GeoTerva

岩土工程课程讲义 · 侧向土压力

被动土压力：对数螺旋线

讲义：作用于粗糙墙背的被动土压力按曲线形破坏面（对数螺线）计算、Terzaghi–Peck试算滑动楔体、Lancellotta解、与Coulomb解的比较；倾斜墙背、倾斜地表、土层与水；每个主题均配有工程算例。

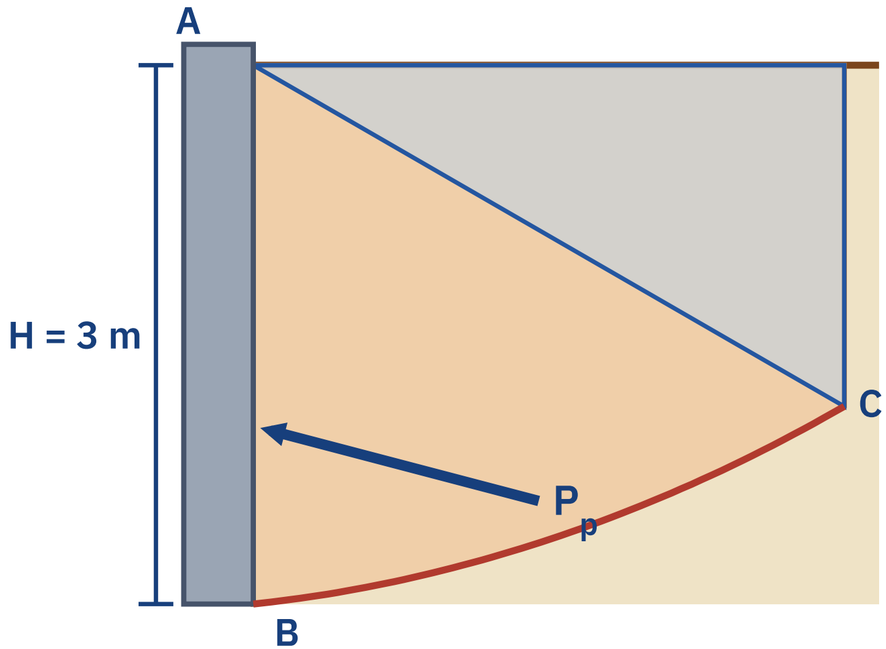
墙背摩擦

$r = r_0 e^{\omega \tan \varphi'}$

Terzaghi – Peck土楔

Lancellotta · Coulomb

倾斜墙背 · 土层 · 水



引言

本讲内容

理解为何粗糙墙背需要采用**曲面**而不是**平面土楔**(Coulomb)

对数螺旋线：$r = r_0 e^{\omega \tan \varphi'}$；每条半径与曲线均成$\varphi'$角相交，合力通过螺旋线的中心

在**Terzaghi–Peck**试算土楔上按力矩平衡计算P；由**最小**的试算土楔确定该力

将K_p与**Lancellotta**闭合解以及Coulomb、Shields–Tolunay、Zhu–Qian的结果进行比较

适用于倾斜墙背、倾斜地面、超载、**分层土和地下水**的广义土楔

Coulomb解在δ'较大时**偏于不安全**的程度

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：规则是什么，为什么如此?

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

各力均按墙体每单位长度计(kN/m)；$P_p = \tfrac{1}{2} K_p \gamma H^2$；墙背摩擦角$\delta'$的方向为墙体使土体向下滑动的方向。

被动状态下为何不出现平面滑裂面?

理论

Coulomb的平面滑裂面对**主动**土压力是良好的近似；但对粗糙墙的**被动**抗力，其结果大于实际抗力，且墙摩擦越大偏差越大：**偏于不安全一侧。**

墙体被推向土体时，土体相对于墙体上升；墙体使土体**向下**滑动（墙面摩擦为正），被动土压力偏离墙面法线**向下**倾斜δ′。此时破坏面为：

靠近墙底（BC）处为**曲线**（对数螺旋线）

靠近地表的CD段**为直线**：与水平线成45° − φ′/2角；ACD区处于Rankine被动状态

Coulomb理论的结果大多少?

φ′ / δ′	螺旋	Coulomb
30° / 15°	4.61	4.98
30° / 30°	6.68	10.10
40° / 20°	9.67	11.77
40° / 40°	18.86	92.59

K_p系数；当φ′ = δ′ = 40°时，Coulomb给出的值要大5倍。

使对数螺旋线便于应用的特性

理论

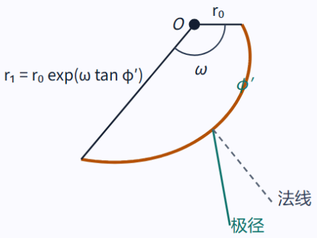
滑裂面的曲线段BC取为以O为中心的对数螺旋线：

$$r = r_0\, e^{\omega \tan \varphi'}$$

r_0为ω = 0处的半径。螺旋线的特性：**每条半径与曲线均成φ′角。**在无黏性土中，滑裂面上法向力与剪切力的合力与法线的夹角同样为φ′；也就是说，在螺旋线上，合力沿某一半径方向，并**通过O点**：因此在对O点的力矩方程中不出现。

$$A_{OAB} = \frac{r_1^2 - r_0^2}{4 \tan \varphi'}$$

它是r_0与r_1之间条块的面积；模块以数值方法求出土楔面积和形心。



螺旋线上法向力与剪力的合力 F（与法线成 ϕ′ 夹角）位于极径上 — 其作用线通过圆心 O

题目

算例

已知条件

螺旋	**圆心O；初始半径**$r_0 = 1.00$ **m；** $\varphi' = 30^\circ$
角度	$\omega = 60^\circ$ **与** $\omega = 90^\circ$

求

r_1、半径与曲线所成的角以及扇形**面积。**

解答

解答

1 ω = 60° = 1.0472 rad

$$r_1 = r_0 e^{\omega \tan\varphi'} = 1.00\, e^{1.0472\times 0.5774} = 1.00\, e^{0.6046}$$

$$r_1 = \mathbf{1.831}\ \text{m}$$

2 扇形面积

$$A = \frac{r_1^2 - r_0^2}{4\tan\varphi'} = \frac{3.351 - 1.00}{4(0.5774)} = \mathbf{1.018}\ \text{m}^2$$

3 ω = 90°时

$$r_1 = 1.00\, e^{1.5708\times 0.5774} = \mathbf{2.477}\ \text{m} \qquad A = \mathbf{2.223}\ \text{m}^2$$

半径每转过一弧度增大为原来的$e^{\tan\varphi'}$ = 1.781倍；ω = 60°时，r_1 = 1.831 m，面积为1.018 m²。半径与曲线**在每一点处的夹角均为φ′ = 30°**；因此合力通过O点。

在GeoTerva中验算解答 ↗

Terzaghi和Peck (1967)方法

理论

对高度为H的竖直墙AB：

自A点作AC线，使其与地面夹角为**45° − φ′/2**，并在其上选取一点C。

在直线AC上确定对数螺旋线的圆心**O**，该螺旋线通过B点、半径r_0 = OB，并到达C点(r_1 = OC = $r_0 e^{\omega \tan \varphi'}$)。

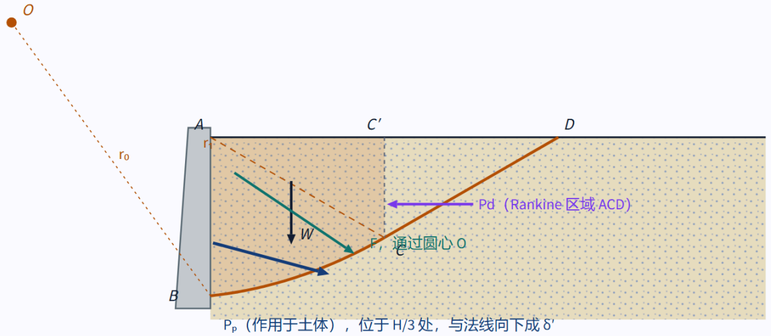
CC′面承受ACD区的Rankine被动力（水平方向，作用于C点上方d/3处）：

$$P_d = \tfrac{1}{2}\gamma d^2 \tan^2\left(45^\circ + \frac{\varphi'}{2}\right)$$

土楔ABCC′的重力W、P_d和墙的作用力P（作用于H/3处，自法线向下偏δ′）对O点的力矩（合力F通过O点）：

$$P = \frac{W\, l_W + P_d\, l_1}{l_P} \qquad P_p = \min_C P \qquad K_p = \frac{2P_p}{\gamma H^2}$$

该试算对多个C值重复进行；最小的力即为被动土压力合力。δ′ = 0时螺线退化为平面，$K_p = \tan^2(45° + \varphi'/2)$。



题目

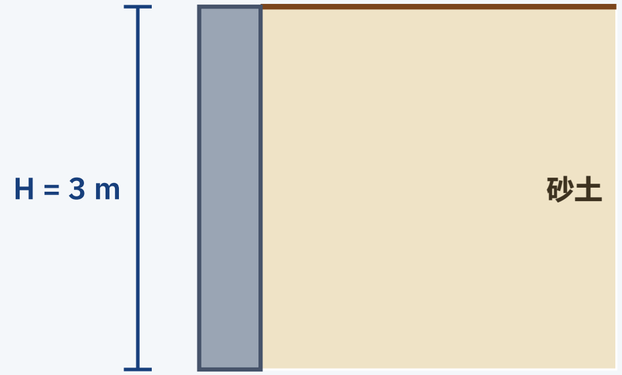
算例

求

最小试算滑动楔体的几何形状，以及P_p、K_p；与若干个试算滑动楔体的比较。模块打开时载入的即为此墙。

已知条件

墙	$H = 3$ m，**竖直；水平填土**
土	**干砂：** $\gamma = 15.7$ kN/m^3，$\varphi' = 30°$；**墙背摩擦** $\delta' = 15°$



γ = 15.7 kN/m³，φ′ = 30°，δ′ = 15°（被动）

解答 (1/2)

解答

1 几何关系（AC与水平线成45° − 15° = 30°）

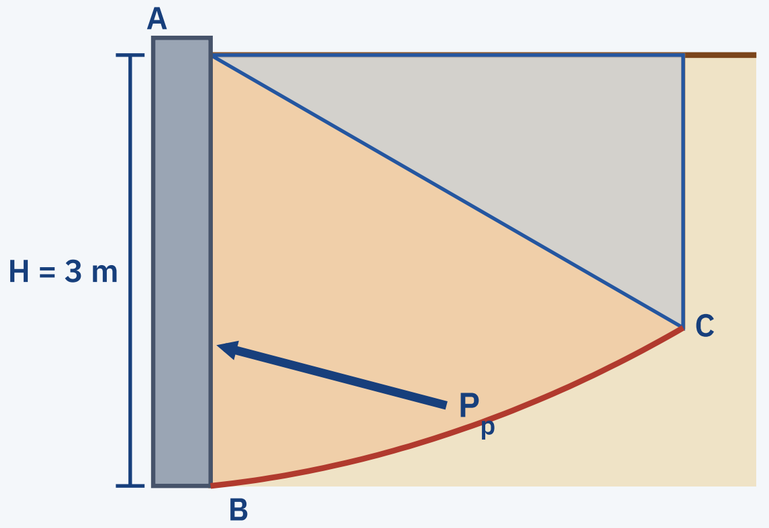
$$t = 3.80\ \text{m}:\ C = (3.29;\ 1.10)\ \text{m},\ \ d = H - y_C = 1.90\ \text{m}$$

$$O = (-3.76;\ 5.17)\ \text{m},\ \ r_0 = OB = 6.39\ \text{m},\ \ r_1 = OC = 8.14\ \text{m}$$

2 螺旋线角度与土楔重量

$$\omega = \ln(r_1/r_0)/\tan 30^\circ = 23.97^\circ$$

$$W = \gamma A_{ABCC'} = 15.7\,(8.480) = \mathbf{133.14}\ \text{kN/m}$$



解答 (2/2)

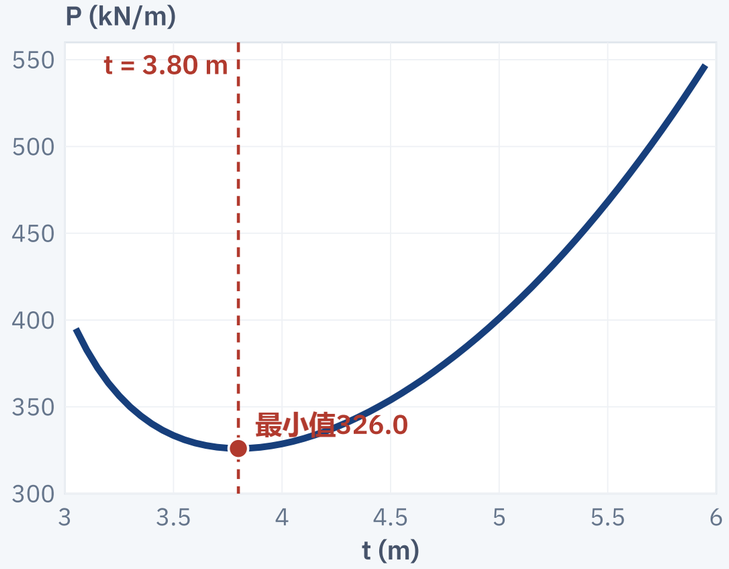
解答

3 Rankine区：$P_d = \frac{1}{2}\gamma d^2 \tan^2 60°$

$$P_d = \tfrac{1}{2}(15.7)(1.899)^2(3) = \mathbf{84.96}\ \text{kN/m}$$

4 对O点取矩（力臂$l_W = 5.289$，$|l_1| = 3.438$，$l_P = 3.056$ m）

$$P = \frac{W\,l_W + P_d\,|l_1|}{l_P} = \frac{133.14(5.289) + 84.96(3.438)}{3.056} = \mathbf{326.03}\ \text{kN/m}$$



最小试算力为**P_p = 326.0 kN/m** (t = 3.80 m)；$K_p = 2P_p/(\gamma H^2)$ = **4.615**。t取更小或更大值时，力均增大(t = 3.2 m: 363.8; t = 4.5 m: 354.0 kN/m)，即被动土压力为各试算土楔中的**最小**值。

在GeoTerva中验算解答 ↗

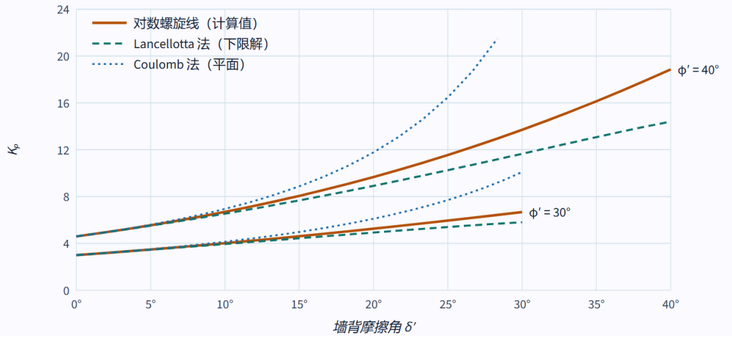
螺旋线与其他解法

理论

竖直墙背、水平填土情形的其他解（均为$P_p = \frac{1}{2}K_p\gamma H^2$）：Shields–Tolunay（条分法，表格）、Sokolowskiĭ（特征线法，表格）、Zhu–Qian（三角形土条，表格）以及**Lancellotta (2002)**闭式解（下限解）：

$$K_p = \frac{\cos\delta'}{1-\sin\varphi'}\left(\cos\delta' + \sqrt{\sin^2\varphi' - \sin^2\delta'}\right) e^{2\theta\tan\varphi'} \frac{1}{\cos\delta'} \qquad 2\theta = \sin^{-1}\frac{\sin\delta'}{\sin\varphi'} + \delta'$$

φ′	δ′	对数螺旋线	Lancellotta	Coulomb
20°	10°	2.56	2.52	2.64
20°	20°	3.07	2.87	3.53
30°	15°	4.61	4.44	4.98
30°	30°	6.68	5.80	10.10
40°	20°	9.67	8.92	11.77
40°	40°	18.86	14.39	92.59



Lancellotta解为下限，对数螺旋线法为上限；特征线法介于二者之间，非常接近对数螺旋线解。

Coulomb解在δ′较大时严重高估(φ′ = δ′ = 40°: 92.6)。

题目

算例

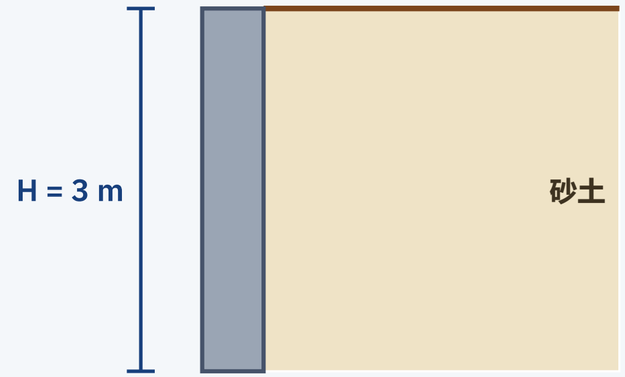
已知条件

墙与土体

算例2中的墙： $H = 3\ \text{m}$，$\gamma = 15.7\ \text{kN/m}^3$，$\varphi' = 30^\circ$，$\delta' = 15^\circ$

求

Lancellotta K_p 的逐步计算；五种解的 P_p 值及其排序。



γ = 15.7 kN/m³，φ′ = 30°，δ′ = 15°（被动）

解答 (1/2)

解答

1 Lancellotta（下限解）：2θ与K_p

$$2\theta = \sin^{-1}\frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} + 15^\circ = 31.17^\circ + 15^\circ = 0.8059 \text{ rad}$$

$$K_p = \frac{\cos 15^\circ}{1-\sin 30^\circ}\left(\cos 15^\circ + 0.4278\right) e^{0.8059 \tan 30^\circ} \frac{1}{\cos 15^\circ} = \mathbf{4.439}$$

解答 (2/2)

解答

2 五种解($P_p = ½K_p(15.7)(9) = 70.65\ K_p$)

解答	K_p	P_p (kN/m)
Coulomb (1776)，平面滑裂面	4.977	351.6
Terzaghi & Peck（对数螺旋线）	4.615	326.0
Shields & Tolunay (1973)	4.280	302.4
Zhu & Qian (2000)	4.575	323.2
Lancellotta (2002)	4.439	313.6

平面Coulomb解给出最大值(351.6 kN/m)；曲线滑裂面解集中在**302–326 kN/m**范围内。Lancellotta（下限）为313.6，对数螺旋线（上限）为326.0 kN/m。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

土	**砂土，$\varphi' = 30^\circ$；竖直墙背，水平填土**
变量	$\delta' = 0^\circ,\ 10^\circ,\ 15^\circ,\ 20^\circ,\ 30^\circ$

求

对每个δ'，给出K_p（对数螺旋线法、Lancellotta、Coulomb）以及Coulomb解的偏高程度。

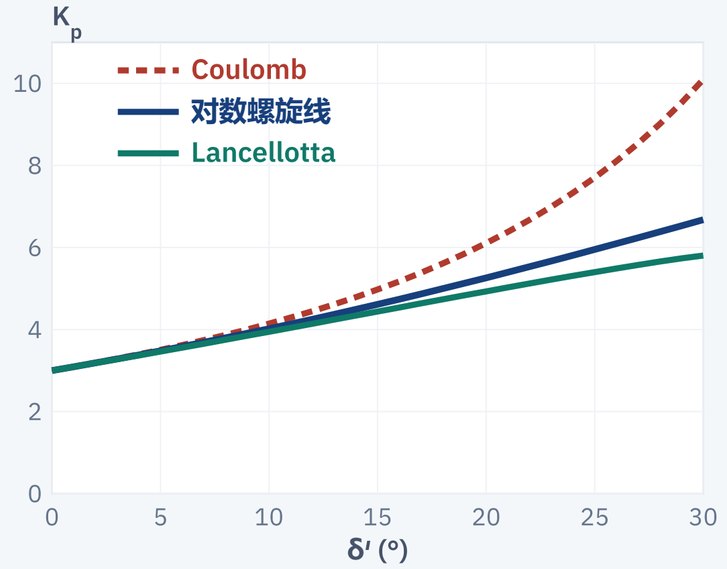
解答

解答

1 相同φ′ = 30°时的四种方法

δ′	对数螺旋线	Lancellotta	Coulomb	Coulomb/螺旋线
0°	3.000	3.000	3.000	1.00
10°	4.020	3.946	4.143	1.03
15°	4.615	4.439	4.977	1.08
20°	5.260	4.930	6.105	1.16
30°	6.677	5.804	10.095	1.51

δ′ = 0时三者均与Rankine值(3.00)相等；随着δ′增大，Coulomb法迅速超过对数螺旋线法：δ′ = 15°时高出8%，δ′ = 30°时高出51%（偏不安全）。实际工程中，被动抗力采用对数螺旋线法，或取δ′ ≤ φ′/2。



在GeoTerva中验算解答 ↗

倾斜墙背、倾斜地表、地面超载、土层与水

理论

模块将Terzaghi–Peck土楔推广到倾角为θ的倾斜墙背和坡角为α的倾斜地面：AC与地面之间的区域处于该倾斜地面的Rankine被动状态；对数螺旋线自AC上的O点绘出；螺旋线可退化为平面（Coulomb平面同样是一种机构，取两者中的较小值）。

$$P_p = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{p\gamma} + q_e H K_{pq} \qquad q_e = q\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)}$$

土重(H/3)与超载(H/2)的分量分别由各自的最小试算土楔求得。在**分层**填土中，每一土层取各自的$K_{p\gamma}$、K_{pq}值；其上覆土体的重量按超载方式起作用；**水下**时，γ′与u垂直于墙背叠加：

$$\sigma'_p = \left[K_{pq}\sigma'_{v,top} + K_{p\gamma}\left(\sigma'_v - \sigma'_{v,top}\right)\right]\cos\theta$$

工况(δ′ = φ′ = 30°)	K_p图表(Caquot–Kerisel)	K_p模块	差值
θ = 20°	3.84	3.82	−0.6 %
θ = 30°	2.76	2.80	+1.6 %
α/φ′ = 0.4 (α = 12°)	10.60	10.22	−3.6 %
α/φ′ = 0.8 (α = 24°)	15.10	14.51	−3.9 %

$K_p = K_{p\gamma}\cos^2\theta$（在Caquot–Kerisel法中，以墙背长度$H_1 = H/\cos\theta$代替H）。这种分层扩展属于模块的工程扩展。

CAQUOT – KERISEL R′

Caquot–Kerisel图表适用于δ′ = φ′；对于其他δ′，$K_p = R' K_{p(\delta'=\varphi')}$。φ′ = 30°、δ′/φ′ = 0.5时，R′ = 0.746。

题目

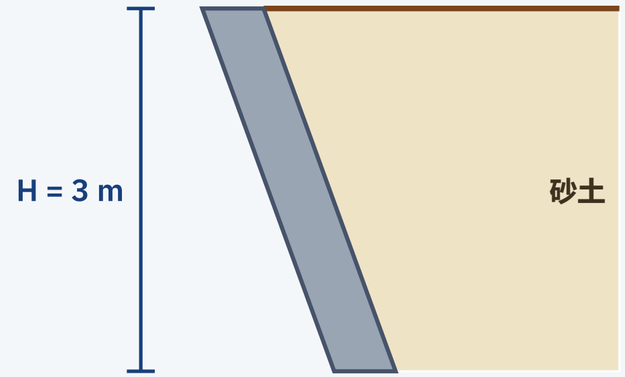
算例

已知条件

墙	$H = 3$ m；**墙背自铅垂线倾斜**$\theta = 20^\circ$；**水平填土**
土	**干砂：** $\gamma = 15.7$ kN/m^3, $\varphi' = 30^\circ$；$\delta' = 30^\circ = \varphi'$

求

$K_{p\gamma}$、P_p；与图表所得K_p的比较；与墙背竖直的墙对比。



θ = 20°, φ′ = 30°, δ′ = 30°（被动）

解答

解答

1 对数螺旋线系数（模块；δ′ = φ′ = 30°，θ = 20°）

$$K_{p\gamma} = \mathbf{4.321} \qquad K_{pq} = 4.127$$

2 与力及图表的对比

$$P_p = \tfrac{1}{2} K_{p\gamma} \gamma H^2 = \tfrac{1}{2}(4.321)(15.7)(9) = \mathbf{305.3}\ \text{kN/m}$$

$$K_p = K_{p\gamma} \cos^2 20^\circ = 4.321(0.8830) = \mathbf{3.82} \quad \text{（图表值3.84）}$$

P_p = **305.3 kN/m**；在同样的土中，墙背竖直的挡土墙(θ = 0, δ′ = 30°)则为471.8 kN/m：墙背倾斜20°使被动抗力**减小**35%。与图表法的差异为0.6%。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

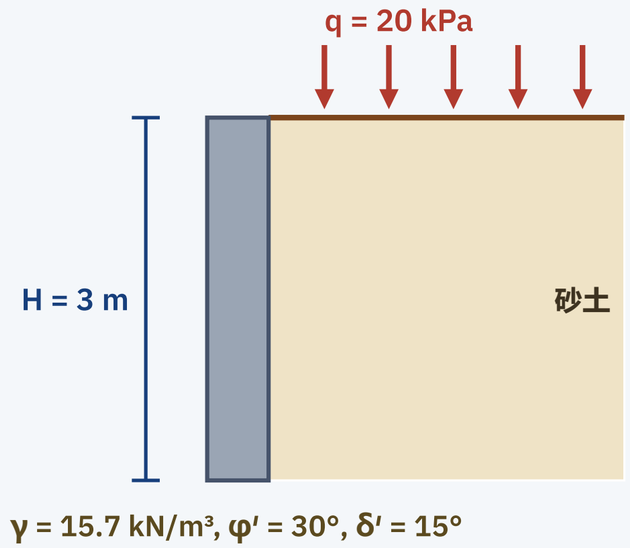
算例

已知条件

墙与土体	**算例2中的墙：** $H = 3$ m，$\gamma = 15.7$ kN/m^3，$\varphi' = 30^\circ$，$\delta' = 15^\circ$
超载	$q = 20$ kPa（**水平地面上**）

求

土体和超载的分量、总P_p以及$\bar{z}$。



解答

解答

1 系数（模块，δ′ = 15°）

$$K_{p\gamma} = \mathbf{4.615} \qquad K_{pq} = \mathbf{4.532} \qquad q_e = 20\ \text{kPa}$$

2 各力：土压力（力臂H/3 = 1.00 m）和超载（力臂H/2 = 1.50 m）

$$P_\gamma = \tfrac{1}{2} K_{p\gamma} \gamma H^2 = 326.03\ \text{kN/m}$$

$$P_q = K_{pq} q_e H = 4.532(20)(3) = 271.90\ \text{kN/m}$$

3 合计及位置

$$P_p = 326.03 + 271.90 = \mathbf{597.94}\ \text{kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{326.03(1.00) + 271.90(1.50)}{597.94} = \mathbf{1.23}\ \text{m}$$

P_p = **597.9 kN/m**，$\bar{z}$ = **1.23 m**（无超载时为1.00 m）；超载部分相当于土体部分的83%。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

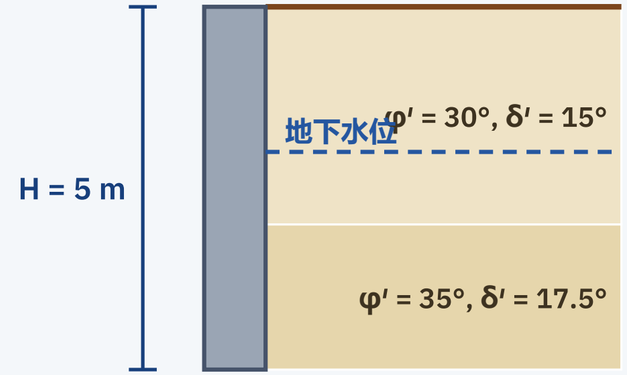
算例

已知条件

墙	$H = 5$ m，**竖直；水平填土；无地面超载**
第1层(0–3 m)	$\gamma = 17,\ \gamma_{sat} = 19$ kN/m^3, $\varphi' = 30°,\ \delta' = 15°$
第2层(3–5 m)	$\gamma = 17,\ \gamma_{sat} = 19.5$ kN/m^3, $\varphi' = 35°,\ \delta' = 17.5°$
地下水	**深度2 m处**

求

土层分界面处的压力突变、各分量、P、β和z̄。



γ = 17 · γ_{sat} = 19 | 19.5 kN/m³

解答 (1/2)

解答

1 系数（模块）

$$\text{土层1：}\quad K_{p\gamma} = 4.615$$

$$\text{土层2：}\quad K_{p\gamma} = 6.522,\ K_{pq} = 6.351$$

2 应力：σ′V(2) = 34；σ′V(3) = 43.19；σ′V(5) = 62.57 kPa

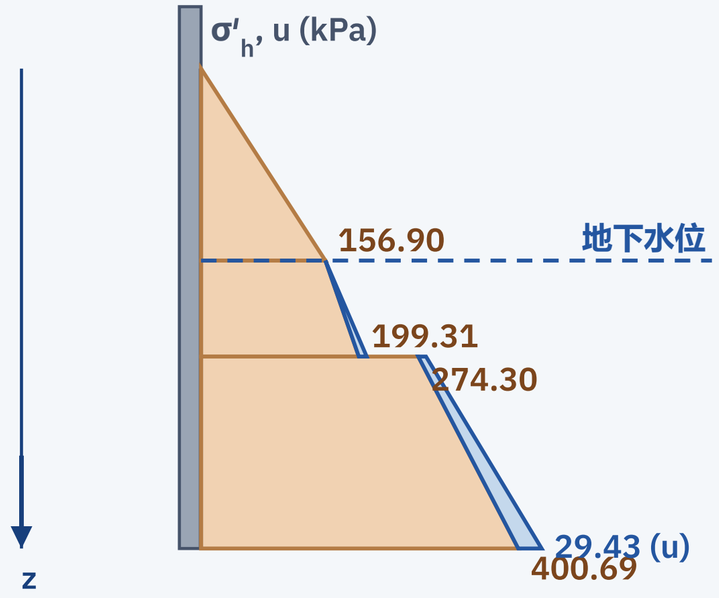
$$p(2) = 4.615(34) = 156.90$$

$$p(3^-) = 4.615(43.19) = 199.31$$

$$p(3^+) = K_{pq}\sigma'_v(3) = 6.351(43.19) = \mathbf{274.30}$$

$$p(5) = 274.30 + 6.522(19.38) = \mathbf{400.69}\ \text{kPa}$$

$$u(5) = \mathbf{29.43}\ \text{kPa}$$



解答 (2/2)

解答

3 沿墙背的力及其分量（采用各土层的δ′）

$$P_s = 335.0 + 675.0 = 1{,}010.0 \text{ kN/m}$$

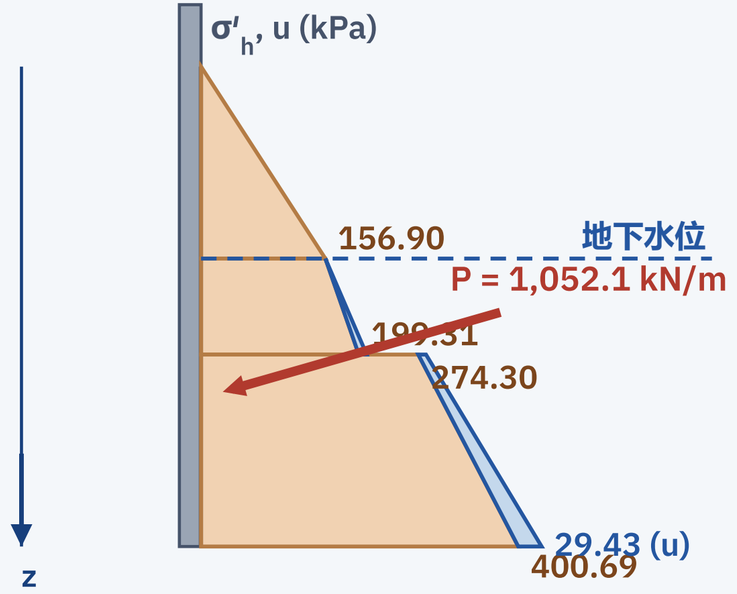
$$N_s = 967.3 \qquad T = 289.7 \text{ kN/m}$$

$$N_w = \tfrac{1}{2}(29.43)(3) = 44.15 \text{ kN/m} \quad \text{（垂直于山脊）}$$

4 合力及其位置

$$N = N_s + N_w = 1{,}011.5 \qquad P = \sqrt{N^2 + T^2} = \mathbf{1{,}052.1} \text{ kN/m}$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{T}{N} = 15.98^\circ \qquad \bar{z} = \mathbf{1.61} \text{ m}$$



P = **1,052.1 kN/m**，β = 16.0°，位于底面以上1.61 m处。水压力部分仅为44.1 kN/m (4%)：被动状态下，土的抗力与水压力相比大得多；在分界处p由199.3跃增至274.3 kPa。

在GeoTerva中验算解答 ↗

解答范围

理论

无黏性土($c' = 0$)；黏性土的被动土压力见Rankine和Coulomb模块。

对数螺旋线为上限，Lancellotta为下限；实际抗力介于二者之间。平面滑裂面的Coulomb解在δ'较大时偏于不安全。

广义土楔（倾斜墙背、倾斜地表、土层、水、超载）是模块的工程扩展，不存在分层情形的闭式解；土体自重和超载各自的分量分别由各自的最小土楔求得。

适用条件：$\alpha < \varphi'$；墙背与地表须以足够大的角度相交；若螺旋线穿出土体，或旋转方向错误，则不构成破坏机构（平面破裂面为其极限情形）。

对于**地震**情况，采用地震被动土压力模块。

小结

要点回顾

被动状态下平面土楔不安全：存在墙背摩擦时，破坏面在墙踵处为曲线（螺线），靠近地表处为平面（Rankine区）

对数螺线：$r = r_0 e^{\omega \tan \varphi'}$；每条半径与曲线的夹角均为$\varphi'$，合力通过O点；面积为$(r_1^2 - r_0^2)/(4 \tan \varphi')$

Terzaghi–Peck：$P = (W\, l_W + P_d\, l_1)/l_P$；**最小**试算土楔中的P即为被动土压力；$K_p = 2P_p/(\gamma H^2)$

Lancellotta（下限，闭合解）、对数螺旋（上限）；Coulomb解在$\varphi' = \delta' = 40°$时偏大，达5倍

广义楔体：$P = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{p\gamma} + q_e H K_{pq}$；$K_p = K_{p\gamma}\cos^2\theta$（图表定义）；逐层$\sigma' = [K_{pq}\sigma'_{v,top} + K_{p\gamma}(\sigma'_v - \sigma'_{v,top})]\cos\theta$

算例挡土墙($H = 3$ m, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$)：Coulomb 351.6 · 对数螺旋线326.0 · Lancellotta 313.6 kN/m

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Terzaghi, K. and Peck, R.B. (1967). Soil Mechanics in Engineering Practice, 2nd ed. Wiley, New York.

Shields, D.H. and Tolunay, A.Z. (1973). Passive pressure coefficients by method of slices. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 99(SM12), 1043–1053.

Lancellotta, R. (2002). Analytical solution of passive earth pressure. Géotechnique, 52(8), 617–619.

Sokolowskiĭ, V.V. (1965). Statics of Granular Media. Pergamon, London.

Zhu, D.Y. and Qian, Q. (2000). Determination of passive earth pressure coefficients by the method of triangular slices. Canadian Geotechnical Journal, 37(2), 485–491.

Caquot, A. and Kerisel, J. (1948). Tables for the Calculation of Passive Pressure, Active Pressure and Bearing Capacity of Foundations. Gauthier-Villars, Paris.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning.

注

全部数值算例均由模块自身的计算引擎得出；模块给出相同的数值。模块打开时载入算例 2-3中的墙体(H = 3 m, $\delta' = 15°$)。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入自己的墙背倾角、填土坡角、土层、地面超载和地下水；模块一并给出临界对数螺旋线、P_p及合力作用点高度。

打开模块→　理论页面 →

用手机打开

试用模块无需注册。