_a = 0.2710(48) = \mathbf{13.01}\ \text{kPa (base)}$$

3 A 6 m di profondità (base)

$$\sigma'_o = 48 + 3(18 - 9.81) = 72.57\ \text{kPa} \qquad u = 9.81(3) = \mathbf{29.43}$$

$$\sigma'_a = 0.2710(72.57) = \mathbf{19.67}\ \text{kPa}$$

Al confine il diagramma salta da 16.00 → 13.01 kPa (variazione di φ′); σ'_o rimane continuo.



Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

4 Forze: triangolo superiore · rettangolo inferiore · triangolo inferiore · acqua

$$P = \tfrac{1}{2}(3)(16.00) + 3(13.01) + \tfrac{1}{2}(3)(6.66) + \tfrac{1}{2}(3)(29.43)$$
$$= 24.00 + 39.02 + 9.99 + 44.14 = \mathbf{117.15}\ \mathrm{kN/m}$$

5 Altezza di applicazione: momento rispetto al punto della base (bracci 4; 1.5; 1; 1 m)

$$\bar{z} = \frac{24.00(4) + 39.02(1.5) + 9.99(1) + 44.14(1)}{117.15} = \mathbf{1.78}\ \mathrm{m}$$

La forza totale è pari a **117.15 kN/m**, a **1.78 m** sopra la base; il terreno contribuisce per 73.01 kN/m e l'acqua per 44.14 kN/m. L'acqua rappresenta circa il 38% ed è la componente maggiore della forza.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Zona tesa e fessure di trazione

TEORIA

In un terreno c′–φ′ la spinta attiva è **negativa** in sommità (il terreno tende a tirare il muro); la profondità alla quale la spinta si annulla:

$$z_0 = \frac{2c'}{\gamma\sqrt{K_a}} - \frac{q}{\gamma} \qquad \varphi = 0 :\ z_0 = \frac{2c_u}{\gamma}$$

Il terreno non può sostenere trazione: con il tempo si aprono **fessure di trazione** fino alla profondità z_0. La forza è data solo dalla parte positiva del diagramma:

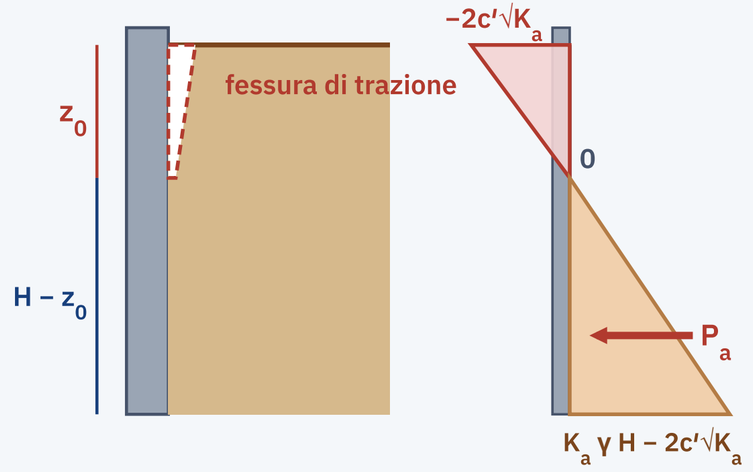
$$P_a = \tfrac{1}{2}\left[K_a(q+\gamma H) - 2c'\sqrt{K_a}\right](H - z_0)$$

Prima della fessurazione si considera l'intero diagramma (forza minore): $P_a = \tfrac{1}{2}K_a\gamma H^2 - 2c'\sqrt{K_a}\,H + K_a q H$.

> Nel progetto è determinante la forza in condizioni fessurate (maggiore); se la fessura si riempie d'acqua, si aggiunge anche la forza idrostatica $\gamma_w z_0^2/2$.

> L'altezza d'azione è il baricentro del triangolo positivo: $(H - z_0)/3$.

ZONA DI TRAZIONE



Pressione negativa: alla profondità z_0 dal sommo non vi è contatto con il muro.

Traccia

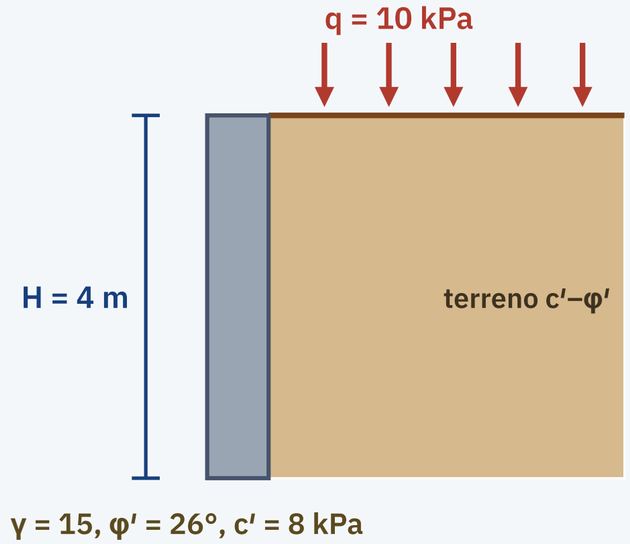
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 4$ **m, verticale, senza attrito; superficie orizzontale**
Terreno	$\gamma = 15\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 26°,\ c' = 8$ **kPa**
Sovraccarico	$q = 10$ **kPa**

RICHIESTO

Profondità di trazione z_0, spinta attiva in presenza di fessura e relativa altezza di applicazione; confronto con la spinta in assenza di fessura.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Coefficiente: $K_a = \tan^2(45° - 13°)$

$$K_a = \tan^2 32^\circ = \mathbf{0.3905} \qquad \sqrt{K_a} = 0.6249$$

$$2c'\sqrt{K_a} = 2(8)(0.6249) = 10.00\ \text{kPa}$$

2 Pressione alla sommità e alla base

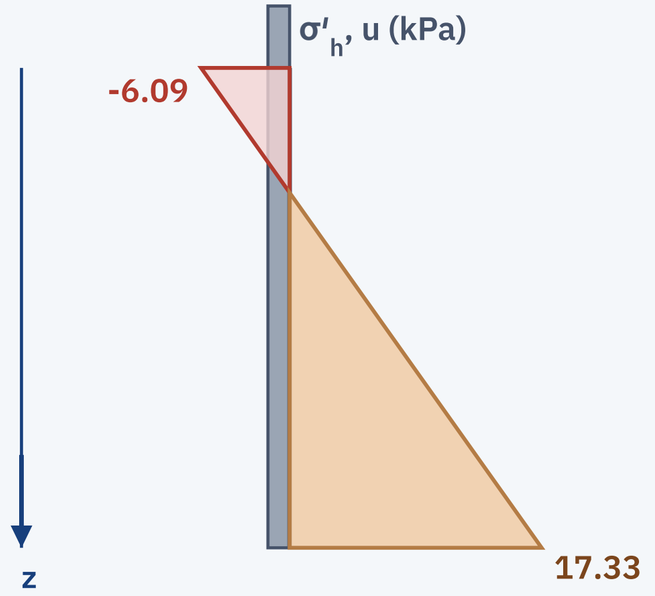
$$\sigma'_a(0) = 0.3905(10) - 10.00 = -\mathbf{6.09}\ \text{kPa (trazione)}$$

$$\sigma'_a(4) = 0.3905(10 + 15 \cdot 4) - 10.00 = \mathbf{17.33}\ \text{kPa}$$

3 Profondità della zona tesa (dove la pressione è nulla)

$$z_0 = \frac{2(8)}{15(0.6249)} - \frac{10}{15}$$

$$= 1.707 - 0.667 = \mathbf{1.04}\ \text{m}$$



Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

4 Forza nel calcestruzzo fessurato (solo triangolo positivo)

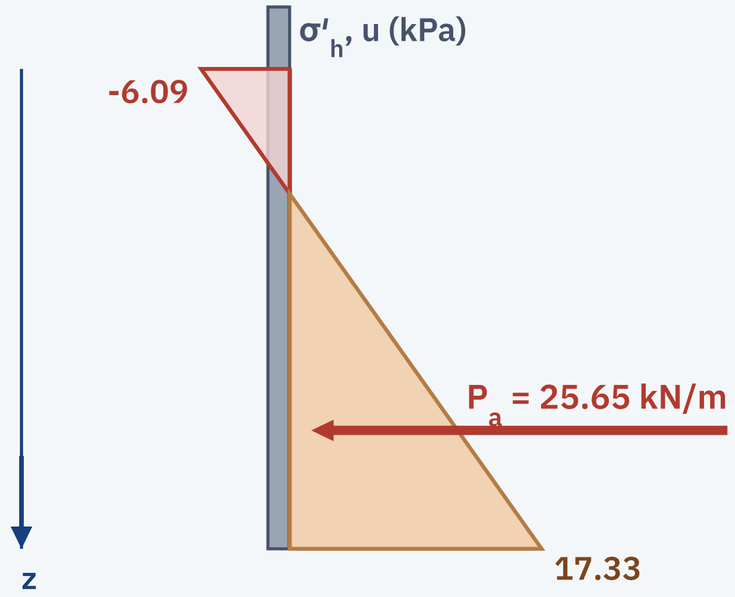
$$P_a = \tfrac{1}{2}(17.33)(4 - 1.04) = \mathbf{25.65}\ \mathrm{kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{4 - 1.04}{3} = \mathbf{0.99}\ \mathrm{m}$$

5 Confronto: non fessurato (inclusa la zona negativa)

$$P_a = \tfrac{1}{2}(-6.09 + 17.33)(4) = 22.48\ \mathrm{kN/m}$$

La forza con fessura è **25.65 kN/m**, maggiore del 14% rispetto alla forza senza fessura; il valore con fessura è quello a favore di sicurezza.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

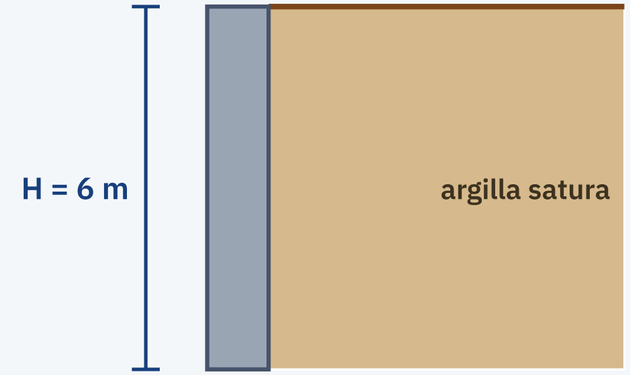
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 6$ **m, verticale; superficie orizzontale; nessun sovraccarico**
Terreno	**argilla satura, non drenata:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi = 0,\ c_u = 25$ **kPa**

RICHIESTO

z_0, spinta attiva con e senza fessura; spinta passiva; altezza **H_c** che può essere scavata verticalmente senza muro.



γ = 18 kN/m³, φ = 0, c_u = 25 kPa

Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Per φ = 0, $K_a = K_p = 1$: profondità di trazione e pressione alla base

$$\sigma_a = \gamma z - 2c_u = 18z - 50 \text{ kPa}$$

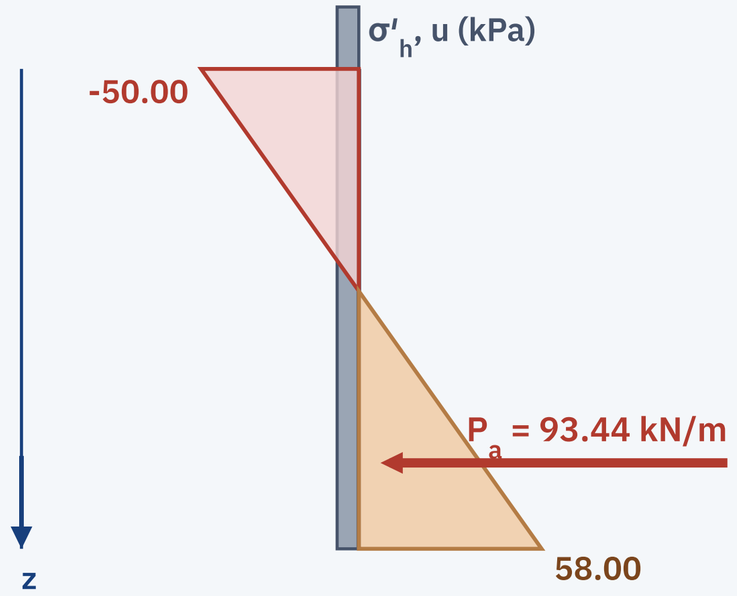
$$z_0 = \frac{2c_u}{\gamma} = \frac{50}{18} = \mathbf{2.78} \text{ m}$$

$$\sigma_a(6) = 108 - 50 = \mathbf{58} \text{ kPa}$$

2 Spinta attiva con fessura

$$P_a = \tfrac{1}{2}(58)(6 - 2.78) = \mathbf{93.44} \text{ kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{6 - 2.78}{3} = 1.07 \text{ m}$$



Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

3 Spinta attiva e spinta passiva senza fessure

$$P_a = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 - 2c_u H = 324 - 300 = \mathbf{24}\ \mathrm{kN/m}$$

$$P_p = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 + 2c_u H = 324 + 300 = \mathbf{624}\ \mathrm{kN/m}$$

4 Altezza che può essere scavata verticalmente senza muro (P_a = 0 in assenza di fessure)

$$\tfrac{1}{2}\gamma H_c^2 - 2c_u H_c = 0 \ \Rightarrow\ H_c = \frac{4c_u}{\gamma} = \frac{4(25)}{18} = \mathbf{5.56}\ \mathrm{m}$$

La forza in presenza di fessura (93.44 kN/m) è **3.9 volte** la forza in assenza di fessura (24 kN/m): nel terreno coesivo, l'ipotesi di fessura determina il risultato. Poiché H = 6 m è maggiore di H_c = 5.56 m, anche la forza in assenza di fessura è positiva.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

La coesione aumenta la resistenza passiva

TEORIA

Nel caso passivo la coesione aggiunge resistenza **a ogni profondità**; non vi è zona di trazione né fessura. In sommità la pressione non è nulla:

$$\sigma'_p(z) = K_p\,(q + \gamma z) + 2c'\sqrt{K_p}$$

$$P_p = \tfrac{1}{2}K_p\gamma H^2 + K_p q H + 2c'\sqrt{K_p}\,H \qquad \varphi = 0:\ P_p = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 + 2c_u H$$

Il diagramma delle pressioni è **trapezoidale**: la coesione e il sovraccarico aggiungono un rettangolo, γz aggiunge un triangolo.

L'altezza di applicazione si ricava prendendo i momenti (contributo di coesione a H/2).

La resistenza passiva dipende da un movimento sufficiente del muro; nella progettazione non se ne utilizza l'intero valore, ma lo si riduce mediante un coefficiente.

CONFRONTO ATTIVA – PASSIVA

	Attiva	Passiva
Coefficiente	$K_a < 1$	$K_p > 1$
Coesione	**riduce** la pressione ($-2c'\sqrt{K_a}$)	**aumenta** la resistenza ($+2c'\sqrt{K_p}$)
Zona tesa	esiste (z_0)	nessuno
Piano di scorrimento	45° + φ′/2	45° – φ′/2
Movimento necessario	piccolo	grande

Traccia

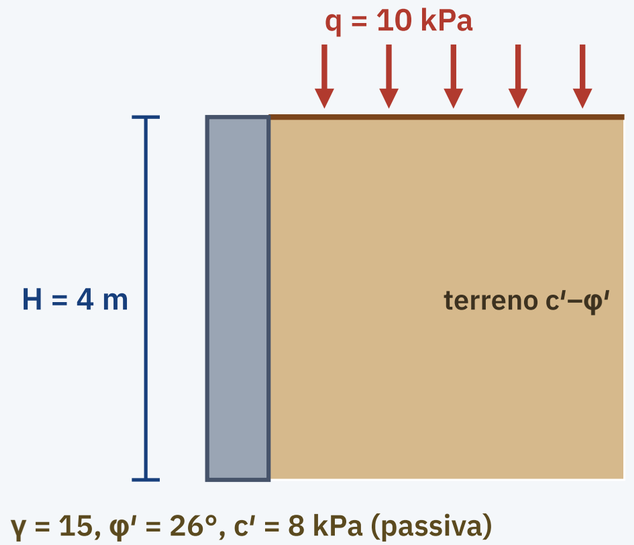
ESEMPIO

RICHIESTO

Spinta passiva P_p e altezza della sua linea d'azione.

Dati

Muro e terreno	**Muro e terreno dell'Esempio 6: $H = 4$ m, $\gamma = 15\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 26°$, $c' = 8$ kPa**
Sovraccarico	$q = 10$ **kPa (sul lato passivo)**



Soluzione

SOLUZIONE

1 Coefficiente: $K_p = \tan^2(45° + 13°)$

$$K_p = \tan^2 58^\circ = \mathbf{2.561} \qquad 2c'\sqrt{K_p} = 2(8)(1.600) = 25.61\ \text{kPa}$$

2 Pressione alla sommità e alla base

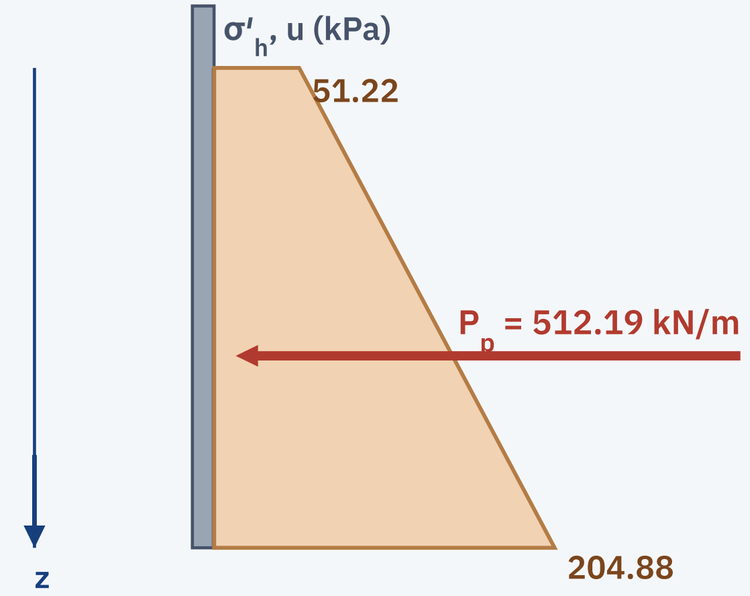
$$\sigma'_p(0) = 2.561(10) + 25.61 = \mathbf{51.22}\ \text{kPa}$$

$$\sigma'_p(4) = 2.561(10 + 60) + 25.61 = \mathbf{204.88}\ \text{kPa}$$

3 Area del trapezio e baricentro

$$P_p = \tfrac{1}{2}(51.22 + 204.88)(4) = \mathbf{512.2}\ \text{kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{51.22(4)(2) + \frac{1}{2}(153.66)(4)(\frac{4}{3})}{512.2} = \mathbf{1.60}\ \text{m}$$



Resistenza passiva **512.2 kN/m**, a 1.60 m sopra la base; circa **20 volte** la forza attiva in presenza di fessura dello stesso muro.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Quanto movimento è necessario perché si sviluppino gli stati attivo e passivo?

TEORIA

Per raggiungere gli stati di Rankine il muro deve allontanarsi dal terreno (attivo) o avvicinarsi ad esso (passivo). **Lo spostamento necessario per il passivo è molto maggiore di quello per l'attivo**; in rapporto all'altezza H:

Terreno	Attivo $\Delta L_a/H$	Passivo $\Delta L_p/H$	attiva per H = 6 m	passiva per H = 6 m
Sabbia sciolta	0.001–0.002	0.01	6–12 mm	60 mm
Sabbia addensata	0.0005–0.001	0.005	3–6 mm	30 mm
Argilla tenera	0.02	0.04	120 mm	240 mm
Argilla consistente	0.01	0.02	60 mm	120 mm

Se il movimento non raggiunge questi valori, la spinta rimane maggiore di K_a e minore di K_p; se il muro è completamente vincolato, si sviluppa la spinta a riposo K_0.

Per un muro che ruota attorno alla propria base, questi rapporti si applicano allo spostamento in sommità.

Campo di validità della soluzione di Rankine

TEORIA

Il muro: verticale e liscio ($\delta' = 0$); la spinta è orizzontale e perpendicolare al muro. In realtà l'attrito terra-muro riduce la spinta attiva e aumenta quella passiva; Rankine risulta leggermente a favore di sicurezza per la spinta attiva e cautelativo (a favore di sicurezza) per quella passiva.

Terrapieno: superficie orizzontale, ogni strato omogeneo; le superfici di scorrimento sono piane. Per terrapieno inclinato e muro inclinato si veda il modulo Rankine (terrapieno inclinato).

Tensioni: la tensione efficace è fondamentale; la pressione dell'acqua si aggiunge a parte; per l'argilla la soluzione non drenata ($\varphi = 0$) può essere impiegata anche con le tensioni totali.

Sovraccarico: carico uniformemente distribuito; i moduli per carico a striscia, concentrato e lineare sono trattati separatamente.

Sisma: Rankine è la soluzione statica; per il sisma si utilizzano i moduli Mononobe–Okabe e spinta passiva in condizioni sismiche.

Sintesi

Punti chiave

Stati: attivo (il muro si allontana) $\sigma'_a = K_a\sigma'_o - 2c'\sqrt{K_a}$; passivo (il muro è spinto) $\sigma'_p = K_p\sigma'_o + 2c'\sqrt{K_p}$

Coefficienti: $K_a = \tan^2(45° - \varphi'/2)$, $K_p = 1/K_a$; $K_a < K_0 = 1 - \sin\varphi' < K_p$

Terrapieno incoerente: $P = \frac{1}{2}K\gamma H^2$, a $H/3$ dalla base; la forza cresce con H^2

Il **sovraccarico** aggiunge un blocco rettangolare ($K\,q\,H$, braccio $H/2$); l'**acqua** aggiunge l'intera $u = \gamma_w(z - H_1)$ indipendentemente da φ' e moltiplica la forza più volte.

Nei terreni stratificati σ'_o è continua, σ'_a presenta una discontinuità al confine in cui φ' cambia; la forza si determina suddividendola in parti e calcolando i momenti rispetto a $\bar{z}$

Nel **terreno c′–φ′** $z_0 = 2c'/(\gamma\sqrt{K_a}) - q/\gamma$; in presenza di fessura di trazione la forza è solo quella del triangolo positivo, maggiore della forza senza fessura

La **passiva** aumenta con la coesione e non vi è zona di trazione; ma il muro deve spostarsi **molto di più** rispetto alla condizione attiva

Bibliografia

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Rankine, W.M.J. (1857). On the stability of loose earth. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 147, 9–27.

NOTA

Tutti gli esempi numerici sono stati prodotti con il motore di calcolo del modulo stesso; il modulo restituisce gli stessi valori. Il modulo si apre con il muro a due strati dell'Esempio 5.

GeoTerva

Calcoli geotecnici online

Dalla teoria alla pratica

Inserire in GeoTerva gli strati, il sovraccarico e la falda freatica del proprio muro; il modulo fornisce insieme il diagramma delle pressioni, la forza e l'altezza di applicazione.

Aprire il modulo →

Pagina di teoria →

Aprire dallo smartphone

I moduli di prova non richiedono registrazione.

Se si desidera utilizzarli nelle proprie lezioni: info@geoterva.com