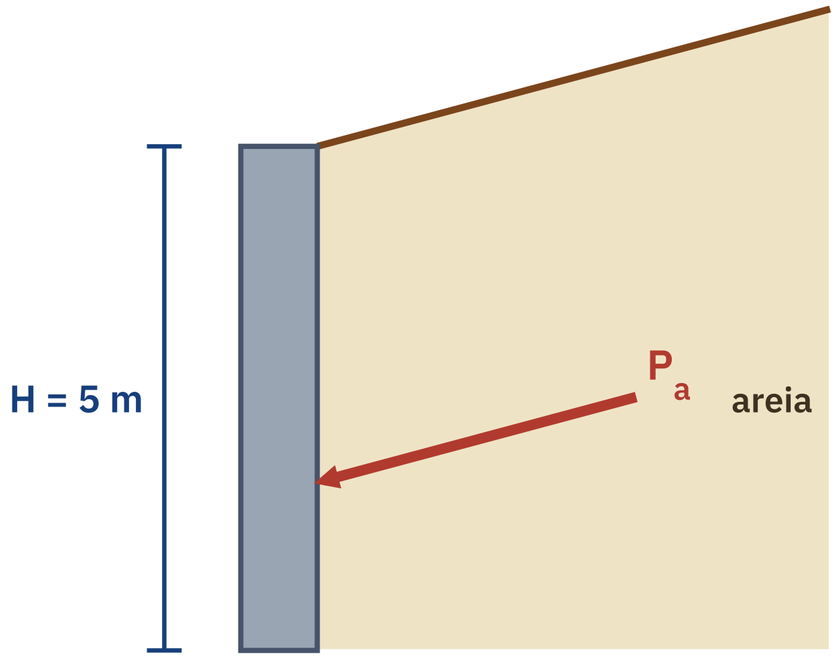
Apresentação de aula de geotecnia · Empuxo de terra

Rankine: reaterro inclinado e muro inclinado

Aula: solução de Rankine quando a superfície do reaterro é inclinada ou a face do muro é inclinada; pressão paralela à superfície, coeficientes K, reaterro coesivo e em camadas; exemplo resolvido em cada tópico.

Reaterro inclinado · Ativo e passivo · Muro inclinado · Chu (1991) · Reaterro coesivo · Reaterro em camadas



Introdução

O que veremos nesta aula?

- Que, quando a superfície do reaterro é inclinada, a pressão é **paralela à superfície**, e por que K_a e K_p variam com α
- A relação $K_a K_p = \cos^2\alpha$ e o limite **$\alpha \leq \varphi'$**
- A solução de **Chu (1991)** para muro inclinado + aterro inclinado: ψ, $K_{(R)}$, β e η
- Determinar a **intensidade, a direção (β) e a posição** da força; separar suas componentes horizontal e vertical
- Em reaterro coesivo, o diagrama curvo de pressões, a profundidade de tração e, **em argila não drenada**, a condição de estabilidade do talude do reaterro
- Usar, em camadas paralelas à superfície, o K próprio de cada camada

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: qual é a regra e por que é assim?

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

As forças são por unidade de comprimento do muro (kN/m); α e θ em graus, pressões em kPa. O muro é sem atrito.

A pressão é paralela à superfície

TEORIA

Se a superfície do aterro não coesivo atrás do muro forma um ângulo α com a horizontal, as pressões de Rankine deixam de ser horizontais: atuam **paralelamente à superfície**, ou seja, inclinadas de α, e continuam a crescer linearmente com a profundidade:

$$K_a = \cos\alpha \frac{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'}}{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'}} \qquad P_a = \tfrac{1}{2} K_a \gamma H^2$$

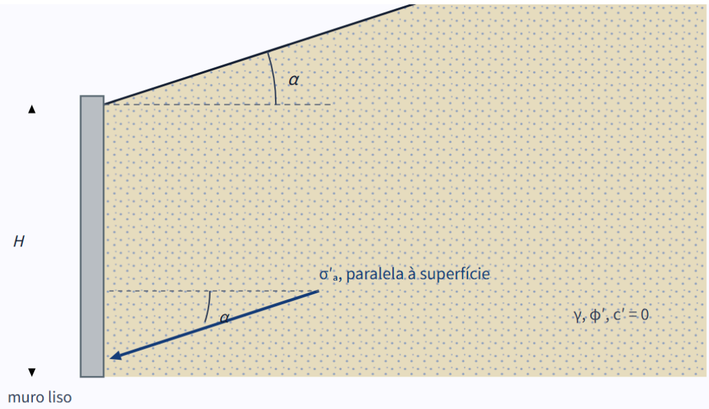
$$K_p = \cos\alpha \frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'}}{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'}} \qquad P_p = \tfrac{1}{2} K_p \gamma H^2$$

Ambas as forças atuam a **H/3** acima da base e formam um ângulo α com a horizontal: $P_h = P \cos\alpha$, $P_v = P \sin\alpha$.

Para α = 0, as equações reduzem-se a $\tan^2(45° \mp \varphi'/2)$.

O produto é $\mathbf{K_a K_p = \cos^2\alpha}$; para α = 0 vale 1.

ATERRO INCLINADO



K_a e K_p – α e φ′

TEORIA

ATIVO K_a

α \ φ′	28°	30°	32°	34°	36°	38°	40°
0°	0.3610	0.3333	0.3073	0.2827	0.2596	0.2379	0.2174
5°	0.3656	0.3372	0.3105	0.2855	0.2620	0.2399	0.2192
10°	0.3802	0.3495	0.3210	0.2944	0.2696	0.2464	0.2247
15°	0.4086	0.3729	0.3405	0.3108	0.2834	0.2581	0.2346
20°	0.4605	0.4142	0.3739	0.3381	0.3060	0.2769	0.2504
25°	0.5727	0.4936	0.4336	0.3847	0.3431	0.3070	0.2750

PASSIVO K_p

α \ φ′	28°	30°	32°	34°	36°	38°	40°
0°	2.770	3.000	3.255	3.537	3.852	4.204	4.599
5°	2.715	2.943	3.196	3.476	3.788	4.136	4.527
10°	2.551	2.775	3.022	3.295	3.598	3.936	4.316
15°	2.284	2.502	2.740	3.002	3.293	3.615	3.977
20°	1.918	2.132	2.362	2.612	2.886	3.189	3.526
25°	1.434	1.664	1.894	2.135	2.394	2.676	2.987

Enunciado

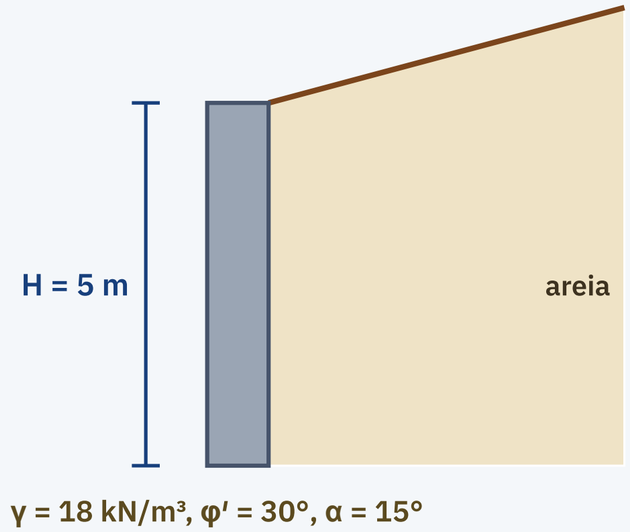
EXEMPLO

PEDE-SE

K_a, **P_a**, altura de aplicação e direção; componentes horizontal e vertical; comparação com o reaterro horizontal.

Dados

Muro	$H = 5$ **m, vertical, sem atrito**
Aterro	**areia seca:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, **inclinação da superfície** $\alpha = 15°$



Solução

SOLUÇÃO

1 Coeficiente: cos 15° = 0.9659; √(cos²α − cos²φ′) = √(0.9330 − 0.75) = 0.4278

$$K_a = \cos\alpha \frac{\cos\alpha - r}{\cos\alpha + r} = 0.9659 \frac{0.5381}{1.3937} = \mathbf{0.3729}$$

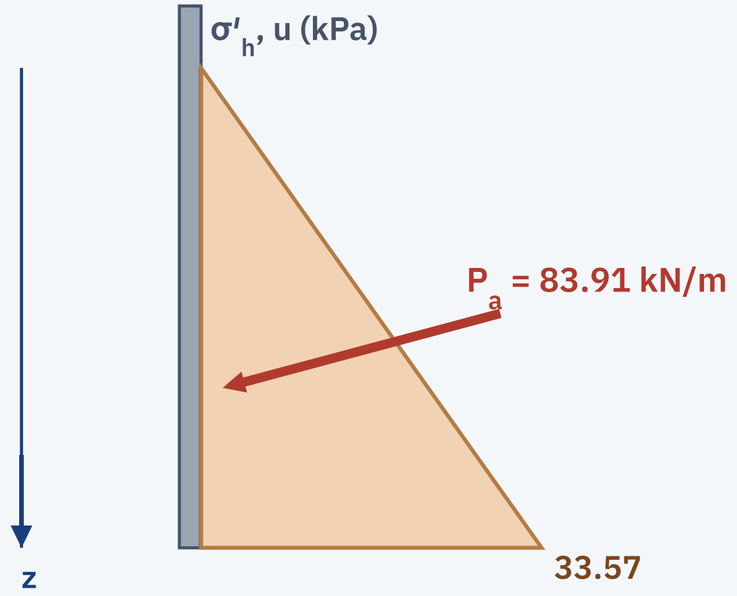
2 Pressão na base (paralela à superfície)

$$\sigma'_a(5) = K_a \gamma H = 0.3729(18)(5) = \mathbf{33.57}\ \text{kPa}$$

3 Força, posição e componentes

$$P_a = \tfrac{1}{2}(33.57)(5) = \mathbf{83.91}\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \tfrac{5}{3} = 1.67\ \text{m}$$

$$P_h = P_a \cos 15^\circ = 81.05 \qquad P_v = P_a \sin 15^\circ = 21.72\ \text{kN/m}$$



P_a = **83.91 kN/m**, com inclinação de 15° em relação à horizontal, 1.67 m acima da base. No reaterro horizontal, P_a era 75.00 kN/m: a inclinação aumenta a força em 12%.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

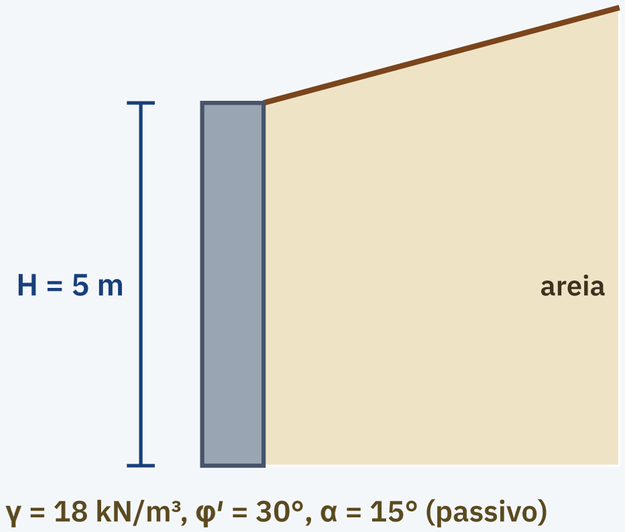
EXEMPLO

PEDE-SE

K_p, P_p e suas componentes; comparação com o empuxo passivo em reaterro horizontal.

Dados

Muro e aterro	**O muro e o reaterro do Exemplo 1: $H = 5$ m, $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, $\alpha = 15°$**



Solução

SOLUÇÃO

1 Coeficiente (r = 0.4278)

$$K_p = \cos\alpha \,\frac{\cos\alpha + r}{\cos\alpha - r} = 0.9659\,\frac{1.3937}{0.5381} = \mathbf{2.5017}$$

2 Pressão na base e força

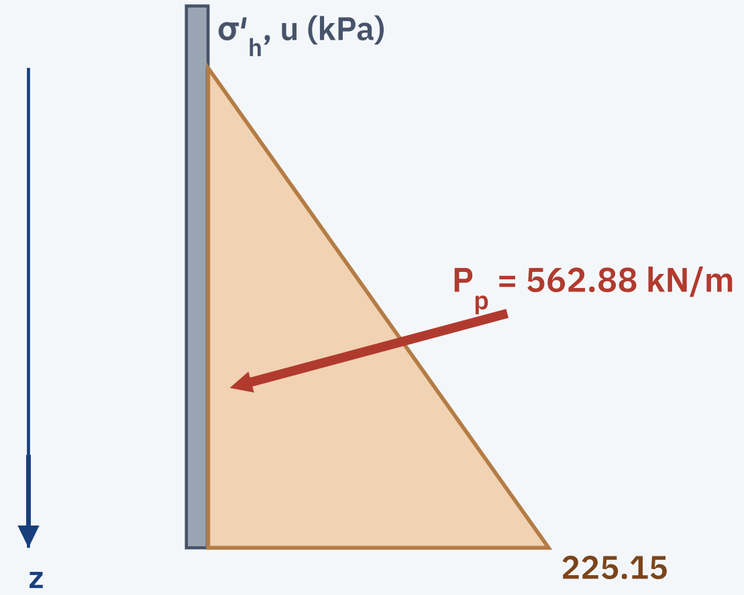
$$\sigma'_p(5) = K_p \gamma H = 2.5017(18)(5) = 225.15\ \text{kPa}$$

$$P_p = \tfrac{1}{2}(225.15)(5) = \mathbf{562.9}\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = 1.67\ \text{m}$$

3 Componentes (15° com a horizontal)

$$P_h = P_p \cos 15^\circ = 543.7 \qquad P_v = P_p \sin 15^\circ = 145.7\ \text{kN/m}$$

P_p = **562.9 kN/m**. Para aterro horizontal era 675.0 kN/m: a inclinação **reduz** a resistência passiva em 17% (enquanto o empuxo ativo aumenta). A verificação $K_a K_p$ = 0.9330 = cos²15° é satisfeita.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

condição α ≤ φ′

TEORIA

A expressão com raiz só é real se **cos²α ≥ cos²φ′**, isto é, α ≤ φ′: um talude mais íngreme que φ′ não se sustenta em solo não coesivo. No limite, a raiz se anula e ambos os coeficientes se aproximam do mesmo valor:

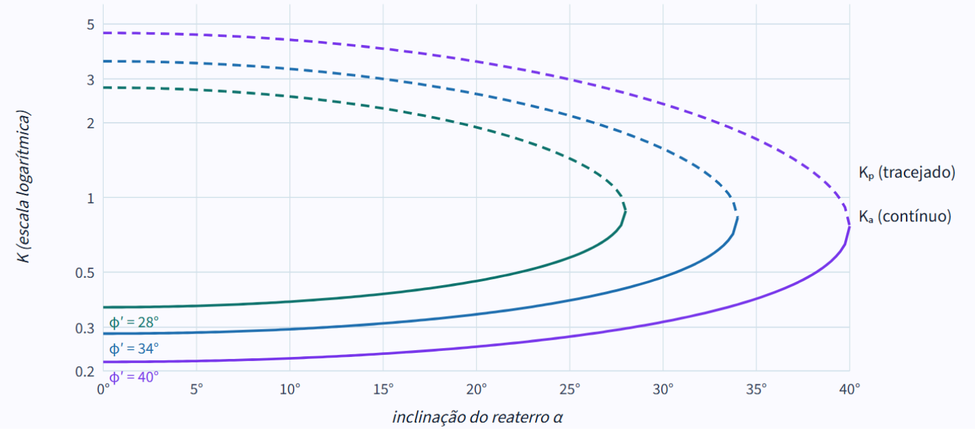
$$\alpha = \varphi' : \qquad K_a = K_p = \cos\varphi'$$

À medida que α aumenta, K_a cresce e K_p diminui; os dois se encontram em α = φ′ (os estados ativo e passivo tornam-se indistinguíveis).

Este é o estado do solo em seu ângulo de repouso natural: o reaterro já está no limiar da ruptura e o movimento do muro não altera a pressão.

Para α > φ′ não há solução; o módulo emite um aviso.

K – α (escala log.; φ′ = 28°, 34°, 40°)



Enunciado

EXEMPLO

Dados

Solo	**areia não coesiva,** $\varphi' = 32^\circ$
Inclinações	$\alpha = 0^\circ,\ 10^\circ,\ 20^\circ,\ 30^\circ,\ 32^\circ$ **(e** 33°**)**

PEDE-SE

Para cada inclinação, **K_a**, **K_p** e seus produtos; o valor no limite; o resultado para α = 33°.

Solução

SOLUÇÃO

1 Equações para cada inclinação (φ′ = 32°; cos 32° = 0.8480)

α	K_a	K_p	K_aK_p	$\cos^2\alpha$
0°	0.3073	3.255	1.0000	1.0000
10°	0.3210	3.022	0.9698	0.9698
20°	0.3739	2.362	0.8830	0.8830
30°	0.5741	1.306	0.7500	0.7500
32°	0.8480	0.848	0.7192	0.7192

2 Limite: α = φ′ = 32° e α = 33°

$$\alpha = 32^\circ:\ \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'} = 0 \ \Rightarrow\ K_a = K_p = \cos 32^\circ = \mathbf{0.8480}$$

$$\alpha = 33^\circ:\ \cos^2 33^\circ - \cos^2 32^\circ < 0 \ \Rightarrow\ \text{sem raiz real}$$

Com o aumento de α, K_a passa de 0.307 a 0.574 e K_p de 3.25 a 1.306; para qualquer α, $K_aK_p = \cos^2\alpha$. Para α = φ′ = 32° os dois se igualam a cos φ′ = 0.848; para α = 33° **não há solução** (o talude é íngreme).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Face inclinada do muro e reaterro inclinado: ativo

TEORIA

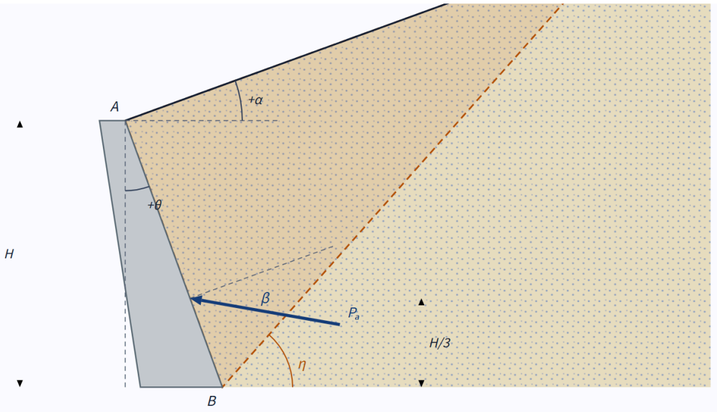
Se a face do muro tem inclinação θ em relação à vertical e a superfície do reaterro tem inclinação α em relação à horizontal (ambos positivos, como na figura; muro sem atrito), a solução de Chu (1991) fornece a **intensidade e a direção** da força:

$$\psi_a = \sin^{-1}\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi'} - \alpha + 2\theta$$

$$K_{a(R)} = \frac{\cos(\alpha-\theta)\sqrt{1+\sin^2\varphi' - 2\sin\varphi'\cos\psi_a}}{\cos^2\theta\left(\cos\alpha + \sqrt{\sin^2\varphi' - \sin^2\alpha}\right)}$$

$$P_a = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{a(R)} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{\sin\varphi'\sin\psi_a}{1-\sin\varphi'\cos\psi_a}$$

$$\eta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi'}$$



β: ângulo da força em relação à normal à face do muro; a força atua a **H/3** acima da base. **η**: ângulo da face BC da cunha de ruptura, na base, com a horizontal.

Para θ = 0, $K_{a(R)}$ reduz-se à fórmula do reaterro inclinado (Eq. 1), e β reduz-se a α.

No caso passivo, os sinais mudam

TEORIA

No estado passivo, para a mesma geometria, os sinais mudam:

$$\psi_p = \sin^{-1}\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi'} + \alpha - 2\theta \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{\sin\varphi'\sin\psi_p}{1+\sin\varphi'\cos\psi_p}$$

$$K_{p(R)} = \frac{\cos(\alpha-\theta)\sqrt{1+\sin^2\varphi' + 2\sin\varphi'\cos\psi_p}}{\cos^2\theta\left(\cos\alpha - \sqrt{\sin^2\varphi' - \sin^2\alpha}\right)}$$

$$\eta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi'} \qquad P_p = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{p(R)}$$

A força atua a H/3 acima da base. A face do muro e a superfície se interceptam num ângulo de 90° − |α − θ|; se esse ângulo se fecha, o muro se estende ao longo do talude e o que atua sobre a face é o peso do solo sobrejacente; o módulo aceita |α − θ| ≤ 75°.

Enunciado

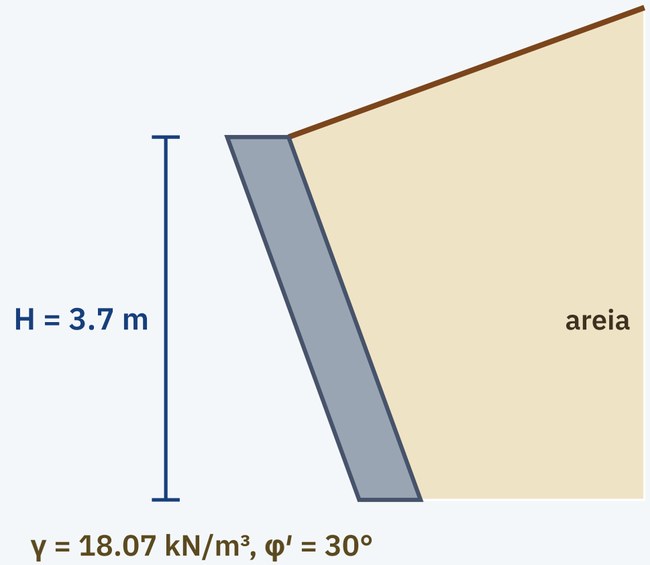
EXEMPLO

PEDE-SE

ψ_a, $K_{a(R)}$, P_a, β, η e a altura de aplicação.
Este é o muro inicial do módulo.

Dados

Muro	**sem atrito; face inclinada de $\theta = +20^\circ$ em relação à vertical; $H = 3.658$ m (12 ft)**
Aterro	**areia seca: $\gamma = 18.07\ \mathrm{kN/m^3}$ (115 pcf), $\varphi' = 30^\circ$; inclinação da superfície $\alpha = +20^\circ$**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Ângulo auxiliar e ψ_a

$$\sin^{-1}\frac{\sin 20^\circ}{\sin 30^\circ} = 43.16^\circ$$

$$\psi_a = 43.16^\circ - 20^\circ + 2(20^\circ) = \mathbf{63.16^\circ}$$

2 Coeficiente $K_{a(R)}$

$$\sqrt{1+\sin^2 30^\circ - 2\sin 30^\circ \cos 63.16^\circ} = 0.8936 \qquad \cos^2 20^\circ = 0.8830$$

$$\sqrt{\sin^2 30^\circ - \sin^2 20^\circ} = 0.3647$$

$$K_{a(R)} = \frac{\cos 0^\circ\,(0.8936)}{0.8830\,(0.9397 + 0.3647)} = \mathbf{0.776}$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Força e posição

$$P_a = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{a(R)} = \tfrac{1}{2}(18.07)(3.658)^2(0.7758) = \mathbf{93.79}\ \mathrm{kN/m}$$

$$\bar{z} = \tfrac{H}{3} = \mathbf{1.219}\ \mathrm{m}$$

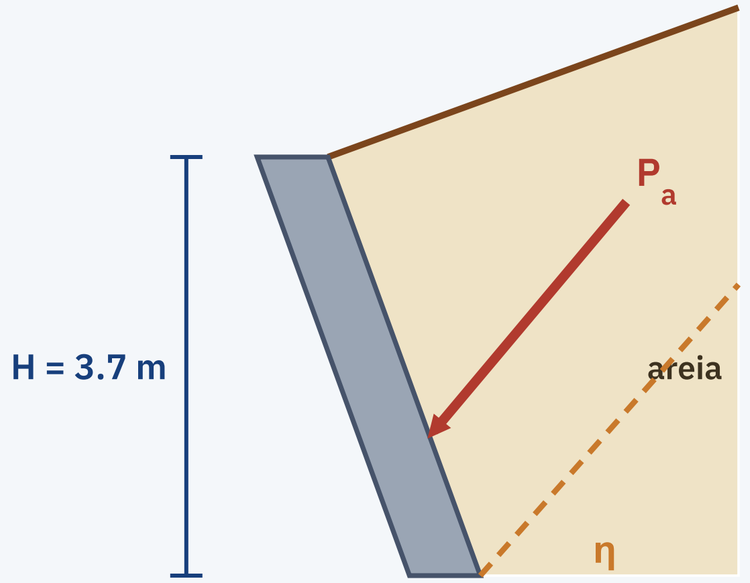
4 Direção β e ângulo da cunha η

$$\beta = \tan^{-1}\frac{\sin 30^\circ \sin 63.16^\circ}{1 - \sin 30^\circ \cos 63.16^\circ} = \mathbf{29.95}^\circ\ (\approx 30^\circ)$$

$$\eta = 45^\circ + 15^\circ + 10^\circ - \tfrac{1}{2}(43.16^\circ) = \mathbf{48.42}^\circ$$

5 Componentes (perpendicular e paralela à face)

$$N = P_a \cos\beta = 81.27 \qquad T = P_a \sin\beta = 46.83\ \mathrm{kN/m}$$



P_a = **93.79 kN/m** (6,424 lb/ft em unidades dos EUA), a **30.0°** da normal à face do muro, a H/3 = 1.22 m acima da base.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

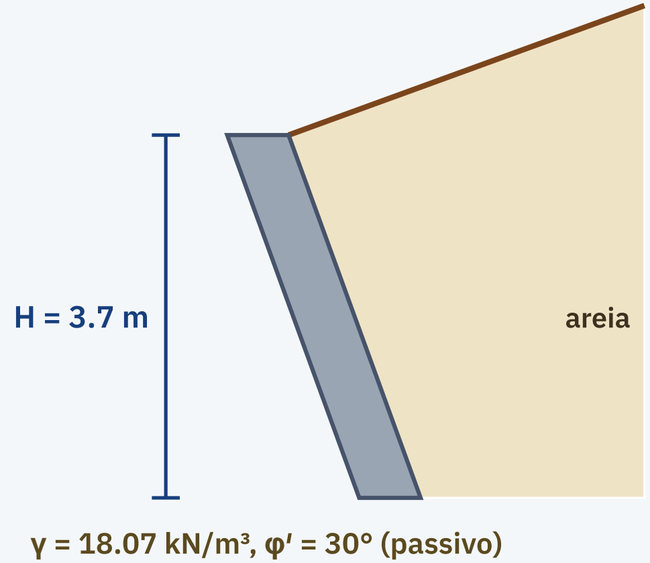
EXEMPLO

PEDE-SE

Ψ_p, $K_{p(R)}$, P_p, β e **η**; comparação com o caso ativo.

Dados

Muro e aterro	**O muro e o reaterro do Exemplo 4:** $\theta = +20^\circ,\ \alpha = +20^\circ,\ \varphi' = 30^\circ,\ \gamma = 18.07\ \mathrm{kN/m^3},\ H = 3.658$ **m**



Solução

SOLUÇÃO

1 Ψ_p e $K_{p(R)}$

$$\psi_p = 43.16^\circ + 20^\circ - 2(20^\circ) = \mathbf{23.16^\circ}$$

$$K_{p(R)} = \frac{\cos 0^\circ \sqrt{1 + \sin^2 30^\circ + 2 \sin 30^\circ \cos 23.16^\circ}}{\cos^2 20^\circ \left(\cos 20^\circ - \sqrt{\sin^2 30^\circ - \sin^2 20^\circ}\right)} = \mathbf{2.901}$$

2 Força, direção e ângulo da cunha

$$P_p = \tfrac{1}{2}(18.07)(3.658)^2(2.9010) = \mathbf{350.7}\ \mathrm{kN/m}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\sin 30^\circ \sin 23.16^\circ}{1 + \sin 30^\circ \cos 23.16^\circ} = \mathbf{7.67^\circ} \qquad \eta = \mathbf{61.58^\circ}$$

P_p = **350.7 kN/m**, β = 7.7°; a força ativa do mesmo muro era 93.79 kN/m (razão 3.7). No passivo, a força é quase perpendicular à face (β pequeno), ao passo que, no ativo, é inclinada em ~30°.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Como a inclinação θ da face do muro altera a força?

TEORIA

Mantendo constante a inclinação do reaterro (α = 20°, φ′ = 30°) e girando apenas a face do muro, $K_{a(R)}$ e β variam:

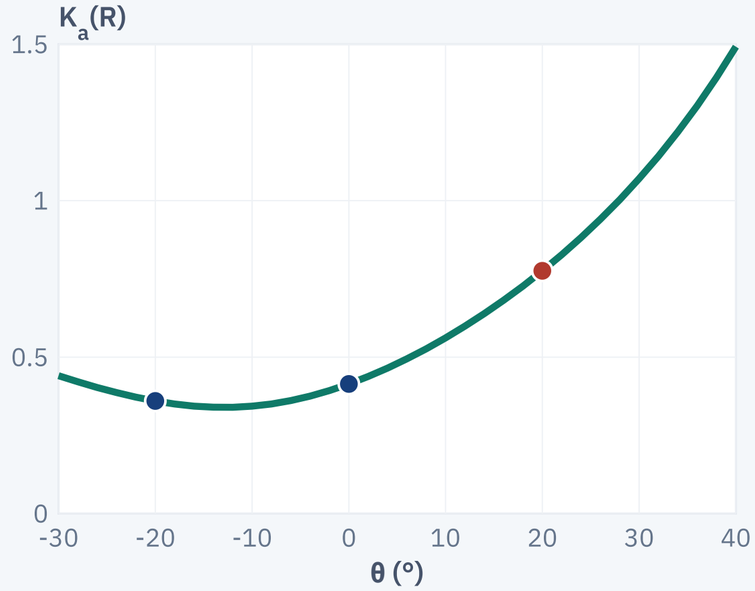
θ	$K_{a(R)}$	β
−20°	0.360	-15.5°
0°	0.414	20.0°
+20°	0.776	30.0°

Se θ é positivo (a face se apoia sobre o reaterro), o reaterro fica sobre a face do muro e a força aumenta; se negativo, diminui.

Para θ = 0 e α = 20°, β = α = 20°: a força é paralela à superfície.

$K_{(R)}$ inclui conjuntamente as duas componentes da força, **paralela e perpendicular** à face; para a componente horizontal apenas, toma-se P cos(β + θ).

$K_{a(R)}$ – θ (α = 20°, φ′ = 30°)



Mazindrani e Ganjali (1997)

TEORIA

Para um solo c′–φ′ com superfície inclinada de α atrás de um muro vertical e sem atrito, a pressão ativa a uma dada profundidade:

$$\sigma'_a = \gamma z\, K'_a \cos\alpha \qquad r = \frac{c'}{\gamma z}$$

$$K'_a = \frac{2\cos^2\alpha + 2r\cos\varphi'\sin\varphi' - \sqrt{D}}{\cos^2\varphi'} - 1$$

$$D = 4\cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'\right) + 4r^2\cos^2\varphi' + 8r\cos^2\alpha\sin\varphi'\cos\varphi'$$

$$z_c = \frac{2c'}{\gamma}\sqrt{\frac{1+\sin\varphi'}{1-\sin\varphi'}}$$

K'_a depende da profundidade por meio de c′/γz: a pressão **não é linear**; é negativa acima da superfície do terreno, e a profundidade da trinca de tração z_c independe da inclinação.

No caso passivo, o sinal diante da raiz passa a ser +. α = 0 → Rankine ($\sigma'_a = K_a\gamma z - 2c'\sqrt{K_a}$); c′ = 0 → Eq. 1.

No cálculo com trinca, integra-se a parte abaixo de z_c; sem trinca, integra-se toda a altura; vale apenas para θ = 0.

PRESSÃO PARALELA À SUPERFÍCIE

Como no caso não coesivo, a pressão atua **paralelamente** à superfície, ou seja, formando um ângulo α com a horizontal; a componente da força perpendicular à face do muro é P cos α.

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Muro	$H = 5$ **m, vertical, sem atrito**
Aterro	$\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 25°,\ c' = 10$ **kPa; inclinação da superfície** $\alpha = 10°$

PEDE-SE

z_c, a pressão na base, P_a com e sem trinca e a altura de aplicação; comparação com reaterro horizontal.

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

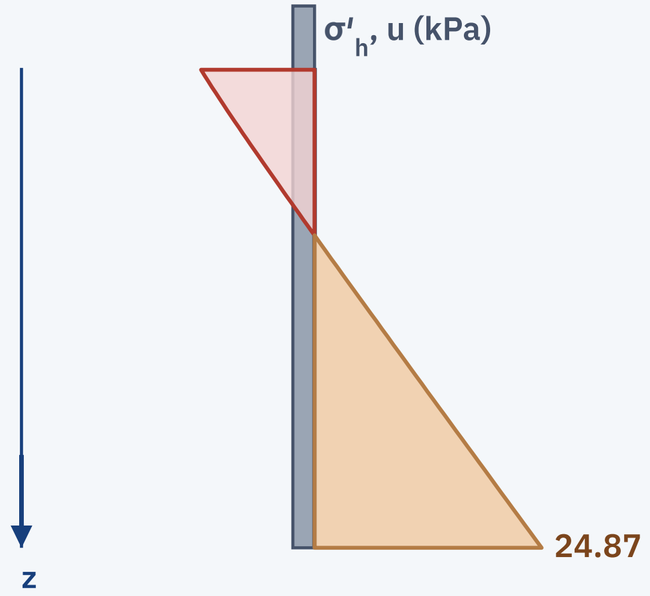
1 Profundidade de tração (independente da inclinação)

$$z_c = \frac{2(10)}{18}\sqrt{\frac{1+\sin 25^\circ}{1-\sin 25^\circ}} = 1.111(1.5697) = \mathbf{1.744}\ \text{m}$$

2 Na base (z = 5 m): r = c′/γz = 10/(18·5) = 0.1111

$$D = 0.9467 \qquad K'_a = 0.2806$$

$$\sigma'_a(5) = \gamma z K'_a \cos\alpha = 18(5)(0.2806)\cos 10^\circ = \mathbf{24.87}\ \text{kPa}$$



Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Força com trinca de tração (área do diagrama curvo de z_c a H, integral numérica)

$$P_a = \int_{z_c}^{H} \sigma'_a \, dz = \mathbf{40.33}\ \mathrm{kN/m}\ \text{(paralelo à superfície, } 10^\circ\text{)}$$

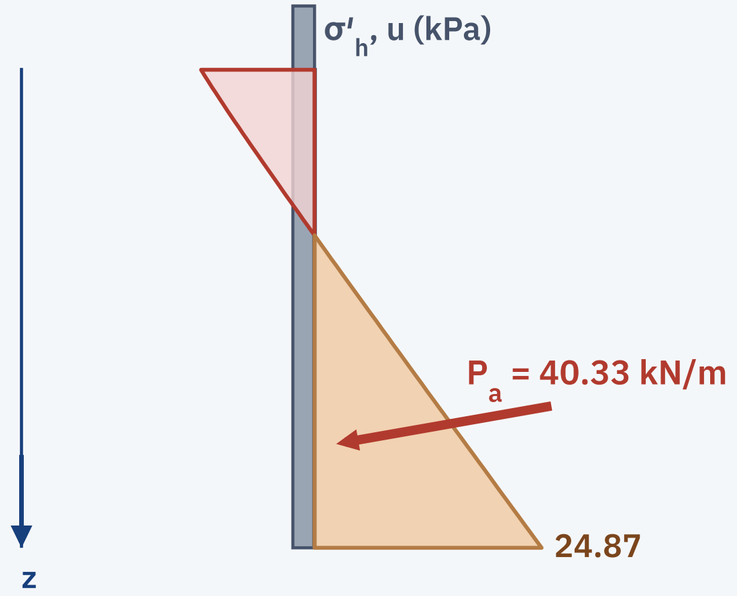
$$\bar{z} = 1.08\ \mathrm{m}\ \text{(a partir da base)}$$

4 Comparação

$$\text{sem trinca: } P_a = 29.16\ \mathrm{kN/m}$$

$$\text{reaterro horizontal: } P_a = \tfrac{1}{2}(23.79)(3.256) = 38.72\ \mathrm{kN/m}$$

A força com trinca é **40.33 kN/m**, 38% maior que a força sem trinca; em relação ao reaterro horizontal (38.72 kN/m), a inclinação aumentou a força em 4%. O valor com trinca é o valor de projeto.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Camadas paralelas à superfície

TEORIA

Se o reaterro é constituído por camadas **paralelas à superfície** (uma sondagem vertical atrás do muro intercepta as mesmas espessuras em todos os pontos), cada camada é avaliada com os próprios γ, φ′ e c′, sob o peso do solo sobrejacente $\sigma'_v = \Sigma \gamma_i h_i$:

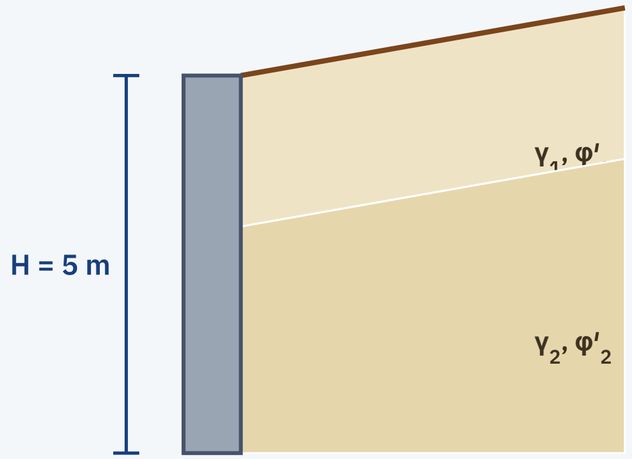
$$\sigma' = \sigma'_v \frac{K_{(R)} \cos\theta}{1 + \tan\theta \tan\alpha} \qquad \theta = 0 : \ \sigma' = \sigma'_v K_{(R)}$$

Como K muda no limite entre camadas, a pressão **sofre um salto**; a força de cada camada é decomposta nas componentes N_i, perpendicular, e T_i, paralela à face do muro; $P = \sqrt{(N^2 + T^2)}$, $\beta = \tan^{-1}(T/N)$.

A **sobrecarga** q é somada a σ'_v como uma camada de peso q/cos α na superfície; abaixo do nível da **água** usa-se γ′, e u atua perpendicularmente ao muro.

Esta é a extensão, pelo módulo, das soluções de Chu e de Mazindrani–Ganjali a camadas (não há na literatura solução fechada para camadas); para uma única camada, reproduz a solução fechada com diferença inferior a 10^{-8}.

CAMADAS PARALELAS À SUPERFÍCIE



Enunciado

EXEMPLO

Dados

Muro	$H = 5$ **m, vertical, sem atrito**
Aterro	**inclinação da superfície do terreno** $\alpha = 10°$**; duas camadas paralelas à superfície (espessura vertical)**
Camada 1 (2 m)	$\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30°$
Camada 2 (3 m)	$\gamma = 19\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 35°$

PEDE-SE

Em cada camada: pressões, **P**, **N**, **T** e altura de aplicação.

Solução (1/2)

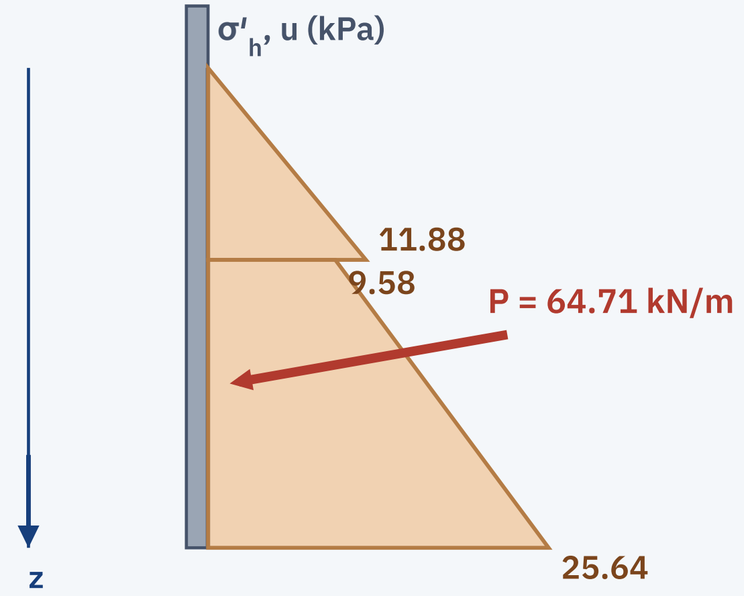
SOLUÇÃO

1 Coeficientes (α = 10°)

$$K_1(30^\circ) = \mathbf{0.3495}$$
$$K_2(35^\circ) = \mathbf{0.2818}$$

2 Tensões verticais: no limite 17(2) = 34; na base 34 + 19(3) = 91 kPa

$$\sigma'_1 = 0.3495(34) = \mathbf{11.88}\ \text{kPa (topo)}$$
$$\sigma'_2 = 0.2818(34) = \mathbf{9.58}\ \text{kPa (base)}$$
$$\sigma'(5) = 0.2818(91) = \mathbf{25.64}\ \text{kPa}$$



Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Forças (paralelas à superfície): triângulo superior · retângulo inferior · triângulo inferior

$$P = \tfrac{1}{2}(2)(11.88) + 3(9.58) + \tfrac{1}{2}(3)(16.06) = 11.88 + 28.74 + 24.09 = \mathbf{64.71}\ \mathrm{kN/m}$$

4 Componentes e altura de aplicação

$$N = P\cos 10^\circ = 63.73 \qquad T = P\sin 10^\circ = 11.24\ \mathrm{kN/m}$$

$$\beta = \tan^{-1}(T/N) = 10^\circ \qquad \bar{z} = \mathbf{1.71}\ \mathrm{m}$$

P = **64.71 kN/m**, com N = 63.73 kN/m normal à face do muro; a 1.71 m acima da base. Na interface entre as camadas a pressão **cai** de 11.88 para 9.58 kPa, porque o valor de φ′ da camada inferior é maior; já σ'_v é contínua.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Condição de estabilidade do talude

TEORIA

A argila não drenada ($\varphi_u = 0$, c_u, tensão total) segue a mesma relação; adota-se $\varphi' = 0$ e $c' = c_u$:

$$K'_a = 2\cos^2\alpha - 2\sqrt{r^2 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha} - 1 \qquad r = \frac{c_u}{\gamma z}$$

A solução existe apenas **enquanto o talude se sustenta**: a tensão cisalhante em planos paralelos à superfície não pode exceder a coesão:

$$\tau = \gamma z \sin\alpha\cos\alpha \le c_u \;\Rightarrow\; z_{max} = \frac{c_u}{\gamma \sin\alpha\cos\alpha} \qquad z_c = \frac{2c_u}{\gamma}$$

O módulo verifica esta condição até a base do muro; se o muro for mais alto que z_{max}, o cálculo é interrompido.

Para $\alpha = 0$, $\sigma_a = \gamma z - 2c_u$, trinca de tração em $2c_u/\gamma$.

POR QUE HÁ UM LIMITE?

Sob uma superfície inclinada, a tensão cisalhante em cada plano paralelo à superfície aumenta com a profundidade; a argila suporta essa tensão apenas até c_u. Em maior profundidade, o talude desliza sob o próprio peso.

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Aterro	**argila saturada, não drenada:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$, $c_u = 20$ **kPa; inclinação da superfície** $\alpha = 15^\circ$
Muro	$H = 4$ **m (e 5 m), vertical, sem atrito**

PEDE-SE

z_{max}, z_c, a pressão na base e P_a com trinca; o que acontece em H = 5 m?

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Limite de estabilidade e profundidade de tração

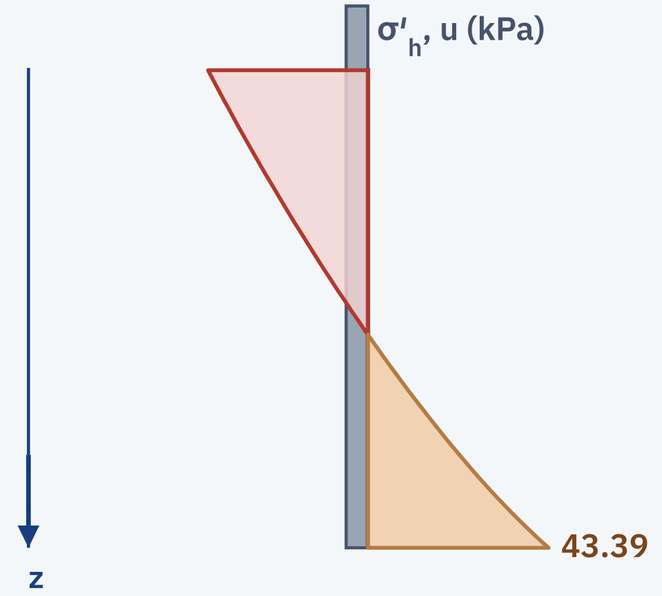
$$z_{max} = \frac{20}{18 \sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \mathbf{4.44}\ \text{m}$$

$$z_c = \frac{2c_u}{\gamma} = \frac{40}{18} = \mathbf{2.22}\ \text{m}$$

2 H = 4 m: τ(4) = 18(4) sin15° cos15° = 18.0 ≤ 20 kPa: o talude se sustenta; na base, r = 20/(18·4) = 0.2778

$$K'_a = 2\cos^2 15^\circ - 2\sqrt{r^2 - \sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ} - 1 = 0.6239$$

$$\sigma_a(4) = \gamma z K'_a \cos\alpha = 18(4)(0.6239)\cos 15^\circ = \mathbf{43.39}\ \text{kPa}$$



Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Força com trinca (de z_c a 4 m)

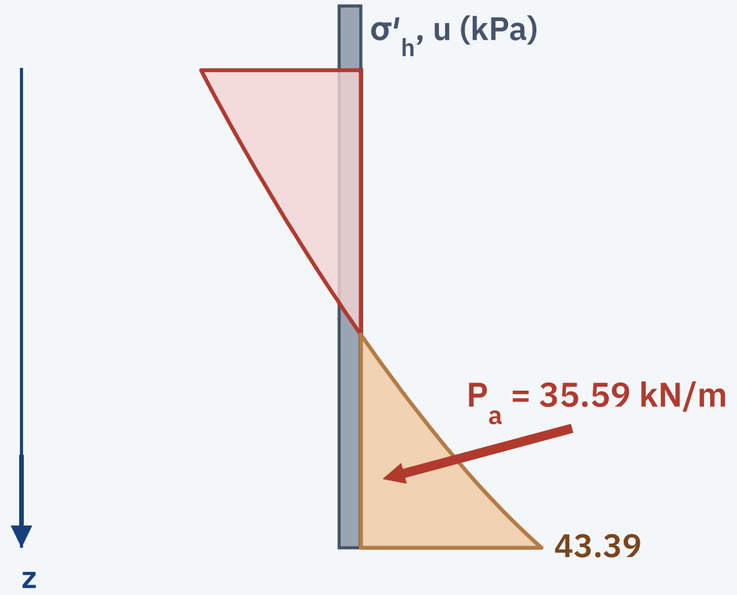
$$P_a = \int_{z_c}^{H} \sigma_a \, dz = \mathbf{35.59}\ \text{kN/m}\ (15^\circ \text{ com a horizontal})$$

$$\bar{z} = 0.57\ \text{m} \qquad \text{sem trinca: } P_a = -9.37\ \text{kN/m}$$

4 H = 5 m: τ(5) = 22.5 kPa > c_u = 20 kPa

$$\tau(5) = 18(5)\sin 15^\circ \cos 15^\circ = 22.5 > c_u \ \Rightarrow\ \text{talude rompe}$$

Para H = 4 m, P_a com trinca de tração é de **35.59 kN/m**; a força sem trinca é negativa (–9.37 kN/m), isto é, a hipótese de trinca é determinante. Como z_{max} = 4.44 m, não há solução para um muro de 5 m.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Escopo da solução

TEORIA

O muro é liso (sem atrito); na solução de Chu, a pressão é dada com um ângulo β em relação à normal ao muro (β decorre apenas do estado de tensões do próprio solo, e não do atrito solo-muro). Para muro com atrito, consultar o módulo de Coulomb.

O **reaterro** é uma superfície plana com uma única inclinação; as camadas são paralelas à superfície. Variações da inclinação da superfície, bermas ou superfícies com quebra não constam desta solução.

O **reaterro coesivo** é tratado por Mazindrani–Ganjali apenas para muro vertical ($\theta = 0$); admite-se trinca de tração até z_c, e a trinca preenchida por água deve ser considerada separadamente.

Geometria: a face do muro e a superfície devem se interceptar em pelo menos 15° ($|\alpha - \theta| \leq 75°$); caso contrário, a pressão que atua na face não é empuxo de terra, mas o peso do solo sobrejacente.

O **sismo** e o **atrito no muro** estão fora do escopo deste módulo (Mononobe–Okabe, Coulomb).

Resumo

Pontos-chave

Reaterro inclinado ($\alpha \le \varphi'$): a pressão é **paralela** à superfície, $K_a = \cos\alpha\,(\cos\alpha - r)/(\cos\alpha + r)$, K_p com sinal oposto; $P = \tfrac{1}{2}K\gamma H^2$ a $H/3$ da base, com inclinação α em relação à horizontal

$K_aK_p = \cos^2\alpha$; à medida que α aumenta, K_a aumenta e K_p diminui; em $\alpha = \varphi'$ ambos valem $\cos\varphi'$ e, para $\alpha > \varphi'$, não há solução

Chu (1991): $\psi_a = \sin^{-1}(\sin\alpha/\sin\varphi') - \alpha + 2\theta$; $K_{a(R)}$, β e η em forma fechada; a força é inclinada de β em relação à normal à face

Inclinação do muro θ: se positiva, a força aumenta; se negativa, diminui; no caso passivo, $\psi_p = \sin^{-1}(\ldots) + \alpha - 2\theta$

Em reaterro **coesivo**, K'_a depende da profundidade e o diagrama é curvo; $z_c = (2c'/\gamma)\sqrt{((1+\sin\varphi')/(1-\sin\varphi'))}$ independe da inclinação; vale a força com trinca

Aterro **estratificado**: $\sigma' = \sigma'_v K_{(R)}$; salto na interface, $P = \sqrt{(N^2 + T^2)}$

Argila não drenada: se $z_{max} = c_u/(\gamma \sin\alpha \cos\alpha)$ for excedido, o talude rompe sob o próprio peso e não há solução

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Chu, S.C. (1991). Rankine analysis of active and passive pressures on dry sands. Soils and Foundations, 31(4), 115–120.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning.

Mazindrani, Z.H. e Ganjali, M.H. (1997). Lateral earth pressure problem of cohesive backfill with inclined surface. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 123(2), 110–112.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o próprio motor de cálculo do módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O módulo abre com o muro do Exemplo 4 (H = 3.658 m, γ = 18.07 kN/m³).

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva a inclinação do próprio muro, a inclinação do reaterro, as camadas e o lençol freático; o módulo fornece em conjunto a força, a sua direção e a altura de aplicação.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.

Para utilização em aulas: info@geoterva.com