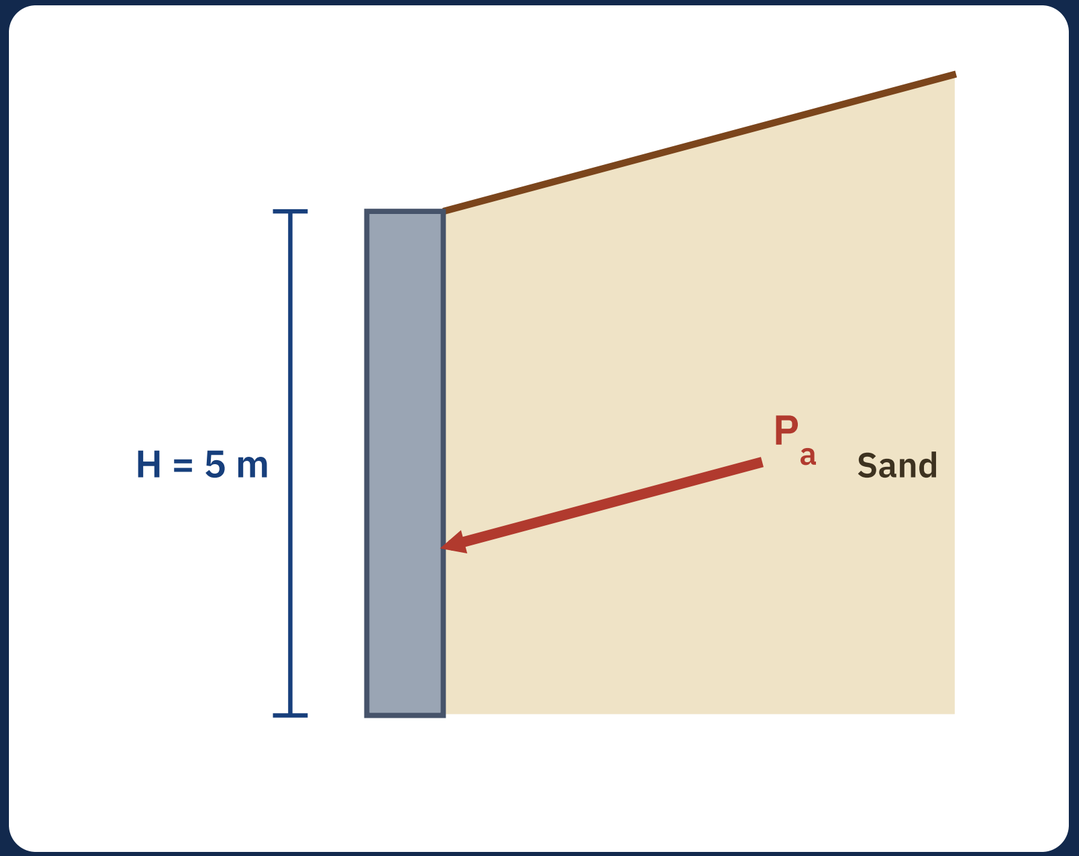
Geotechnische Vorlesung · Erddruck

Rankine: geneigte Hinterfüllung und geneigte Wand

Vorlesung: Rankine-Lösung bei geneigter Geländeoberfläche der Hinterfüllung oder geneigter Wandfläche; Druck parallel zur Oberfläche, K-Beiwerte, bindige und geschichtete Hinterfüllung; Rechenbeispiele zu jedem Thema.

- Geneigte Hinterfüllung
- Aktiver und passiver Erddruck
- Geneigte Wand · Chu (1991)
- Bindige Hinterfüllung
- Geschichtete Hinterfüllung



Einführung

Was lernen wir in dieser Vorlesung?

- Dass bei geneigter Hinterfüllungsoberfläche der Erddruck **parallel zur Oberfläche** wirkt und warum K_a und K_p mit α veränderlich sind
- Die Beziehung $K_a K_p = \cos^2\alpha$ und die Grenze **$\alpha \leq \varphi'$**
- Die Lösung nach **Chu (1991)** für eine geneigte Wand + geneigte Hinterfüllung: ψ, $K_{(R)}$, β und η
- Die **Größe, Richtung (β) und Lage** der Kraft zu bestimmen; ihre horizontalen und vertikalen Komponenten zu trennen
- Bei bindiger Hinterfüllung: das gekrümmte Erddruckdiagramm, die Zughöhe und **bei undräniertem Ton** die Standsicherheitsbedingung der Böschung
- In zur Oberfläche parallelen Schichten das jeweilige K jeder Schicht zu verwenden

VORLESUNGSABLAUF

Jedes Thema wird in **drei Schritten** behandelt:

1 · **Theorie**: Wie lautet die Regel, warum ist sie so?

2 · **Aufgabe**: Gegeben und Gesucht

3 · **Lösung**: Schritt für Schritt, mit Zahlen

Die Kräfte beziehen sich auf die Einheitslänge der Wand (kN/m); α und θ in Grad, die Drücke in kPa. Die Wand ist reibungsfrei.

Der Druck ist parallel zur Oberfläche

THEORIE

Wenn die Oberfläche der nichtbindigen Hinterfüllung hinter der Wand mit der Horizontalen einen Winkel α bildet, sind die Rankine-Drücke nicht mehr horizontal: Sie wirken **parallel zur Oberfläche**, d. h. unter α geneigt, und nehmen weiterhin linear mit der Tiefe zu:

$$K_a = \cos\alpha \frac{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'}}{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'}} \qquad P_a = \tfrac{1}{2} K_a \gamma H^2$$

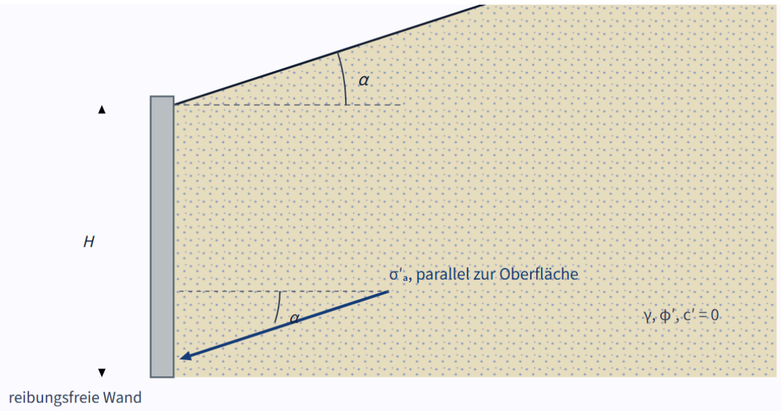
$$K_p = \cos\alpha \frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'}}{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'}} \qquad P_p = \tfrac{1}{2} K_p \gamma H^2$$

Beide Kräfte greifen **H/3** über der Sohle an und schließen mit der Horizontalen den Winkel α ein: $P_h = P \cos\alpha$, $P_v = P \sin\alpha$.

Für α = 0 gehen die Gleichungen in $\tan^2(45° \mp \varphi'/2)$ über.

Das Produkt ist $\mathbf{K_a K_p = \cos^2\alpha}$; bei α = 0 ist es 1.

GENEIGTE SCHÜTTUNG



K_a und K_p – α und φ′

THEORIE

AKTIVER K_a

α \ φ′	28°	30°	32°	34°	36°	38°	40°
0°	0.3610	0.3333	0.3073	0.2827	0.2596	0.2379	0.2174
5°	0.3656	0.3372	0.3105	0.2855	0.2620	0.2399	0.2192
10°	0.3802	0.3495	0.3210	0.2944	0.2696	0.2464	0.2247
15°	0.4086	0.3729	0.3405	0.3108	0.2834	0.2581	0.2346
20°	0.4605	0.4142	0.3739	0.3381	0.3060	0.2769	0.2504
25°	0.5727	0.4936	0.4336	0.3847	0.3431	0.3070	0.2750

PASSIVER K_p

α \ φ′	28°	30°	32°	34°	36°	38°	40°
0°	2.770	3.000	3.255	3.537	3.852	4.204	4.599
5°	2.715	2.943	3.196	3.476	3.788	4.136	4.527
10°	2.551	2.775	3.022	3.295	3.598	3.936	4.316
15°	2.284	2.502	2.740	3.002	3.293	3.615	3.977
20°	1.918	2.132	2.362	2.612	2.886	3.189	3.526
25°	1.434	1.664	1.894	2.135	2.394	2.676	2.987

Aufgabe

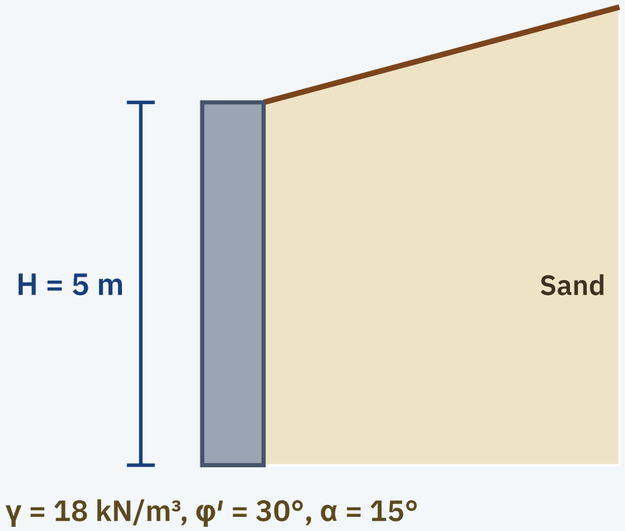
BEISPIEL

Gegeben

Wand	$H = 5$ **m, vertikal, reibungsfrei**
Auffüllung	**trockener Sand:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, **Geländeneigung** $\alpha = 15°$

GESUCHT

K_a, P_a, Höhe und Richtung der Wirkungslinie; horizontale und vertikale Komponenten; Vergleich mit horizontaler Hinterfüllung.



Lösung

LÖSUNG

1 Beiwert: cos 15° = 0.9659; √(cos²α − cos²φ′) = √(0.9330 − 0.75) = 0.4278

$$K_a = \cos\alpha \frac{\cos\alpha - r}{\cos\alpha + r} = 0.9659 \frac{0.5381}{1.3937} = \mathbf{0.3729}$$

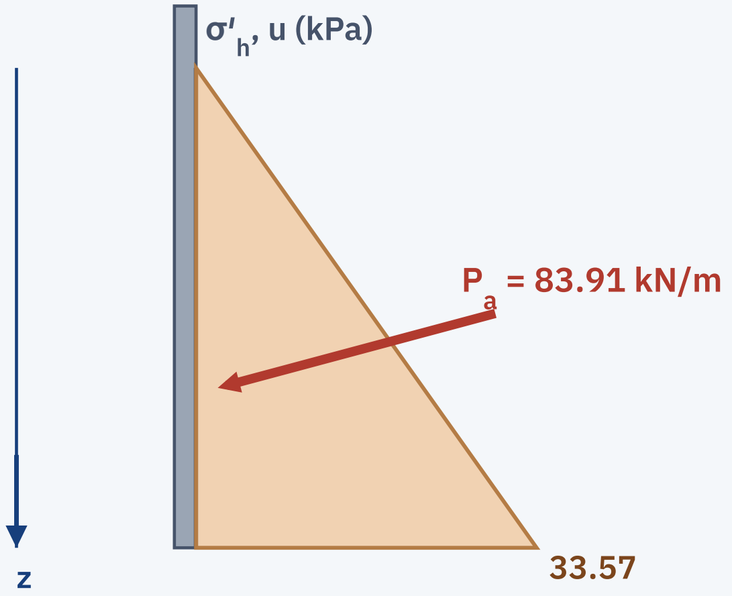
2 Druck an der Sohle (parallel zur Oberfläche)

$$\sigma'_a(5) = K_a \gamma H = 0.3729(18)(5) = \mathbf{33.57}\ \text{kPa}$$

3 Kraft, Lage und Komponenten

$$P_a = \tfrac{1}{2}(33.57)(5) = \mathbf{83.91}\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = \tfrac{5}{3} = 1.67\ \text{m}$$

$$P_h = P_a \cos 15^\circ = 81.05 \qquad P_v = P_a \sin 15^\circ = 21.72\ \text{kN/m}$$



P_a = **83.91 kN/m**, unter 15° zur Horizontalen, 1.67 m über der Sohle. Bei horizontaler Hinterfüllung betrug P_a = 75.00 kN/m: die Neigung erhöht die Kraft um 12%.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

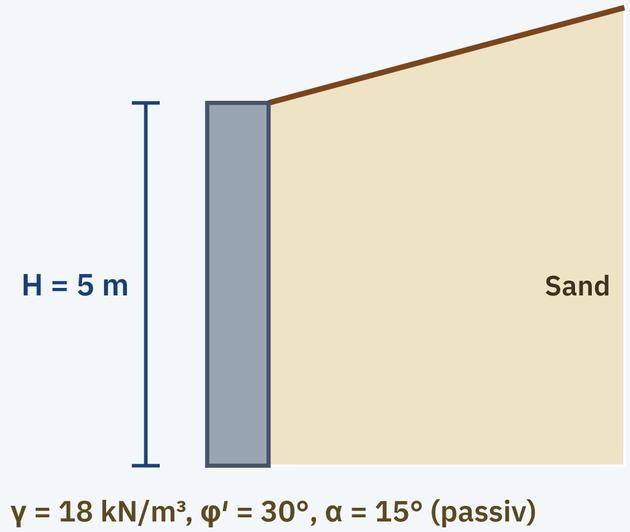
BEISPIEL

GESUCHT

K_p, **P_p** und ihre Komponenten; Vergleich mit der passiven Kraft bei horizontaler Hinterfüllung.

Gegeben

Wand und Hinterfüllung	**Die Stützwand und die Hinterfüllung aus Beispiel 1:** $H = 5$ **m,** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, $\alpha = 15°$



Lösung

LÖSUNG

1 Beiwert (r = 0.4278)

$$K_p = \cos\alpha\,\frac{\cos\alpha + r}{\cos\alpha - r} = 0.9659\,\frac{1.3937}{0.5381} = \mathbf{2.5017}$$

2 Pressung an der Sohle und Kraft

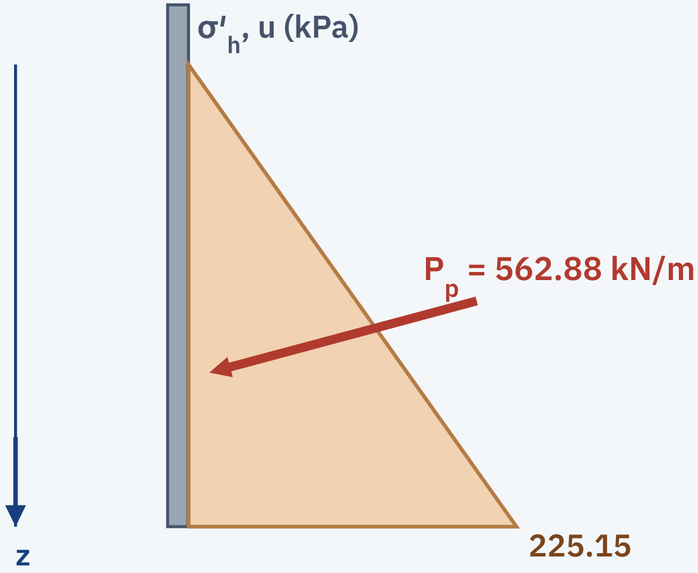
$$\sigma'_p(5) = K_p\gamma H = 2.5017(18)(5) = 225.15\ \text{kPa}$$

$$P_p = \tfrac{1}{2}(225.15)(5) = \mathbf{562.9}\ \text{kN/m} \qquad \bar{z} = 1.67\ \text{m}$$

3 Komponenten (15° zur Horizontalen)

$$P_h = P_p\cos 15^\circ = 543.7 \qquad P_v = P_p\sin 15^\circ = 145.7\ \text{kN/m}$$

P_p = **562.9 kN/m**. Bei horizontaler Hinterfüllung betrug sie 675.0 kN/m: Die Geländeneigung **verringert** den passiven Widerstand um 17 % (während die aktive Kraft zunimmt). $K_aK_p = 0.9330 = \cos^2 15°$: Der Nachweis ist erfüllt.



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Bedingung α ≤ φ′

THEORIE

Der Wurzelausdruck ist nur reell, wenn **cos²α ≥ cos²φ′**, d. h. α ≤ φ′: Eine steilere Böschung als φ′ kann in nichtbindigem Boden nicht standsicher sein. Am Grenzfall wird die Wurzel null, und beide Beiwerte streben demselben Wert zu:

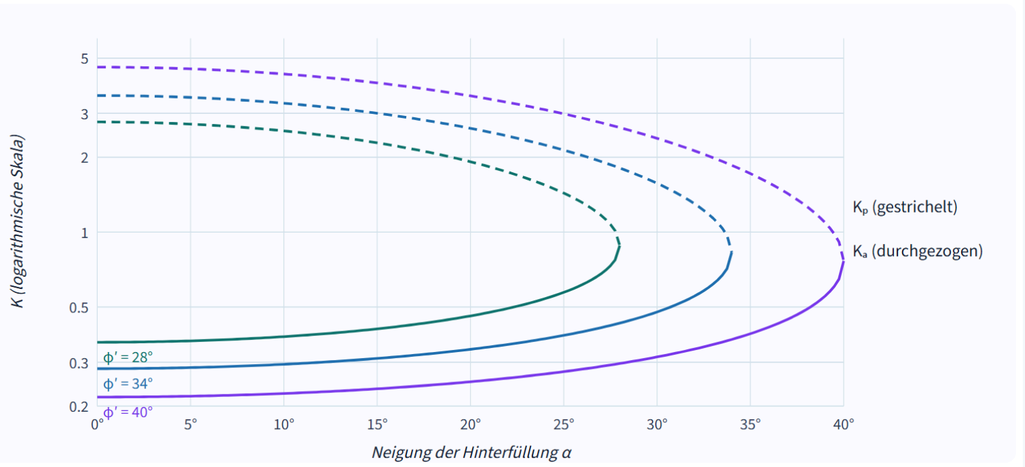
$$\alpha = \varphi' : \qquad K_a = K_p = \cos\varphi'$$

Mit steigendem α nimmt K_a zu und K_p ab; beide fallen bei α = φ′ zusammen (aktiver und passiver Zustand sind nicht mehr unterscheidbar).

Dies ist der Zustand des Bodens beim natürlichen Böschungswinkel (Schüttwinkel): Die Hinterfüllung steht bereits am Bruchrand, und die Wandbewegung ändert den Erddruck nicht.

Für α > φ′ gibt es keine Lösung; das Modul gibt eine Warnung aus.

K – α (log. Maßstab; φ′ = 28°, 34°, 40°)



Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Baugrund	**nichtbindiger Sand,** $\varphi' = 32^\circ$
Böschungen	$\alpha = 0^\circ,\ 10^\circ,\ 20^\circ,\ 30^\circ,\ 32^\circ$ **(und** 33°**)**

GESUCHT

Für jede Neigung $\mathbf{K_a}$, $\mathbf{K_p}$ und deren Produkte; der Wert am Grenzfall; das Ergebnis für α = 33°.

Lösung

LÖSUNG

1 Gleichungen für jede Neigung ($\varphi' = 32°$; $\cos 32° = 0.8480$)

α	K_a	K_p	K_aK_p	$\cos^2\alpha$
0°	0.3073	3.255	1.0000	1.0000
10°	0.3210	3.022	0.9698	0.9698
20°	0.3739	2.362	0.8830	0.8830
30°	0.5741	1.306	0.7500	0.7500
32°	0.8480	0.848	0.7192	0.7192

2 Grenzfall: $\alpha = \varphi' = 32°$ und $\alpha = 33°$

$$\alpha = 32^\circ : \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'} = 0 \Rightarrow K_a = K_p = \cos 32^\circ = \mathbf{0.8480}$$

$$\alpha = 33^\circ : \cos^2 33^\circ - \cos^2 32^\circ < 0 \Rightarrow \text{keine reelle Wurzel}$$

Mit wachsendem α steigt K_a von 0.307 → 0.574 und K_p fällt von 3.25 → 1.306; für jedes α gilt $K_aK_p = \cos^2\alpha$. Bei $\alpha = \varphi' = 32°$ werden beide gleich $\cos\varphi' = 0.848$; für $\alpha = 33°$ **existiert keine Lösung** (senkrechte Böschung).

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Geneigte Wandfläche und geneigte Hinterfüllung: aktiv

THEORIE

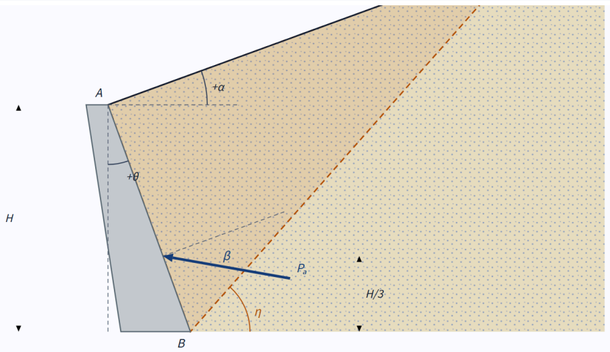
Ist die Wandfläche um θ gegen die Vertikale und die Hinterfüllungsoberfläche um α gegen die Horizontale geneigt (beide positiv wie in der Abbildung; Wand reibungsfrei), liefert die Lösung nach Chu (1991) **Betrag und Richtung** der Kraft:

$$\psi_a = \sin^{-1}\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi'} - \alpha + 2\theta$$

$$K_{a(R)} = \frac{\cos(\alpha-\theta)\sqrt{1+\sin^2\varphi' - 2\sin\varphi'\cos\psi_a}}{\cos^2\theta\left(\cos\alpha + \sqrt{\sin^2\varphi' - \sin^2\alpha}\right)}$$

$$P_a = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{a(R)} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{\sin\varphi'\sin\psi_a}{1-\sin\varphi'\cos\psi_a}$$

$$\eta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi'}$$



β: der Winkel der Kraft gegenüber der Normalen der Wandfläche; die Kraft wirkt **H/3** über der Sohle. **η**: der Winkel der Sohlfläche BC des Gleitkeils gegenüber der Horizontalen.

Für θ = 0 geht sie in die Formel für $K_{a(R)}$ bei geneigter Hinterfüllung über (Gl. 1), und β geht in α über.

Im passiven Fall ändern sich die Vorzeichen

THEORIE

Im passiven Fall ändern sich die Vorzeichen für dieselbe Geometrie:

$$\psi_p = \sin^{-1}\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi'} + \alpha - 2\theta \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{\sin\varphi'\sin\psi_p}{1+\sin\varphi'\cos\psi_p}$$

$$K_{p(R)} = \frac{\cos(\alpha-\theta)\sqrt{1+\sin^2\varphi' + 2\sin\varphi'\cos\psi_p}}{\cos^2\theta\left(\cos\alpha - \sqrt{\sin^2\varphi' - \sin^2\alpha}\right)}$$

$$\eta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi'} \qquad P_p = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{p(R)}$$

Die Kraft wirkt in einer Höhe von H/3 über der Sohle. Die Wandfläche und die Geländeoberfläche schneiden sich unter dem Winkel 90° − |α − θ|; schließt sich dieser Winkel, so erstreckt sich die Wand entlang der Böschung, und auf die Wandfläche wirkt das Gewicht des darüberliegenden Bodens; das Modul berücksichtigt |α − θ| ≤ 75°.

Aufgabe

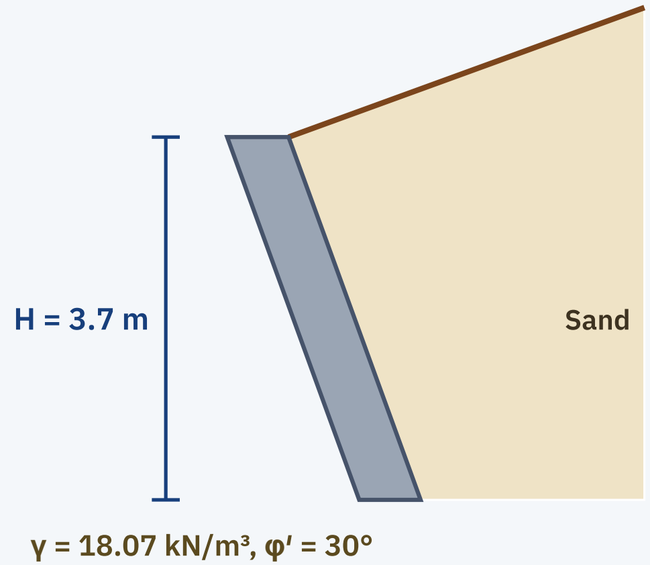
BEISPIEL

Gegeben

Wand	**reibungsfrei; Wandfläche um $\theta = +20^\circ$ gegenüber der Senkrechten geneigt; $H = 3.658$ m (12 ft)**
Auffüllung	**trockener Sand: $\gamma = 18.07\ \mathrm{kN/m^3}$ (115 pcf), $\varphi' = 30^\circ$; Geländeneigung $\alpha = +20^\circ$**

GESUCHT

ψ_a, $K_{a(R)}$, P_a, β, η und die Wirkungshöhe. Das Modul öffnet mit dieser Wand.



Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Hilfswinkel und ψ_a

$$\sin^{-1}\frac{\sin 20^\circ}{\sin 30^\circ} = 43.16^\circ$$

$$\psi_a = 43.16^\circ - 20^\circ + 2(20^\circ) = \mathbf{63.16^\circ}$$

2 Beiwert $K_{a(R)}$

$$\sqrt{1+\sin^2 30^\circ - 2\sin 30^\circ \cos 63.16^\circ} = 0.8936 \qquad \cos^2 20^\circ = 0.8830$$

$$\sqrt{\sin^2 30^\circ - \sin^2 20^\circ} = 0.3647$$

$$K_{a(R)} = \frac{\cos 0^\circ\,(0.8936)}{0.8830\,(0.9397+0.3647)} = \mathbf{0.776}$$

Lösung (2/2)

LÖSUNG

3 Kraft und Lage

$$P_a = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{a(R)} = \tfrac{1}{2}(18.07)(3.658)^2(0.7758) = \mathbf{93.79}\ \mathrm{kN/m}$$

$$\bar{z} = \tfrac{H}{3} = \mathbf{1.219}\ \mathrm{m}$$

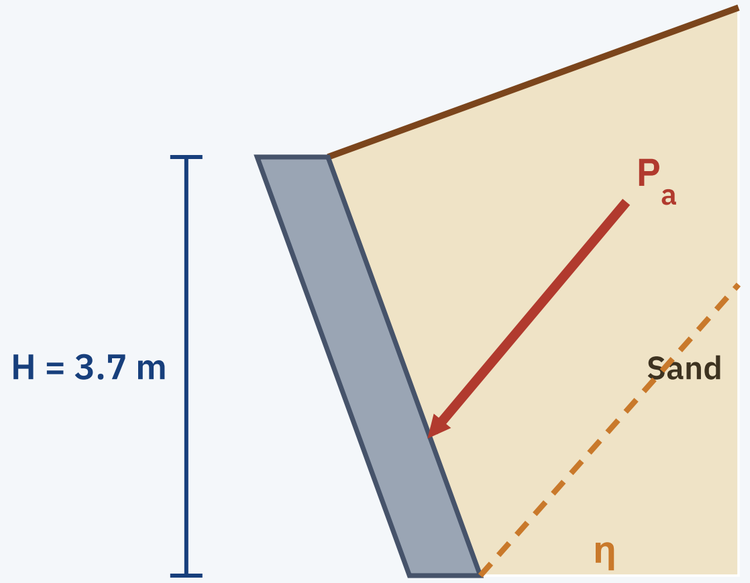
4 Streichen β und Keilwinkel η

$$\beta = \tan^{-1}\frac{\sin 30^\circ \sin 63.16^\circ}{1 - \sin 30^\circ \cos 63.16^\circ} = \mathbf{29.95}^\circ\ (\approx 30^\circ)$$

$$\eta = 45^\circ + 15^\circ + 10^\circ - \tfrac{1}{2}(43.16^\circ) = \mathbf{48.42}^\circ$$

5 Komponenten (senkrecht und parallel zur Wandfläche)

$$N = P_a \cos\beta = 81.27 \qquad T = P_a \sin\beta = 46.83\ \mathrm{kN/m}$$



P_a = **93.79 kN/m** (6 424 lb/ft in US-Einheiten), **30.0°** von der Normalen der Wandfläche, in H/3 = 1.22 m Höhe über der Sohle.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Aufgabe

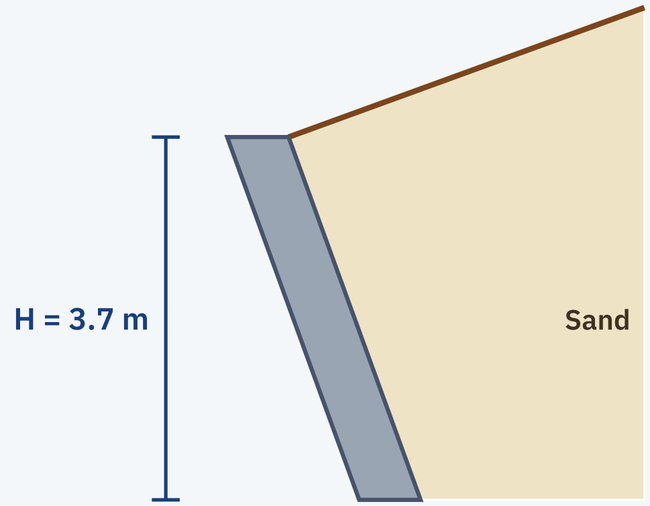
BEISPIEL

GESUCHT

ψ_p, $K_{p(R)}$, P_p, β und η; Vergleich mit dem aktiven Fall.

Gegeben

Wand und Hinterfüllung	**Die Wand und die Hinterfüllung aus Beispiel 4:** $\theta = +20^\circ$, $\alpha = +20^\circ$, $\varphi' = 30^\circ$, $\gamma = 18.07\ \mathrm{kN/m^3}$, $H = 3.658$ **m**



γ = 18.07 kN/m³, φ′ = 30° (passiv)

Lösung

LÖSUNG

1 ψ_p und $K_{p(R)}$

$$\psi_p = 43.16^\circ + 20^\circ - 2(20^\circ) = \mathbf{23.16^\circ}$$

$$K_{p(R)} = \frac{\cos 0^\circ \sqrt{1 + \sin^2 30^\circ + 2 \sin 30^\circ \cos 23.16^\circ}}{\cos^2 20^\circ \left(\cos 20^\circ - \sqrt{\sin^2 30^\circ - \sin^2 20^\circ}\right)} = \mathbf{2.901}$$

2 Kraft, Richtung und Keilwinkel

$$P_p = \tfrac{1}{2}(18.07)(3.658)^2(2.9010) = \mathbf{350.7}\ \mathrm{kN/m}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{\sin 30^\circ \sin 23.16^\circ}{1 + \sin 30^\circ \cos 23.16^\circ} = \mathbf{7.67^\circ} \qquad \eta = \mathbf{61.58^\circ}$$

P_p = **350.7 kN/m**, β = 7.7°; die aktive Kraft derselben Wand betrug 93.79 kN/m (Verhältnis 3.7). Beim passiven Erddruck steht die Kraft nahezu senkrecht auf der Wandfläche (β klein), beim aktiven ist sie dagegen um ~30° geneigt.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Wie verändert die Neigung der Wandfläche θ die Kraft?

THEORIE

Wird die Geländeneigung der Hinterfüllung konstant gehalten (α = 20°, φ′ = 30°) und nur die Wandfläche gedreht, ändern sich $K_{a(R)}$ und β:

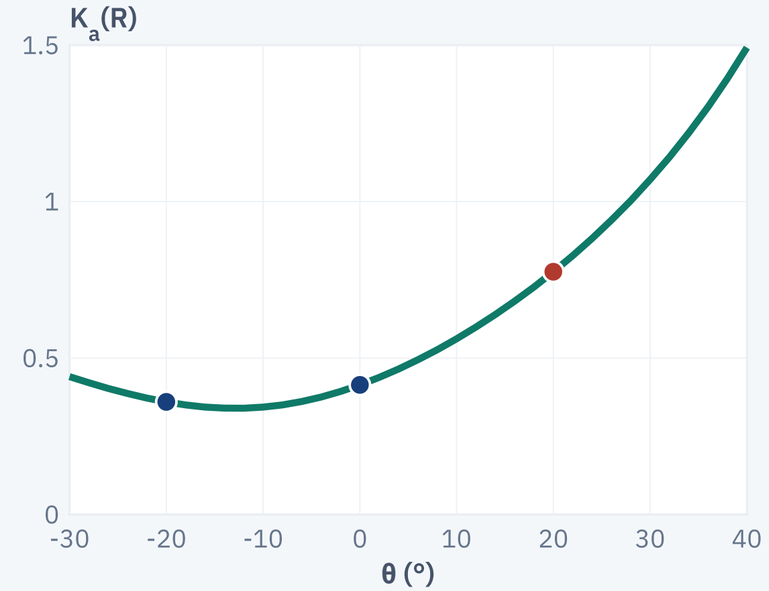
θ	$K_{a(R)}$	β
−20°	0.360	-15.5°
0°	0.414	20.0°
+20°	0.776	30.0°

Ist θ positiv (die Wandfläche neigt sich über die Oberkante der Hinterfüllung), so lagert die Hinterfüllung auf der Oberkante der Wandfläche und die Kraft nimmt zu; ist θ negativ, nimmt sie ab.

Für θ = 0 und α = 20° gilt β = α = 20°: Die Kraft ist parallel zur Oberfläche.

$K_{(R)}$ enthält gemeinsam die beiden Komponenten der Kraft **parallel und senkrecht** zur Wandfläche; für die horizontale Komponente allein wird P cos(β + θ) angesetzt.

$K_{a(R)}$ – θ (α = 20°, φ′ = 30°)



Mazindrani und Ganjali (1997)

THEORIE

Für einen c′–φ′-Boden mit unter α geneigter Oberfläche hinter einer vertikalen, reibungsfreien Wand der aktive Erddruck in der Tiefe:

$$\sigma'_a = \gamma z \, K'_a \cos\alpha \qquad r = \frac{c'}{\gamma z}$$

$$K'_a = \frac{2\cos^2\alpha + 2r\cos\varphi'\sin\varphi' - \sqrt{D}}{\cos^2\varphi'} - 1$$

$$D = 4\cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha - \cos^2\varphi'\right) + 4r^2\cos^2\varphi' + 8r\cos^2\alpha\sin\varphi'\cos\varphi'$$

$$z_c = \frac{2c'}{\gamma}\sqrt{\frac{1+\sin\varphi'}{1-\sin\varphi'}}$$

K'_a hängt über $c'/\gamma z$ von der Tiefe ab: Der Druck ist **nicht linear**; oberhalb der Geländeoberfläche ist er negativ, und die Tiefe des Zugrisses z_c ist von der Neigung unabhängig.

Im passiven Fall wird das Vorzeichen vor der Wurzel +. α = 0 → Rankine ($\sigma'_a = K_a\gamma z - 2c'\sqrt{K_a}$); c′ = 0 → Gl. 1.

Bei der Berechnung mit Rissbildung wird der Bereich unterhalb von z_c integriert, bei der Berechnung ohne Rissbildung die gesamte Höhe; gilt nur für θ = 0.

DRUCK PARALLEL ZUR OBERFLÄCHE

Wie im nichtbindigen Fall wirkt der Erddruck **parallel** zur Geländeoberfläche, d. h. unter dem Winkel α zur Horizontalen; die Komponente der Kraft senkrecht zur Wandfläche ist P cos α.

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Wand	$H = 5$ **m, vertikal, reibungsfrei**
Auffüllung	$\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 25°,\ c' = 10$ **kPa; Geländeneigung** $\alpha = 10°$

GESUCHT

z_c, der Druck an der Sohle, P_a mit und ohne Riss sowie die Wirkungshöhe; Vergleich mit horizontaler Hinterfüllung.

Lösung (1/2)

LÖSUNG

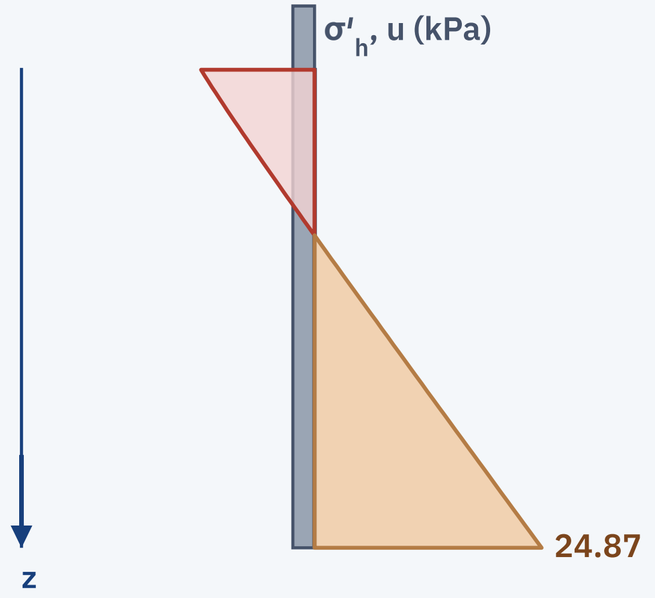
1 Zugtiefe (unabhängig von der Neigung)

$$z_c = \frac{2(10)}{18}\sqrt{\frac{1+\sin 25^\circ}{1-\sin 25^\circ}} = 1.111(1.5697) = \mathbf{1.744}\ \text{m}$$

2 An der Sohle (z = 5 m): r = c′/γz = 10/(18·5) = 0.1111

$$D = 0.9467 \qquad K_a' = 0.2806$$

$$\sigma_a'(5) = \gamma z K_a' \cos\alpha = 18(5)(0.2806)\cos 10^\circ = \mathbf{24.87}\ \text{kPa}$$



Lösung (2/2)

LÖSUNG

3 Risskraft (Fläche des gekrümmten Diagramms von z_c bis H, numerische Integration)

$$P_a = \int_{z_c}^{H} \sigma'_a \, dz = \mathbf{40.33}\ \mathrm{kN/m}\ (\text{parallel zur Oberfläche, } 10^\circ)$$

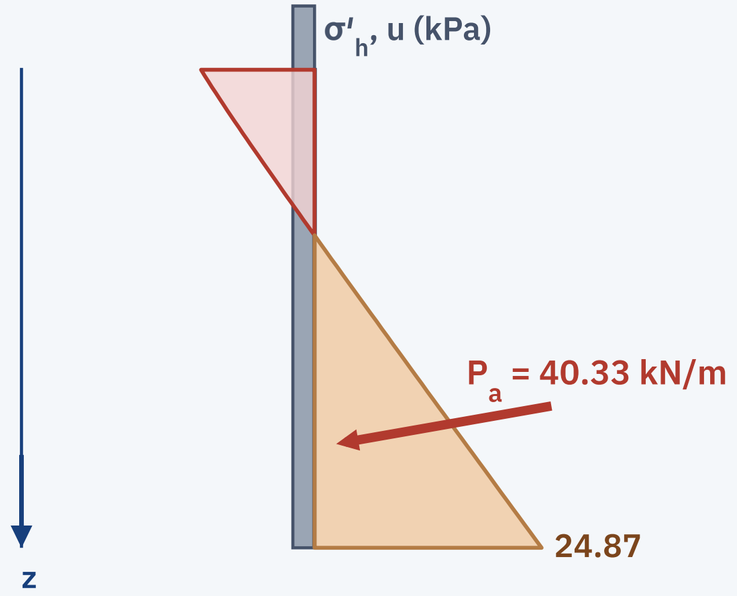
$$\bar{z} = 1.08\ \mathrm{m}\ (\text{von der Sohle})$$

4 Vergleich

$$\text{ohne Riss: } P_a = 29.16\ \mathrm{kN/m}$$

$$\text{horizontale Hinterfüllung: } P_a = \tfrac{1}{2}(23.79)(3.256) = 38.72\ \mathrm{kN/m}$$

Die Kraft bei vorhandenem Riss beträgt **40.33 kN/m** und ist damit um 38 % größer als ohne Riss; gegenüber der horizontalen Hinterfüllung (38.72 kN/m) erhöhte die Geländeneigung die Kraft um 4 %. Der Wert mit Riss ist der Bemessungswert.



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Zur Oberfläche parallele Schichten

THEORIE

Besteht die Hinterfüllung aus **zur Geländeoberfläche parallelen** Schichten (eine lotrechte Bohrung hinter der Wand durchörtert überall dieselben Mächtigkeiten), so wird jede Schicht mit ihren eigenen Werten γ, φ′ und c′ unter dem Gewicht des darüberliegenden Bodens, $\sigma'_v = \Sigma \gamma_i h_i$, betrachtet:

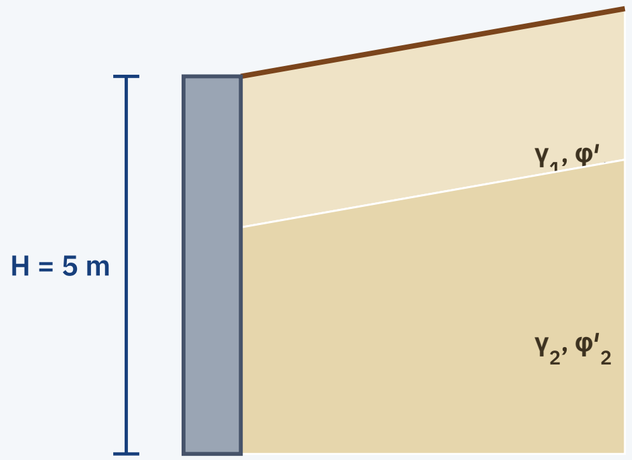
$$\sigma' = \sigma'_v \frac{K_{(R)} \cos\theta}{1 + \tan\theta \tan\alpha} \qquad \theta = 0 : \ \sigma' = \sigma'_v K_{(R)}$$

Da sich K an der Schichtgrenze ändert, **springt** der Druck; die Kraft jeder Schicht wird in die Komponenten N_i senkrecht und T_i parallel zur Wandfläche zerlegt; $P = \sqrt{(N^2 + T^2)}$, $\beta = \tan^{-1}(T/N)$.

Auflast q wird σ'_v wie eine Schicht mit dem Gewicht q/cos α an der Geländeoberfläche hinzugefügt; unterhalb des **Wasserspiegels** wird γ′ verwendet, und u wirkt senkrecht auf die Wand.

Dies ist die Erweiterung der Lösungen von Chu und Mazindrani–Ganjali auf geschichtete Böden durch das Modul (eine geschlossene Lösung für geschichtete Böden existiert in der Literatur nicht); bei einer einzelnen Schicht gibt es die geschlossene Lösung bis auf 10^{-8} wieder.

ZUR OBERFLÄCHE PARALLELE SCHICHTEN



Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Wand	$H = 5$ **m, vertikal, reibungsfrei**
Auffüllung	**Geländeneigung** $\alpha = 10°$**; zwei zur Oberfläche parallele Schichten (vertikale Mächtigkeit)**
Schicht 1 (2 m)	$\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30°$
Schicht 2 (3 m)	$\gamma = 19\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 35°$

GESUCHT

In jeder Schicht die Drücke, **P**, **N**, **T** und die Angriffshöhe.

Lösung (1/2)

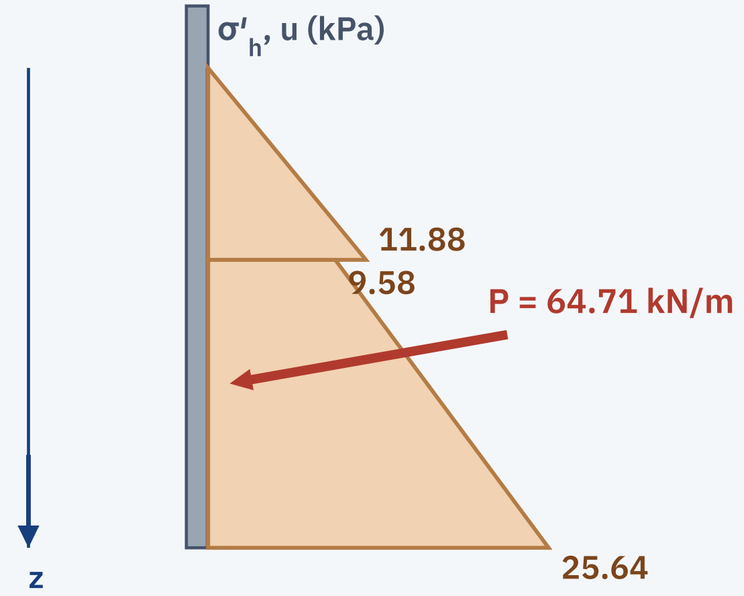
LÖSUNG

1 Beiwerte (α = 10°)

$$K_1(30^\circ) = \mathbf{0.3495}$$
$$K_2(35^\circ) = \mathbf{0.2818}$$

2 Vertikale Spannungen: am Schichtrand 17(2) = 34; an der Sohle 34 + 19(3) = 91 kPa

$$\sigma_1' = 0.3495(34) = \mathbf{11.88}\ \text{kPa (oben)}$$
$$\sigma_2' = 0.2818(34) = \mathbf{9.58}\ \text{kPa (unten)}$$
$$\sigma'(5) = 0.2818(91) = \mathbf{25.64}\ \text{kPa}$$



Lösung (2/2)

LÖSUNG

3 Kräfte (parallel zur Oberfläche): oberes Dreieck · unteres Rechteck · unteres Dreieck

$$P = \tfrac{1}{2}(2)(11.88) + 3(9.58) + \tfrac{1}{2}(3)(16.06) = 11.88 + 28.74 + 24.09 = \mathbf{64.71}\ \mathrm{kN/m}$$

4 Komponenten und Höhe der Resultierenden

$$N = P\cos 10^\circ = 63.73 \qquad T = P\sin 10^\circ = 11.24\ \mathrm{kN/m}$$

$$\beta = \tan^{-1}(T/N) = 10^\circ \qquad \bar{z} = \mathbf{1.71}\ \mathrm{m}$$

P = **64.71 kN/m**, N = 63.73 kN/m rechtwinklig zur Wandfläche; 1.71 m über der Sohle. An der Schichtgrenze **fällt** der Erddruck von 11.88 → 9.58 kPa, da der Reibungswinkel φ′ der darunterliegenden Schicht größer ist; σ'_v hingegen ist stetig.

Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Standsicherheitsbedingung der Böschung

THEORIE

Für undränierten Ton ($\varphi_u = 0$, c_u, totale Spannung) gilt dieselbe Beziehung; es wird $\varphi' = 0$ und $c' = c_u$ gesetzt:

$$K'_a = 2\cos^2\alpha - 2\sqrt{r^2 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha} - 1 \qquad r = \frac{c_u}{\gamma z}$$

Eine Lösung existiert nur, **solange die Böschung standsicher ist**: Die Schubspannung auf zur Oberfläche parallelen Ebenen darf die Kohäsion nicht überschreiten:

$$\tau = \gamma z \sin\alpha\cos\alpha \le c_u \;\Rightarrow\; z_{max} = \frac{c_u}{\gamma \sin\alpha\cos\alpha} \qquad z_c = \frac{2c_u}{\gamma}$$

Das Modul prüft diese Bedingung bis zur Wandsohle; ist die Wand höher als z_{max}, wird die Berechnung abgebrochen.

Für $\alpha = 0$ gilt $\sigma_a = \gamma z - 2c_u$, Zugriss bei $2c_u/\gamma$.

WARUM GIBT ES EINE GRENZE?

Unterhalb einer geneigten Oberfläche nimmt die Schubspannung in jeder zur Oberfläche parallelen Ebene mit der Tiefe zu; der Ton kann diese Spannung nur bis c_u aufnehmen. In größerer Tiefe gleitet die Böschung unter ihrem Eigengewicht ab.

Aufgabe

BEISPIEL

Gegeben

Auffüllung	**wassergesättigter Ton, undräniert:** $\gamma = 18\ \mathrm{kN/m^3},\ c_u = 20$ **kPa; Geländeneigung** $\alpha = 15^\circ$
Wand	$H = 4$ **m (und 5 m), senkrecht, reibungsfrei**

GESUCHT

z_{max}, z_c, der Druck an der Sohle und der gerissene P_a; was ergibt sich bei H = 5 m?

Lösung (1/2)

LÖSUNG

1 Versagensgrenze und Zagtiefe

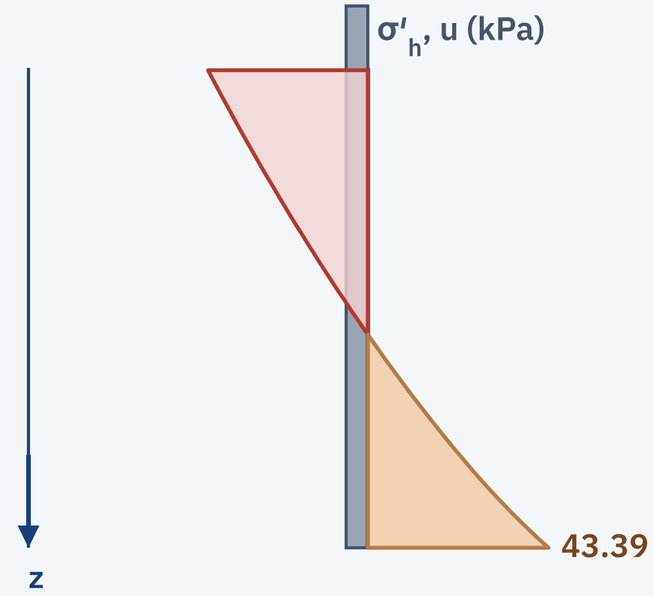
$$z_{max} = \frac{20}{18 \sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \mathbf{4.44}\ \mathrm{m}$$

$$z_c = \frac{2c_u}{\gamma} = \frac{40}{18} = \mathbf{2.22}\ \mathrm{m}$$

2 H = 4 m: τ(4) = 18(4) sin15° cos15° = 18.0 ≤ 20 kPa: die Böschung ist standsicher; an der Basis r = 20/(18·4) = 0.2778

$$K'_a = 2\cos^2 15^\circ - 2\sqrt{r^2 - \sin^2 15^\circ \cos^2 15^\circ} - 1 = 0.6239$$

$$\sigma_a(4) = \gamma z K'_a \cos\alpha = 18(4)(0.6239)\cos 15^\circ = \mathbf{43.39}\ \mathrm{kPa}$$



Lösung (2/2)

LÖSUNG

3 Kraft mit Riss (von z_c bis 4 m)

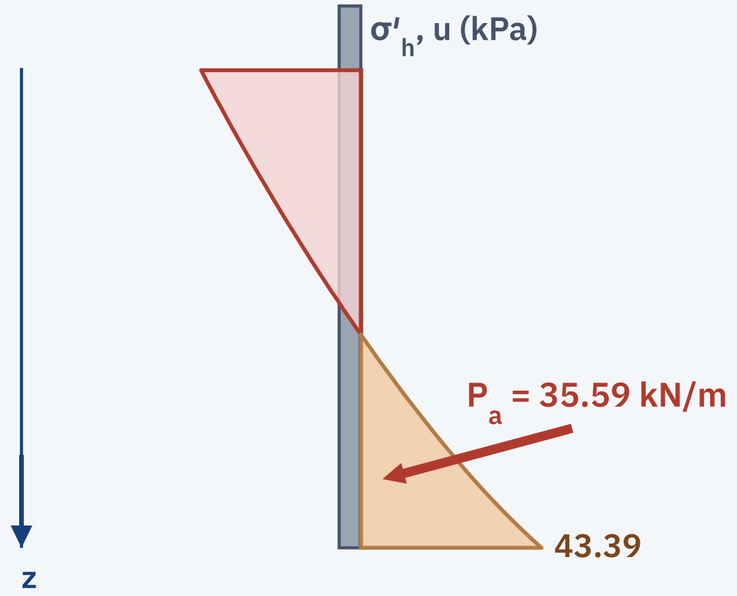
$$P_a = \int_{z_c}^{H} \sigma_a \, dz = \mathbf{35.59}\ \mathrm{kN/m}\ (15^\circ \text{ zur Horizontalen})$$

$$\bar{z} = 0.57\ \mathrm{m} \qquad \text{ohne Riss: } P_a = -9.37\ \mathrm{kN/m}$$

4 H = 5 m: τ(5) = 22.5 kPa > c_u = 20 kPa

$$\tau(5) = 18(5)\sin 15^\circ \cos 15^\circ = 22.5 > c_u \ \Rightarrow\ \text{Böschung versagt}$$

Für H = 4 m ergibt sich mit Zugriss P_a = **35.59 kN/m**; die Kraft ohne Zugriss ist negativ (–9.37 kN/m), die Annahme eines Zugrisses ist also maßgebend. Da z_{max} = 4.44 m ist, gibt es für eine 5 m hohe Wand keine Lösung.



Lösung in GeoTerva prüfen ↗

Umfang der Lösung

THEORIE

Die Wand ist reibungsfrei; in der Lösung nach Chu wird der Erddruck unter dem Winkel β zur Wandnormalen angegeben (β stammt allein aus dem eigenen Spannungszustand des Bodens, nicht aus der Wand–Boden-Reibung). Für eine Wand mit Reibung siehe das Coulomb-Modul.

Der **Damm** ist eine ebene Oberfläche mit einer einzigen gleichmäßigen Neigung; die Schichten sind parallel zur Oberfläche. Änderungen der Oberflächenneigung, Bermen oder gebrochene Oberflächen sind in dieser Lösung nicht enthalten.

Bindige Hinterfüllung wird nach Mazindrani–Ganjali nur für die senkrechte Wand ($\theta = 0$) angegeben; ein Zugriss wird bis z_c angenommen, ein wassergefüllter Riss ist gesondert zu berücksichtigen.

Geometrie: Die Wandfläche und die Geländeoberfläche müssen sich unter mindestens 15° schneiden ($|\alpha - \theta| \leq 75°$); andernfalls ist der auf die Wandfläche wirkende Druck kein Erddruck, sondern das Gewicht des darüberliegenden Bodens.

Erdbeben und **Wandreibung** liegen außerhalb des Umfangs dieses Moduls (Mononobe–Okabe, Coulomb).

Zusammenfassung

Die wichtigsten Punkte

Geneigte Hinterfüllung ($\alpha \le \varphi'$): Der Erddruck wirkt **parallel** zur Geländeoberfläche, $K_a = \cos\alpha\,(\cos\alpha - r)/(\cos\alpha + r)$, K_p mit umgekehrtem Vorzeichen; $P = \tfrac{1}{2}K\gamma H^2$ in $H/3$ über der Sohle, unter dem Winkel α zur Horizontalen

$K_aK_p = \cos^2\alpha$; mit wachsendem α nimmt K_a zu und K_p ab; für $\alpha = \varphi'$ werden beide gleich $\cos\varphi'$, und für $\alpha > \varphi'$ existiert keine Lösung

Chu (1991): $\psi_a = \sin^{-1}(\sin\alpha/\sin\varphi') - \alpha + 2\theta$; $K_{a(R)}$, β und η in geschlossener Form; die Kraft ist um β gegenüber der Flächennormalen geneigt

Wandneigung θ: bei positivem θ wächst die Kraft, bei negativem θ nimmt sie ab; im passiven Fall $\psi_p = \sin^{-1}(\ldots) + \alpha - 2\theta$

Bei **bindiger** Hinterfüllung hängt K'_a von der Tiefe ab, das Diagramm ist gekrümmt; $z_c = (2c'/\gamma)\sqrt{((1+\sin\varphi')/(1-\sin\varphi'))}$ ist von der Geländeneigung unabhängig; die Kraft bei vorhandenem Riss ist maßgebend

Geschichtete Hinterfüllung: $\sigma' = \sigma'_v K_{(R)}$; Sprung an der Schichtgrenze, $P = \sqrt{(N^2 + T^2)}$

Undränierter Ton: Wird $z_{max} = c_u/(\gamma \sin\alpha \cos\alpha)$ überschritten, so gleitet die Böschung unter ihrem Eigengewicht ab; es existiert keine Lösung

Literatur

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Chu, S.C. (1991). Rankine analysis of active and passive pressures on dry sands. Soils and Foundations, 31(4), 115–120.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning.

Mazindrani, Z.H. and Ganjali, M.H. (1997). Lateral earth pressure problem of cohesive backfill with inclined surface. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 123(2), 110–112.

HINWEIS

Alle Rechenbeispiele wurden mit der Berechnungsengine des Moduls erzeugt; das Modul liefert dieselben Werte. Das Modul öffnet mit der Wand aus Beispiel 4 (H = 3,658 m, γ = 18.07 kN/m³).

GeoTerva

Geotechnische Berechnungen online

Von der Theorie zur Praxis

Geben Sie die Neigung Ihrer eigenen Wand, die Geländeneigung der Hinterfüllung, die Schichten und das Grundwasser in GeoTerva ein; das Modul liefert die Kraft, ihre Richtung und ihre Angriffshöhe gemeinsam.

Modul öffnen →

Theorieseite →

Auf dem Smartphone öffnen

Die Beispielmodule erfordern keine Registrierung.

Falls Sie sie in Ihren Vorlesungen verwenden möchten: info@geoterva.com