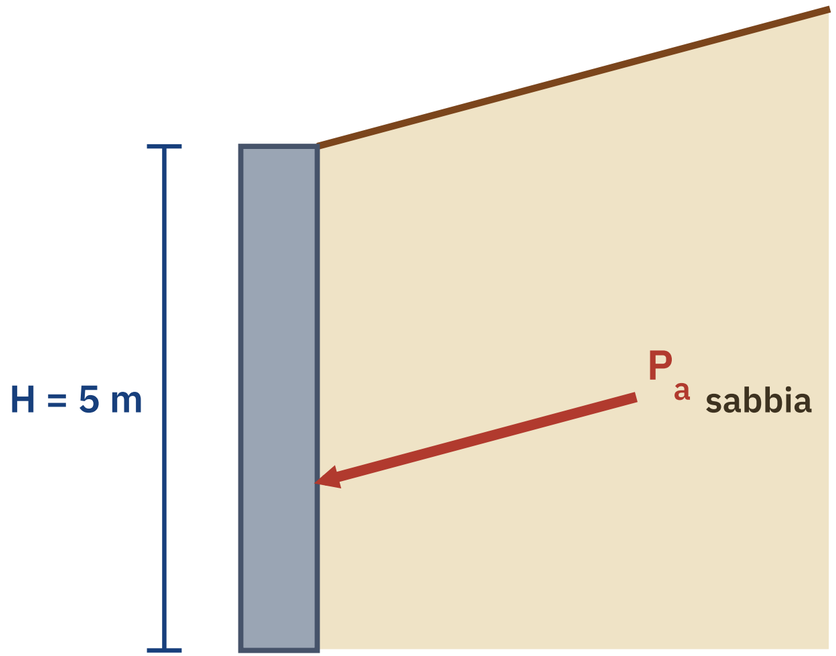
Lezione di geotecnica · Spinta delle terre

Rankine: terrapieno inclinato e muro inclinato

Lezione: soluzione di Rankine quando la superficie del terrapieno è inclinata o il paramento del muro è inclinato; spinta parallela alla superficie, coefficienti K, terrapieno coesivo e stratificato; esempi di calcolo per ogni argomento.

- Terrapieno inclinato
- Attiva e passiva
- Muro inclinato · Chu (1991)
- Terrapieno coesivo
- Terrapieno stratificato



Introduzione

Che cosa si impara in questa lezione?

- Che, quando la superficie del terrapieno è inclinata, la spinta è **parallela alla superficie**, e perché K_a e K_p variano con α
- La relazione $K_aK_p = \cos^2\alpha$ e il limite **$\alpha \leq \varphi'$**
- La soluzione di **Chu (1991)** per muro inclinato e terrapieno inclinato: ψ, $K_{(R)}$, β e η
- Determinare **intensità, direzione (β) e posizione** della forza; separare le componenti orizzontale e verticale
- Per il terreno di riporto coesivo: il diagramma di spinta curvilineo, la profondità di trazione e, **nell'argilla non drenata**, la condizione di stabilità del pendio
- Utilizzare il K proprio di ciascuno strato negli strati paralleli alla superficie

SVOLGIMENTO DELLA LEZIONE

Ogni argomento è trattato in **tre passaggi**:

1 · **Teoria**: qual è la regola e perché è così?

2 · **Traccia**: dati e richiesto

3 · **Soluzione**: passo per passo, con i numeri

Le forze sono riferite all'unità di lunghezza del muro (kN/m); α e θ in gradi, le pressioni in kPa. Il muro è privo di attrito.

La pressione è parallela alla superficie

TEORIA

Se la superficie del terrapieno incoerente a tergo del muro forma un angolo α con l'orizzontale, le spinte di Rankine non sono più orizzontali: agiscono **parallelamente alla superficie**, cioè inclinate di α, e aumentano comunque linearmente con la profondità:

$$K_a = \cos\alpha \frac{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'}}{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'}} \qquad P_a = \tfrac{1}{2} K_a \gamma H^2$$

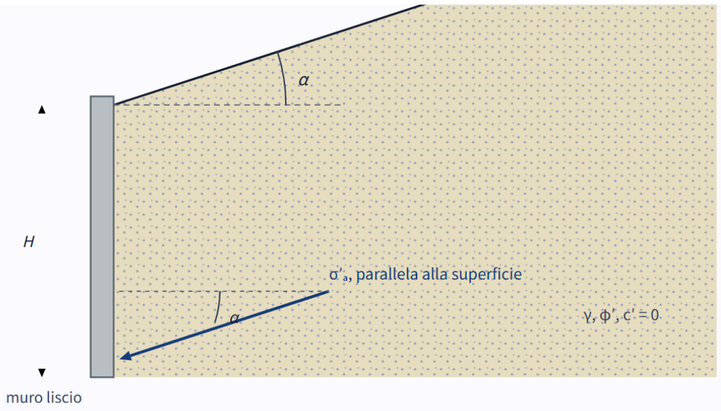
$$K_p = \cos\alpha \frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'}}{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'}} \qquad P_p = \tfrac{1}{2} K_p \gamma H^2$$

Entrambe le forze agiscono a **H/3** sopra la base e formano un angolo α con l'orizzontale: $P_h = P \cos\alpha$, $P_v = P \sin\alpha$.

Per α = 0 le equazioni si riducono a $\tan^2(45° \mp \varphi'/2)$.

Il prodotto è $\mathbf{K_a K_p = \cos^2\alpha}$; per α = 0 vale 1.

TERRAPIENO INCLINATO



K_a e K_p – α e φ′

TEORIA

ATTIVA K_a

α \ φ′	28°	30°	32°	34°	36°	38°	40°
0°	0.3610	0.3333	0.3073	0.2827	0.2596	0.2379	0.2174
5°	0.3656	0.3372	0.3105	0.2855	0.2620	0.2399	0.2192
10°	0.3802	0.3495	0.3210	0.2944	0.2696	0.2464	0.2247
15°	0.4086	0.3729	0.3405	0.3108	0.2834	0.2581	0.2346
20°	0.4605	0.4142	0.3739	0.3381	0.3060	0.2769	0.2504
25°	0.5727	0.4936	0.4336	0.3847	0.3431	0.3070	0.2750

PASSIVA K_p

α \ φ′	28°	30°	32°	34°	36°	38°	40°
0°	2.770	3.000	3.255	3.537	3.852	4.204	4.599
5°	2.715	2.943	3.196	3.476	3.788	4.136	4.527
10°	2.551	2.775	3.022	3.295	3.598	3.936	4.316
15°	2.284	2.502	2.740	3.002	3.293	3.615	3.977
20°	1.918	2.132	2.362	2.612	2.886	3.189	3.526
25°	1.434	1.664	1.894	2.135	2.394	2.676	2.987

Traccia

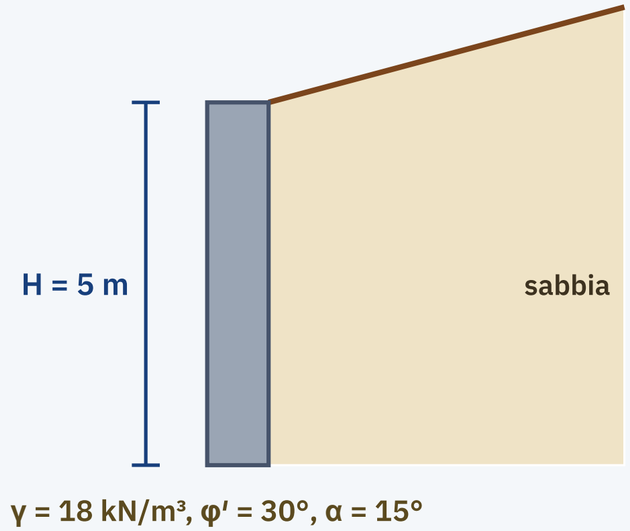
ESEMPIO

RICHIESTO

K_a, **P_a**, altezza e direzione del punto di applicazione; componenti orizzontale e verticale; confronto con il terrapieno orizzontale.

Dati

Muro	$H = 5$ **m, verticale, senza attrito**
Terreno di riporto	**sabbia asciutta:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, **inclinazione del piano di campagna** $\alpha = 15°$



Soluzione

SOLUZIONE

1 Coefficiente: cos 15° = 0.9659; √(cos²α − cos²φ′) = √(0.9330 − 0.75) = 0.4278

$$K_a = \cos\alpha \,\frac{\cos\alpha - r}{\cos\alpha + r} = 0.9659\,\frac{0.5381}{1.3937} = \mathbf{0.3729}$$

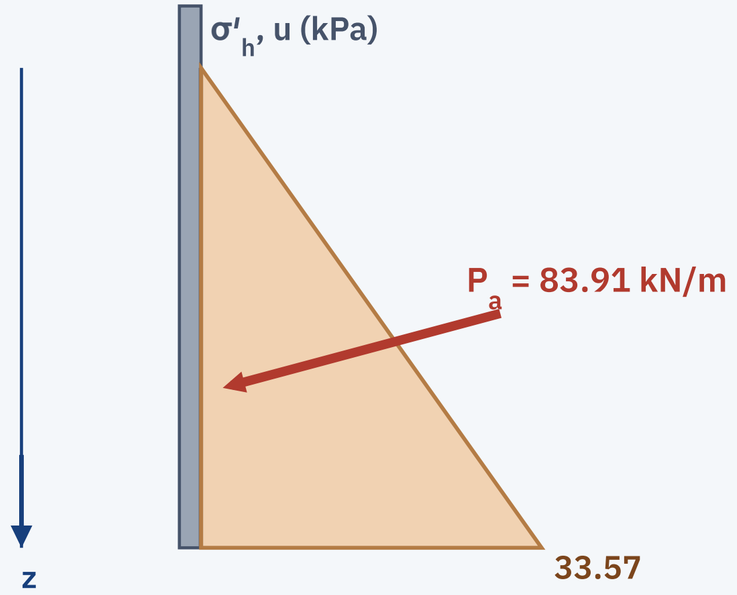
2 Pressione alla base (parallela alla superficie)

$$\sigma'_a(5) = K_a \gamma H = 0.3729(18)(5) = \mathbf{33.57}\ \text{kPa}$$

3 Forza, posizione e componenti

$$P_a = \tfrac{1}{2}(33.57)(5) = \mathbf{83.91}\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \tfrac{5}{3} = 1.67\ \text{m}$$

$$P_h = P_a \cos 15^\circ = 81.05 \qquad P_v = P_a \sin 15^\circ = 21.72\ \text{kN/m}$$



P_a = **83.91 kN/m**, inclinata di 15° rispetto all'orizzontale, a 1.67 m sopra la base. Per il terrapieno orizzontale P_a era 75.00 kN/m: l'inclinazione aumenta la forza del 12%.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

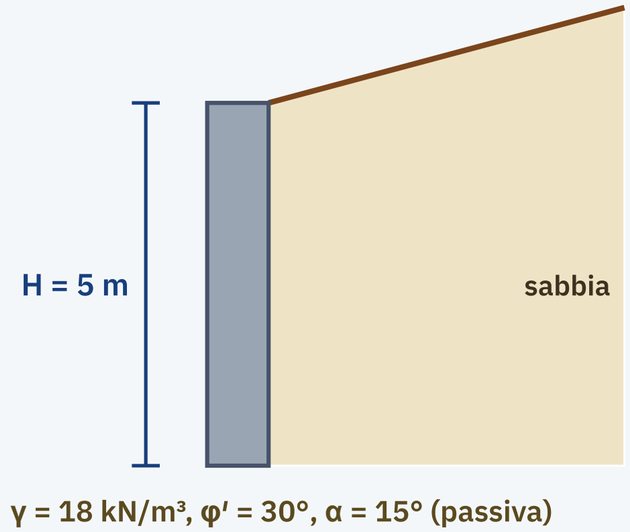
ESEMPIO

RICHIESTO

K_p, **P_p** e le loro componenti; confronto con la forza passiva nel terrapieno orizzontale.

Dati

Muro e terrapieno	**Il muro e il terrapieno dell'Esempio 1:** $H = 5$ **m,** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, $\alpha = 15°$



Soluzione

SOLUZIONE

1 Coefficiente (r = 0.4278)

$$K_p = \cos\alpha \frac{\cos\alpha + r}{\cos\alpha - r} = 0.9659 \frac{1.3937}{0.5381} = \mathbf{2.5017}$$

2 Pressione alla base e forza

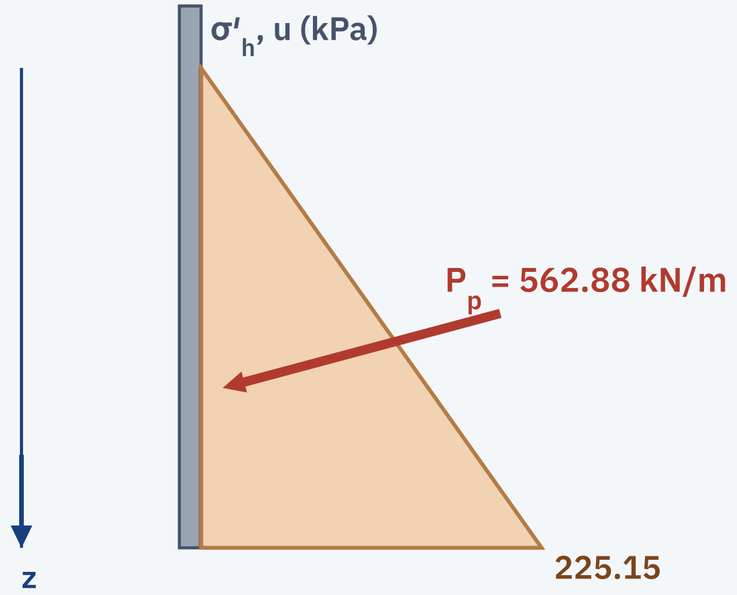
$$\sigma'_p(5) = K_p \gamma H = 2.5017(18)(5) = 225.15 \text{ kPa}$$

$$P_p = \tfrac{1}{2}(225.15)(5) = \mathbf{562.9} \text{ kN/m} \qquad \bar{z} = 1.67 \text{ m}$$

3 Componenti (15° rispetto all'orizzontale)

$$P_h = P_p \cos 15^\circ = 543.7 \qquad P_v = P_p \sin 15^\circ = 145.7 \text{ kN/m}$$

P_p = **562.9 kN/m**. Con terrapieno orizzontale era 675.0 kN/m: l'inclinazione **riduce** la resistenza passiva del 17% (mentre la forza attiva aumenta). La verifica $K_a K_p$ = 0.9330 = cos²15° risulta soddisfatta.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

condizione α ≤ φ′

TEORIA

L'espressione sotto radice è reale solo quando **cos²α ≥ cos²φ′**, cioè α ≤ φ′: un pendio più ripido di φ′ non può mantenersi in un terreno incoerente. Al limite il radicale si annulla ed entrambi i coefficienti tendono allo stesso valore:

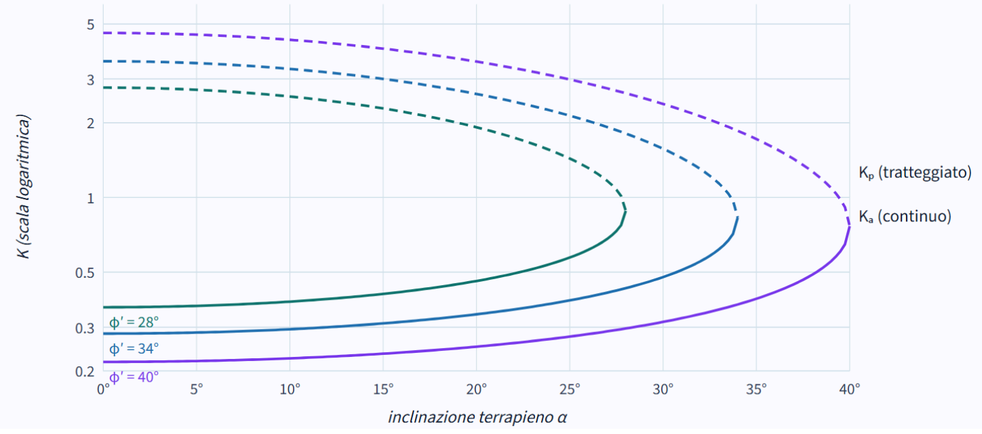
$$\alpha = \varphi' : \qquad K_a = K_p = \cos\varphi'$$

Al crescere di α, K_a aumenta e K_p diminuisce; i due si incontrano per α = φ′ (lo stato attivo e quello passivo non sono più distinguibili).

Questo è lo stato del terreno al suo angolo naturale di riposo: il terrapieno è già al limite di rottura e il movimento del muro non modifica la spinta.

Per α > φ′ non esiste soluzione; il modulo emette un'avvertenza.

K – α (scala logaritmica; φ′ = 28°, 34°, 40°)



Traccia

ESEMPIO

Dati

Terreno	**sabbia incoerente,** $\varphi' = 32^\circ$
Pendenze	$\alpha = 0^\circ,\ 10^\circ,\ 20^\circ,\ 30^\circ,\ 32^\circ$ **(e** 33°**)**

RICHIESTO

Per ciascuna inclinazione **K_a**, **K_p** e i relativi prodotti; il valore al limite; il risultato per α = 33°.

Soluzione

SOLUZIONE

1 Equazioni per ciascuna inclinazione ($\varphi' = 32°$; $\cos 32° = 0.8480$)

α	K_a	K_p	K_aK_p	$\cos^2\alpha$
0°	0.3073	3.255	1.0000	1.0000
10°	0.3210	3.022	0.9698	0.9698
20°	0.3739	2.362	0.8830	0.8830
30°	0.5741	1.306	0.7500	0.7500
32°	0.8480	0.848	0.7192	0.7192

2 Limite: $\alpha = \varphi' = 32°$ e $\alpha = 33°$

$$\alpha = 32^\circ : \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'} = 0 \Rightarrow K_a = K_p = \cos 32^\circ = \mathbf{0.8480}$$

$$\alpha = 33^\circ : \cos^2 33^\circ - \cos^2 32^\circ < 0 \Rightarrow \text{nessuna radice reale}$$

Al crescere di α, K_a passa da 0.307 → 0.574 e K_p da 3.25 → 1.306; per ogni α si ha $K_aK_p = \cos^2\alpha$. Per $\alpha = \varphi' = 32°$ le due grandezze diventano uguali a $\cos\varphi' = 0.848$; per $\alpha = 33°$ **non esiste soluzione** (pendio verticale).

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Paramento inclinato e terrapieno a pendenza: spinta attiva

TEORIA

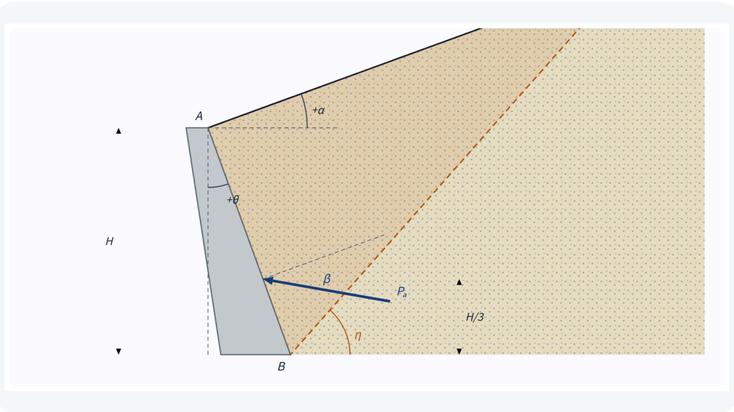
Se il paramento del muro è inclinato di θ rispetto alla verticale e la superficie del terrapieno di α rispetto all'orizzontale (entrambi positivi come in figura; muro privo di attrito), la soluzione di Chu (1991) fornisce **intensità e direzione** della forza:

$$\psi_a = \sin^{-1}\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi'} - \alpha + 2\theta$$

$$K_{a(R)} = \frac{\cos(\alpha-\theta)\sqrt{1+\sin^2\varphi' - 2\sin\varphi'\cos\psi_a}}{\cos^2\theta\left(\cos\alpha + \sqrt{\sin^2\varphi' - \sin^2\alpha}\right)}$$

$$P_a = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{a(R)} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{\sin\varphi'\sin\psi_a}{1-\sin\varphi'\cos\psi_a}$$

$$\eta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi'}$$



β: angolo della forza rispetto alla normale al paramento del muro; la forza agisce a **H/3** sopra la base. **η**: angolo del piano di base BC del cuneo di scorrimento rispetto all'orizzontale.

Per θ = 0 si riduce alla formula del terrapieno inclinato per $K_{a(R)}$ (Eq. 1), e β si riduce ad α.

Nel caso passivo i segni cambiano

TEORIA

Nel caso passivo, a parità di geometria, i segni cambiano:

$$\psi_p = \sin^{-1}\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi'} + \alpha - 2\theta \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{\sin\varphi'\sin\psi_p}{1+\sin\varphi'\cos\psi_p}$$

$$K_{p(R)} = \frac{\cos(\alpha-\theta)\sqrt{1+\sin^2\varphi' + 2\sin\varphi'\cos\psi_p}}{\cos^2\theta\left(\cos\alpha - \sqrt{\sin^2\varphi' - \sin^2\alpha}\right)}$$

$$\eta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi'} \qquad P_p = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{p(R)}$$

La forza agisce a H/3 sopra la base. Il paramento del muro e la superficie si intersecano con un angolo di 90° − |α − θ|; se tale angolo si chiude, il muro si estende lungo il pendio e l'effetto sul paramento è il peso del terreno sovrastante; il modulo accetta |α − θ| ≤ 75°.

Traccia

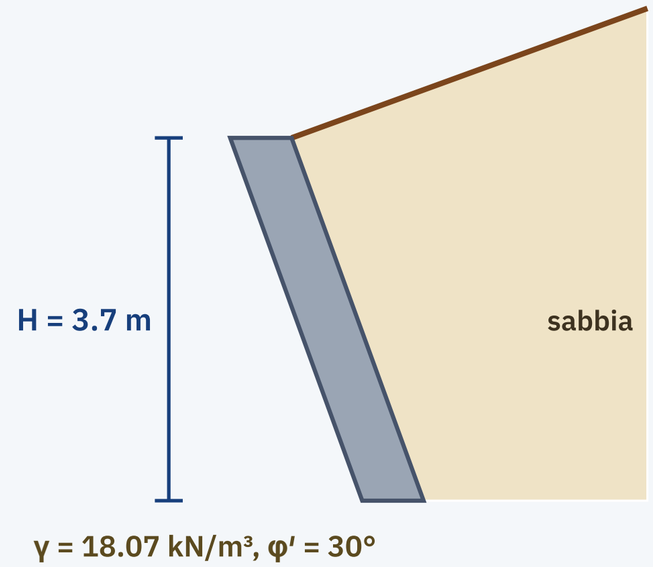
ESEMPIO

Dati

Muro	**senza attrito; paramento inclinato di $\theta = +20^\circ$ rispetto alla verticale; $H = 3.658$ m (12 ft)**
Terreno di riporto	**sabbia asciutta: $\gamma = 18.07\ \mathrm{kN/m^3}$ (115 pcf), $\varphi' = 30^\circ$; inclinazione della superficie $\alpha = +20^\circ$**

RICHIESTO

ψ_a, $K_{a(R)}$, P_a, β, η e l'altezza di applicazione. Il modulo si apre con questo muro.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Angolo ausiliario e ψ_a

$$\sin^{-1}\frac{\sin 20^\circ}{\sin 30^\circ} = 43.16^\circ$$

$$\psi_a = 43.16^\circ - 20^\circ + 2(20^\circ) = \mathbf{63.16^\circ}$$

2 Coefficiente $K_{a(R)}$

$$\sqrt{1+\sin^2 30^\circ - 2\sin 30^\circ \cos 63.16^\circ} = 0.8936 \qquad \cos^2 20^\circ = 0.8830$$

$$\sqrt{\sin^2 30^\circ - \sin^2 20^\circ} = 0.3647$$

$$K_{a(R)} = \frac{\cos 0^\circ\,(0.8936)}{0.8830\,(0.9397 + 0.3647)} = \mathbf{0.776}$$

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

3 Forza e posizione

$$P_a = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{a(R)} = \tfrac{1}{2}(18.07)(3.658)^2(0.7758) = \mathbf{93.79}\ \mathrm{kN/m}$$

$$\bar{z} = \tfrac{H}{3} = \mathbf{1.219}\ \mathrm{m}$$

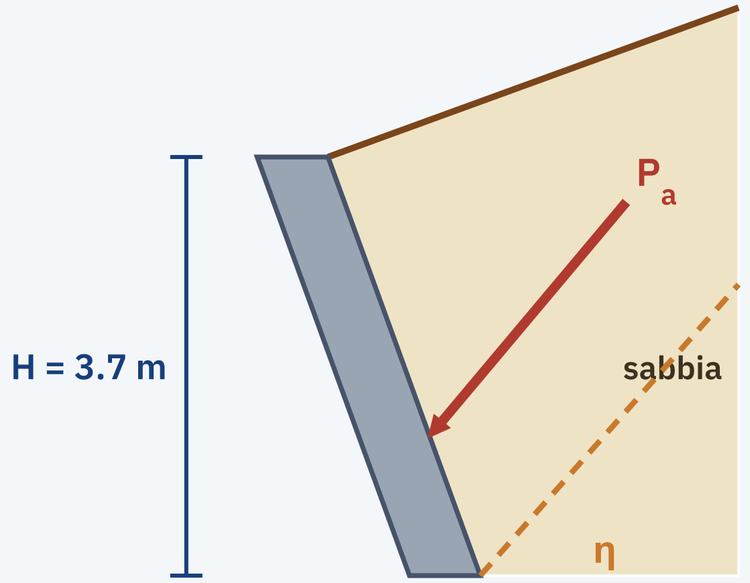
4 Direzione β e angolo del cuneo η

$$\beta = \tan^{-1}\frac{\sin 30^\circ \sin 63.16^\circ}{1 - \sin 30^\circ \cos 63.16^\circ} = \mathbf{29.95}^\circ\ (\approx 30^\circ)$$

$$\eta = 45^\circ + 15^\circ + 10^\circ - \tfrac{1}{2}(43.16^\circ) = \mathbf{48.42}^\circ$$

5 Componenti (perpendicolari e parallele al paramento)

$$N = P_a \cos\beta = 81.27 \qquad T = P_a \sin\beta = 46.83\ \mathrm{kN/m}$$



P_a = **93.79 kN/m** (6,424 lb/ft nelle unità del sistema US), **30.0°** rispetto alla normale al paramento, a H/3 = 1.22 m sopra la base.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

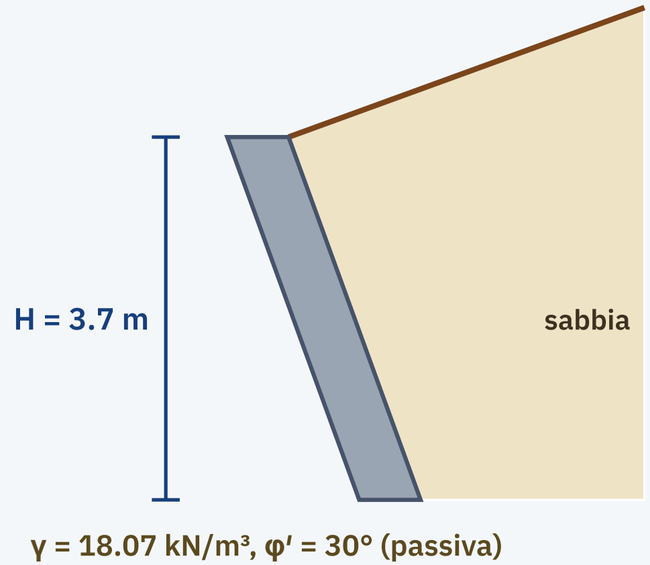
ESEMPIO

RICHIESTO

Ψ_p, **$K_{p(R)}$**, **P_p**, **β** e **η**; confronto con la condizione attiva.

Dati

Muro e terrapieno	**Il muro e il terrapieno dell'Esempio 4:** $\theta = +20^\circ,\ \alpha = +20^\circ,\ \varphi' = 30^\circ,\ \gamma = 18.07\ \mathrm{kN/m^3},\ H = 3.658$ **m**



Soluzione

SOLUZIONE

1 Ψ_p e $K_{p(R)}$

$$\psi_p = 43.16^\circ + 20^\circ - 2(20^\circ) = \mathbf{23.16^\circ}$$

$$K_{p(R)} = \frac{\cos 0^\circ \sqrt{1 + \sin^2 30^\circ + 2 \sin 30^\circ \cos 23.16^\circ}}{\cos^2 20^\circ \left(\cos 20^\circ - \sqrt{\sin^2 30^\circ - \sin^2 20^\circ}\right)} = \mathbf{2.901}$$

2 Forza, direzione e angolo del cuneo

$$P_p = \tfrac{1}{2}(18.07)(3.658)^2(2.9010) = \mathbf{350.7}\ \mathrm{kN/m}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\sin 30^\circ \sin 23.16^\circ}{1 + \sin 30^\circ \cos 23.16^\circ} = \mathbf{7.67^\circ} \qquad \eta = \mathbf{61.58^\circ}$$

P_p = **350.7 kN/m**, β = 7.7°; la forza attiva dello stesso muro era 93.79 kN/m (rapporto 3.7). In condizioni passive la forza è quasi perpendicolare al paramento (β piccolo), mentre in condizioni attive è inclinata di ~30°.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Come cambia la forza al variare dell'inclinazione del paramento θ?

TEORIA

Mantenendo costante l'inclinazione del terrapieno (α = 20°, φ′ = 30°) e ruotando soltanto il paramento del muro, $K_{a(R)}$ e β variano:

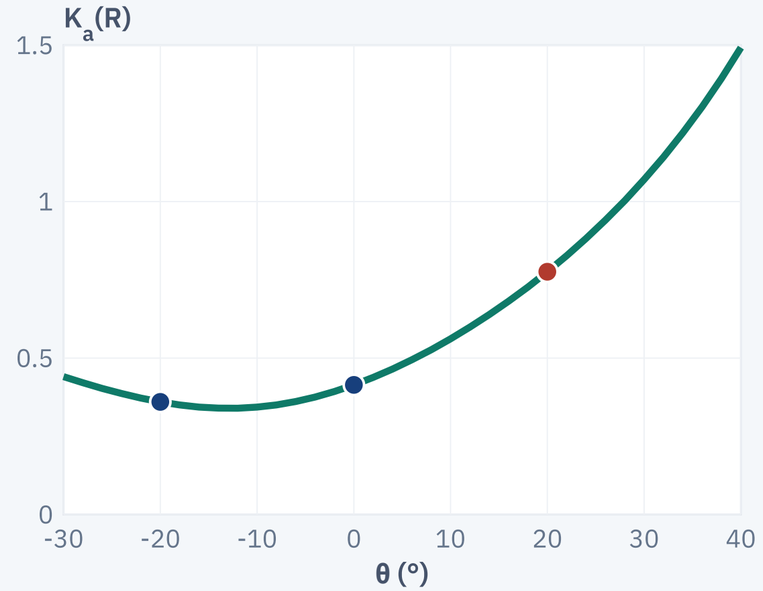
θ	$K_{a(R)}$	β
−20°	0.360	-15.5°
0°	0.414	20.0°
+20°	0.776	30.0°

Se θ è positivo (il paramento si appoggia sulla sommità del terrapieno), il terrapieno grava sulla sommità del paramento e la forza aumenta; se negativo, diminuisce.

Per θ = 0 e α = 20°, β = α = 20°: la forza è parallela alla superficie.

$K_{(R)}$ comprende insieme le due componenti della forza **parallela e perpendicolare** al paramento; per la sola componente orizzontale si assume P cos(β + θ).

$K_{a(R)}$ – θ (α = 20°, φ′ = 30°)



Mazindrani e Ganjali (1997)

TEORIA

Per un terreno c′–φ′ con superficie inclinata di α dietro un muro verticale e privo di attrito, la spinta attiva alla profondità:

$$\sigma'_a = \gamma z\, K'_a \cos\alpha \qquad r = \frac{c'}{\gamma z}$$

$$K'_a = \frac{2\cos^2\alpha + 2r\cos\varphi'\sin\varphi' - \sqrt{D}}{\cos^2\varphi'} - 1$$

$$D = 4\cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'\right) + 4r^2\cos^2\varphi' + 8r\cos^2\alpha\sin\varphi'\cos\varphi'$$

$$z_c = \frac{2c'}{\gamma}\sqrt{\frac{1+\sin\varphi'}{1-\sin\varphi'}}$$

K'_a dipende dalla profondità tramite c′/γz: la pressione **non è lineare**; è negativa sopra il piano di campagna e la profondità della fessura di trazione z_c è indipendente dall'inclinazione.

Nel caso passivo il segno davanti alla radice diventa +. α = 0 → Rankine ($\sigma'_a = K_a\gamma z - 2c'\sqrt{K_a}$); c′ = 0 → Eq. 1.

Nel calcolo fessurato si integra la parte sotto z_c; in quello non fessurato si integra l'intera altezza; vale solo per θ = 0.

PRESSIONE PARALLELA ALLA SUPERFICIE

Come nel caso incoerente, la pressione agisce **parallelamente** alla superficie, cioè inclinata di α rispetto all'orizzontale; la componente della forza perpendicolare al paramento è P cos α.

Traccia

ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 5$ **m, verticale, senza attrito**
Terreno di riporto	$\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 25°,\ c' = 10$ **kPa; inclinazione del piano di campagna** $\alpha = 10°$

RICHIESTO

z_c, la pressione alla base, P_a in condizioni fessurate e non fessurate e l'altezza di applicazione; confronto con terrapieno orizzontale.

Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

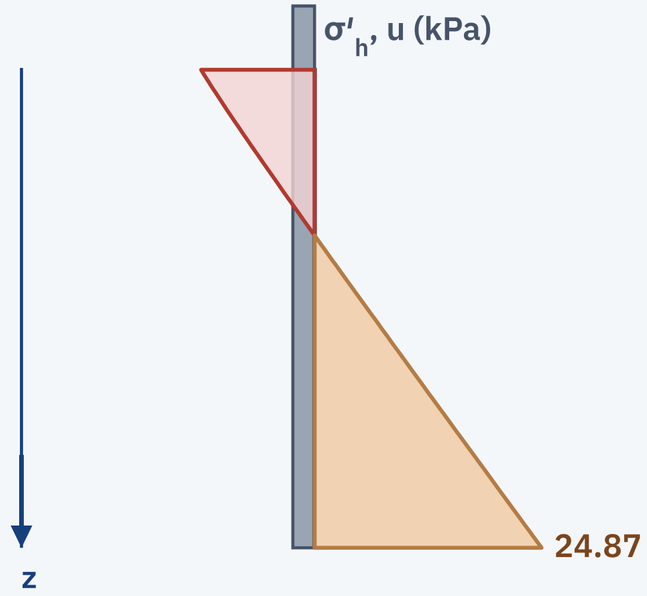
1 Profondità della zona tesa (indipendente dalla pendenza)

$$z_c = \frac{2(10)}{18}\sqrt{\frac{1+\sin 25^\circ}{1-\sin 25^\circ}} = 1.111(1.5697) = \mathbf{1.744}\ \text{m}$$

2 Alla base (z = 5 m): r = c′/γz = 10/(18·5) = 0.1111

$$D = 0.9467 \qquad K_a' = 0.2806$$

$$\sigma_a'(5) = \gamma z K_a' \cos\alpha = 18(5)(0.2806)\cos 10^\circ = \mathbf{24.87}\ \text{kPa}$$



Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

3 Forza nella zona fessurata (area del diagramma curvo da z_c a H, integrazione numerica)

$$P_a = \int_{z_c}^{H} \sigma'_a \, dz = \mathbf{40.33}\ \mathrm{kN/m}\ (\text{parallelo alla superficie, } 10^\circ)$$

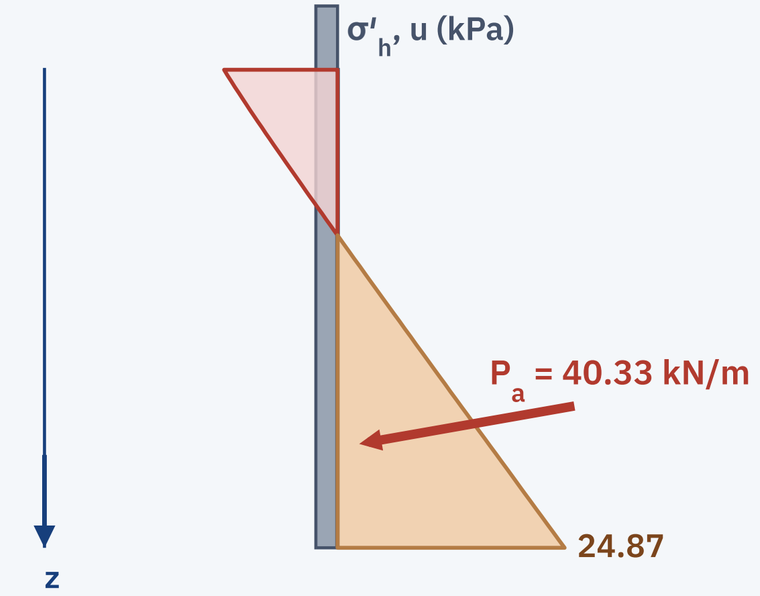
$$\bar{z} = 1.08\ \mathrm{m}\ (\text{dalla base})$$

4 Confronto

$$\text{senza fessura: } P_a = 29.16\ \mathrm{kN/m}$$

$$\text{riempimento orizzontale: } P_a = \tfrac{1}{2}(23.79)(3.256) = 38.72\ \mathrm{kN/m}$$

La forza con la fessura è pari a **40.33 kN/m**, maggiore del 38% rispetto al caso senza fessura; rispetto al terrapieno orizzontale (38.72 kN/m), l'inclinazione ha aumentato la forza del 4%. Il valore con la fessura è il valore di progetto.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Strati paralleli alla superficie

TEORIA

Se il terrapieno è costituito da strati **paralleli alla superficie** (un sondaggio verticale dietro il muro interseca ovunque gli stessi spessori), ogni strato è valutato con i propri γ, φ′ e c′ sotto il peso del terreno sovrastante, $\sigma'_v = \Sigma \gamma_i h_i$:

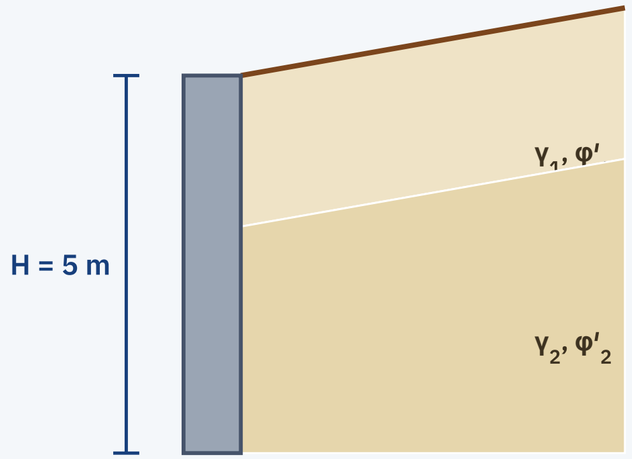
$$\sigma' = \sigma'_v \frac{K_{(R)} \cos\theta}{1 + \tan\theta \tan\alpha} \qquad \theta = 0 : \ \sigma' = \sigma'_v K_{(R)}$$

Poiché K cambia al confine tra gli strati, la pressione **subisce un salto**; la forza di ciascuno strato si scompone nelle componenti N_i perpendicolare e T_i parallela al paramento; $P = \sqrt{(N^2 + T^2)}$, $\beta = \tan^{-1}(T/N)$.

Il **sovraccarico** q si aggiunge a σ'_v come uno strato di peso q/cos α in superficie; al di sotto del livello di **acqua** si utilizza γ′, mentre u agisce perpendicolarmente al muro.

Questa è l'estensione da parte del modulo delle soluzioni di Chu e Mazindrani–Ganjali ai terreni stratificati (in letteratura non esiste una soluzione in forma chiusa per terreni stratificati); per un singolo strato riproduce la soluzione in forma chiusa entro 10^{-8}.

STRATI PARALLELI ALLA SUPERFICIE



Traccia

ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 5$ **m, verticale, senza attrito**
Terreno di riporto	**inclinazione del piano di campagna** $\alpha = 10°$ **; due strati paralleli alla superficie (spessore verticale)**
Strato 1 (2 m)	$\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30°$
Strato 2 (3 m)	$\gamma = 19\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 35°$

RICHIESTO

In ciascuno strato, le pressioni, **P**, **N**, **T** e l'altezza della risultante.

Soluzione (1/2)

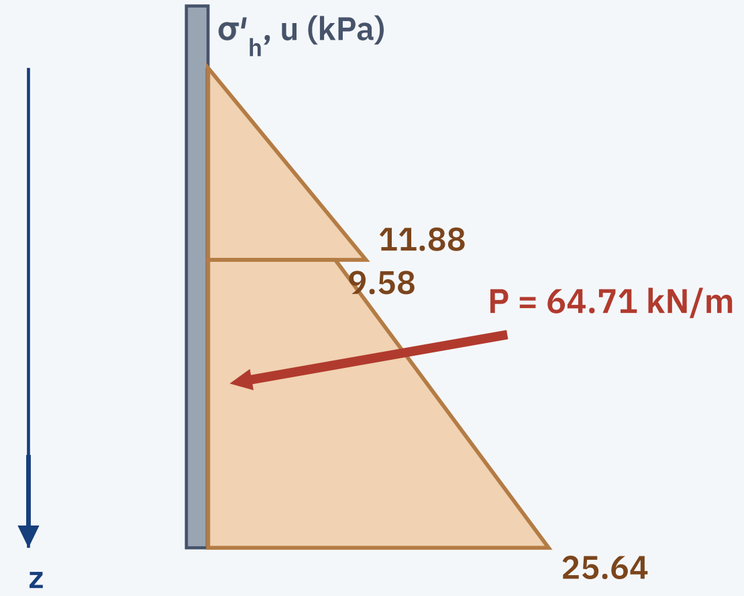
SOLUZIONE

1 Coefficienti (α = 10°)

$$K_1(30^\circ) = \mathbf{0.3495}$$
$$K_2(35^\circ) = \mathbf{0.2818}$$

2 Tensioni verticali: al confine 17(2) = 34; alla base 34 + 19(3) = 91 kPa

$$\sigma'_1 = 0.3495(34) = \mathbf{11.88}\ \text{kPa}\ (\text{sommità})$$
$$\sigma'_2 = 0.2818(34) = \mathbf{9.58}\ \text{kPa}\ (\text{base})$$
$$\sigma'(5) = 0.2818(91) = \mathbf{25.64}\ \text{kPa}$$



Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

3 Forze (parallele alla superficie): triangolo superiore · rettangolo inferiore · triangolo inferiore

$$P = \tfrac{1}{2}(2)(11.88) + 3(9.58) + \tfrac{1}{2}(3)(16.06) = 11.88 + 28.74 + 24.09 = \mathbf{64.71}\ \mathrm{kN/m}$$

4 Componenti e altezza di applicazione

$$N = P\cos 10^\circ = 63.73 \qquad T = P\sin 10^\circ = 11.24\ \mathrm{kN/m}$$

$$\beta = \tan^{-1}(T/N) = 10^\circ \qquad \bar{z} = \mathbf{1.71}\ \mathrm{m}$$

P = **64.71 kN/m**, N = 63.73 kN/m perpendicolare al paramento; a 1.71 m sopra la base. Al confine la pressione **scende** da 11.88 → 9.58 kPa, perché il valore di φ′ dello strato sottostante è maggiore; σ'_v è invece continua.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Condizione di stabilità del pendio

TEORIA

L'argilla non drenata ($\varphi_u = 0$, c_u, tensione totale) segue la stessa relazione; si assume $\varphi' = 0$ e $c' = c_u$:

$$K'_a = 2\cos^2\alpha - 2\sqrt{r^2 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha} - 1 \qquad r = \frac{c_u}{\gamma z}$$

La soluzione esiste solo **finché il pendio si mantiene stabile**: la tensione tangenziale su piani paralleli alla superficie non può superare la coesione:

$$\tau = \gamma z \sin\alpha\cos\alpha \leq c_u \;\Rightarrow\; z_{max} = \frac{c_u}{\gamma \sin\alpha\cos\alpha} \qquad z_c = \frac{2c_u}{\gamma}$$

Il modulo verifica questa condizione fino alla base del muro; se il muro è più alto di z_{max}, il calcolo si interrompe.

Per $\alpha = 0$, $\sigma_a = \gamma z - 2c_u$, fessura di trazione a $2c_u/\gamma$.

PERCHÉ ESISTE UN LIMITE?

Al di sotto di una superficie inclinata, la tensione tangenziale su ogni piano parallelo alla superficie aumenta con la profondità; l'argilla può sopportare tale tensione solo fino a c_u. A maggiore profondità il pendio scivola sotto il proprio peso.

Traccia

ESEMPIO

Dati

Terreno di riporto	**argilla satura, non drenata:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$, $c_u = 20$ **kPa; inclinazione della superficie** $\alpha = 15°$
Muro	$H = 4$ **m (e 5 m), verticale, senza attrito**

RICHIESTO

z_{max}, z_c, la pressione alla base e la P_a in presenza di fessura; che cosa accade per H = 5 m?

Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Limite di rottura e profondità della zona tesa

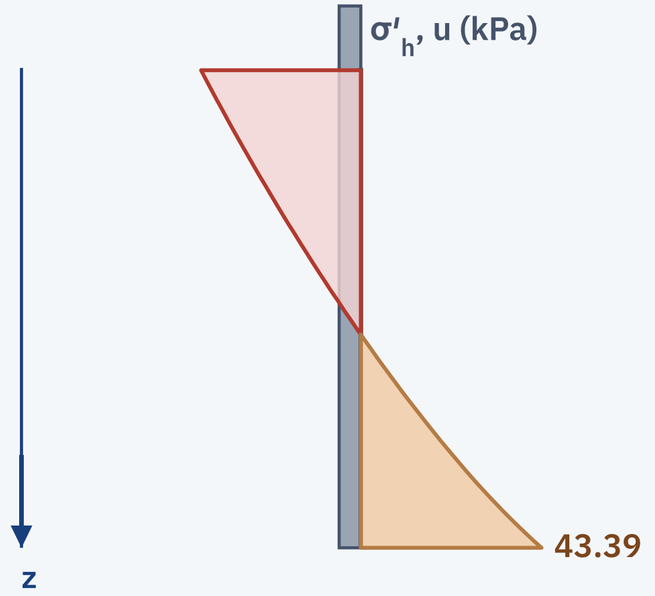
$$z_{max} = \frac{20}{18 \sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \mathbf{4.44}\ \text{m}$$

$$z_c = \frac{2c_u}{\gamma} = \frac{40}{18} = \mathbf{2.22}\ \text{m}$$

2 H = 4 m: τ(4) = 18(4) sin15° cos15° = 18.0 ≤ 20 kPa: il pendio è stabile; alla base r = 20/(18·4) = 0.2778

$$K'_a = 2\cos^2 15^\circ - 2\sqrt{r^2 - \sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ} - 1 = 0.6239$$

$$\sigma_a(4) = \gamma z K'_a \cos\alpha = 18(4)(0.6239)\cos 15^\circ = \mathbf{43.39}\ \text{kPa}$$



Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

3 Forza con fessura (da z_c a 4 m)

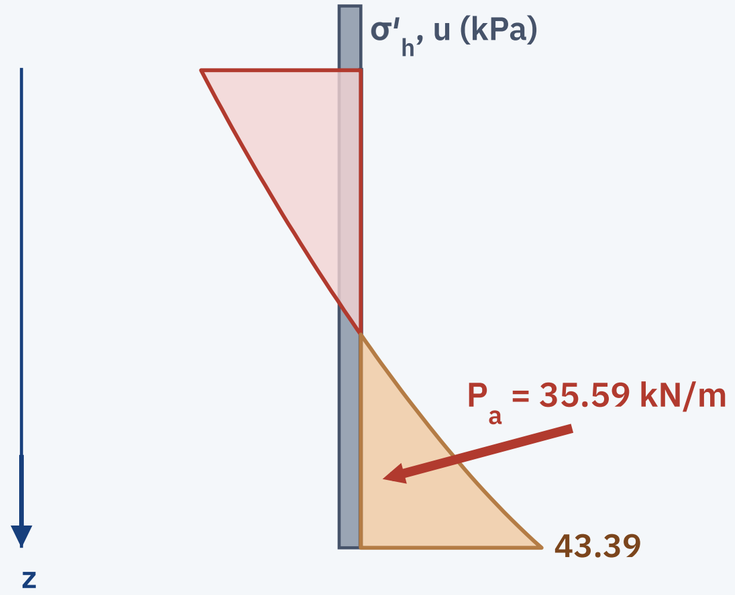
$$P_a = \int_{z_c}^{H} \sigma_a \, dz = \mathbf{35.59}\ \text{kN/m}\ (15^\circ \text{ rispetto all'orizzontale})$$

$$\bar{z} = 0.57\ \text{m} \qquad \text{senza fessura: } P_a = -9.37\ \text{kN/m}$$

4 H = 5 m: τ(5) = 22.5 kPa > c_u = 20 kPa

$$\tau(5) = 18(5)\sin 15^\circ \cos 15^\circ = 22.5 > c_u \ \Rightarrow\ \text{il pendio scivola}$$

Per H = 4 m, la P_a con fessura di trazione vale **35.59 kN/m**; la forza senza fessura è negativa (−9.37 kN/m), quindi l'ipotesi di fessura risulta determinante. Poiché z_{max} = 4.44 m, per un muro di 5 m non esiste soluzione.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Ambito della soluzione

TEORIA

Il muro è privo di attrito; nella soluzione di Chu la spinta è fornita inclinata di un angolo β rispetto alla normale al muro (β deriva solo dallo stato tensionale del terreno, non dall'attrito terra-muro). Per un muro con attrito si veda il modulo Coulomb.

Il **terrapieno** è una superficie piana a pendenza uniforme; gli strati sono paralleli alla superficie. Variazioni della pendenza superficiale, berme o superfici irregolari non sono incluse in questa soluzione.

Il **terrapieno coesivo** è fornito con Mazindrani–Ganjali solo per muro verticale ($\theta = 0$); si assume una fessura di trazione fino a z_c; la fessura piena d'acqua va considerata a parte.

Geometria: il paramento del muro e la superficie devono intersecarsi con un angolo di almeno 15° ($|\alpha - \theta| \leq 75°$); in caso contrario la pressione agente sul paramento non è spinta delle terre ma il peso del terreno sovrastante.

Il **sisma** e l'**attrito terra-muro** sono fuori dall'ambito di questo modulo (Mononobe–Okabe, Coulomb).

Sintesi

Punti chiave

Terrapieno inclinato ($\alpha \le \varphi'$): la spinta è **parallela** alla superficie, $K_a = \cos\alpha\,(\cos\alpha - r)/(\cos\alpha + r)$, K_p con segno opposto; $P = \tfrac{1}{2}K\gamma H^2$ a $H/3$ dalla base, inclinata di α rispetto all'orizzontale

$K_aK_p = \cos^2\alpha$; all'aumentare di α, K_a aumenta e K_p diminuisce; per $\alpha = \varphi'$ entrambi valgono $\cos\varphi'$, mentre per $\alpha > \varphi'$ non esiste soluzione

Chu (1991): $\psi_a = \sin^{-1}(\sin\alpha/\sin\varphi') - \alpha + 2\theta$; $K_{a(R)}$, β e η in forma chiusa; la forza è inclinata di β rispetto alla normale al paramento

Inclinazione del muro θ: se positiva la forza aumenta, se negativa diminuisce; nel passivo $\psi_p = \sin^{-1}(\ldots) + \alpha - 2\theta$

Nel terrapieno **coesivo** K'_a dipende dalla profondità e il diagramma è curvo; $z_c = (2c'/\gamma)\sqrt{((1+\sin\varphi')/(1-\sin\varphi'))}$ è indipendente dall'inclinazione; la forza in presenza di fessura è essenziale

Rilevato **stratificato**: $\sigma' = \sigma'_v K_{(R)}$; salto al confine, $P = \sqrt{(N^2 + T^2)}$

Argilla non drenata: se si supera $z_{max} = c_u/(\gamma \sin\alpha \cos\alpha)$ il pendio scivola sotto il proprio peso e non esiste soluzione

Bibliografia

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Chu, S.C. (1991). Rankine analysis of active and passive pressures on dry sands. Soils and Foundations, 31(4), 115–120.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning.

Mazindrani, Z.H. e Ganjali, M.H. (1997). Lateral earth pressure problem of cohesive backfill with inclined surface. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 123(2), 110–112.

NOTA

Tutti gli esempi numerici sono prodotti con il motore di calcolo del modulo stesso; il modulo restituisce gli stessi valori. Il modulo si apre con il muro dell'Esempio 4 (H = 3,658 m, γ = 18.07 kN/m³).

GeoTerva

Calcoli geotecnici online

Dalla teoria alla pratica

Inserire in GeoTerva l'inclinazione del proprio muro, l'inclinazione del terrapieno, gli strati e la falda freatica; il modulo fornisce insieme la forza, la sua direzione e la sua altezza di applicazione.

Aprire il modulo →

Pagina di teoria →

Aprire dallo smartphone

I moduli di prova non richiedono registrazione.

Se si desidera utilizzarli nelle proprie lezioni: info@geoterva.com