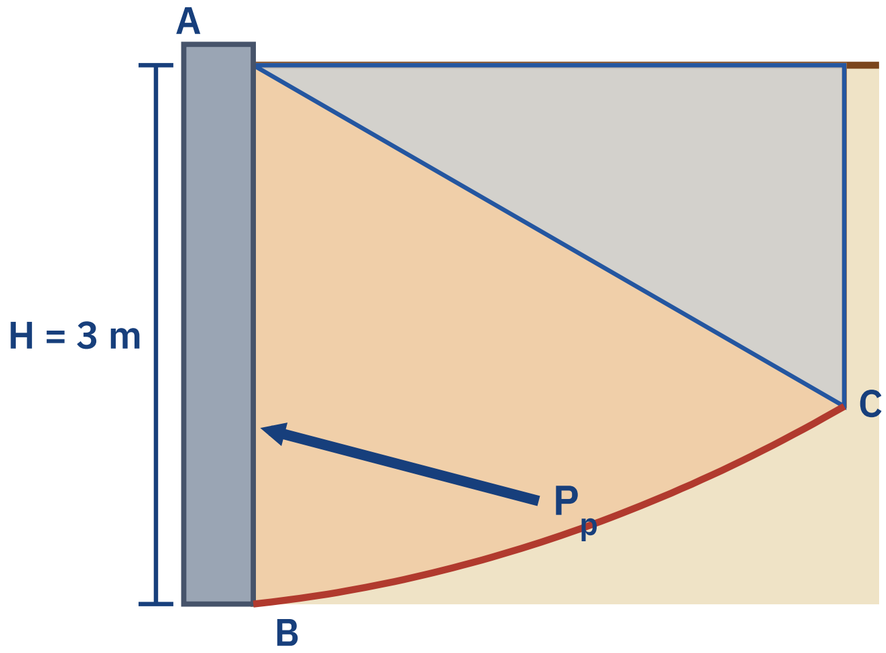
Apresentação de aula de geotecnia · Empuxo de terra

Empuxo passivo: espiral logarítmica

Aula: cálculo do empuxo passivo atuante sobre um muro rugoso com superfície de ruptura curva (espiral logarítmica), cunha de tentativa de Terzaghi–Peck, solução de Lancellotta, comparação com Coulomb; tardoz inclinado, superfície inclinada, camadas e água; exemplo resolvido em cada tópico.

Atrito solo-muro · $r = r_0 e^{\omega \tan \varphi'}$ · Cunha de Terzaghi – Peck · Lancellotta · Coulomb · Reaterro inclinado · camada · água



Baseia-se na página de teoria do GeoTerva · geoterva.com

Introdução

O que veremos nesta aula?

Por que, em um muro rugoso, é necessária uma **superfície curva** em vez da **cunha plana** (Coulomb)

A **espiral logarítmica**: $r = r_0 e^{\omega \tan \varphi'}$; cada raio encontra a curva sob o ângulo φ' e a resultante passa pelo centro da espiral

Calcular P por equilíbrio de momentos na cunha de tentativa de **Terzaghi–Peck**; obter a força a partir da **menor** cunha de tentativa

Comparar K_p com a solução fechada de **Lancellotta** e com as de Coulomb, Shields–Tolunay, Zhu–Qian

A cunha generalizada para tardoz inclinado, superfície inclinada, sobrecarga, **camadas e água**

O quanto Coulomb é **inseguro** para δ' grande

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: qual é a regra e por que é assim?

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

As forças são por unidade de comprimento do muro (kN/m); $P_p = \tfrac{1}{2} K_p \gamma H^2$; o atrito solo-muro δ' tem o sentido em que o muro arrasta o solo para baixo.

Por que não ocorre superfície plana no caso passivo?

TEORIA

A superfície de ruptura plana de Coulomb é uma boa aproximação para o empuxo **ativo**; para a resistência **passiva** de um muro rugoso, porém, fornece mais do que a resistência real, e cada vez mais à medida que o atrito solo-muro aumenta: **contra a segurança**.

Quando o muro é empurrado contra o solo, o solo sobe em relação ao muro; o muro desloca o solo **para baixo** (atrito solo-muro positivo) e a força passiva fica inclinada de δ′ **para baixo** em relação à normal à face do muro. Neste caso a superfície de ruptura é:

- próximo à ponta (BC) **é uma curva** (espiral logarítmica)
- o trecho próximo à superfície (CD) é **reto**: forma 45° − φ′/2 com a horizontal; a zona ACD está no estado passivo de Rankine

QUANTO COULOMB FORNECE A MAIS?

φ′ / δ′	Espiral	Coulomb
30° / 15°	4.61	4.98
30° / 30°	6.68	10.10
40° / 20°	9.67	11.77
40° / 40°	18.86	92.59

Coeficientes K_p; para φ′ = δ′ = 40°, Coulomb resulta em valor 5 vezes maior.

A propriedade que torna a hélice útil

TEORIA

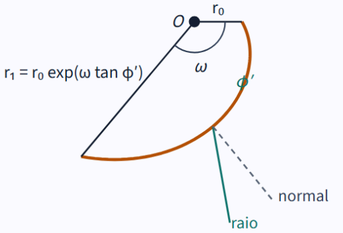
Considera-se a parte curva BC da superfície de ruptura como uma espiral logarítmica centrada em O:

$$r = r_0 \, e^{\omega \tan \varphi'}$$

r_0 é o raio em ω = 0. A propriedade da espiral: **todo raio encontra a curva sob o ângulo φ′**. Em solo granular, a resultante das forças normal e cisalhante na superfície de ruptura também forma o ângulo φ′ com a normal; ou seja, sobre a espiral a resultante se estende ao longo de um raio e **passa por O**: por isso não figura na equação de momentos em relação a O.

$$A_{OAB} = \frac{r_1^2 - r_0^2}{4 \tan \varphi'}$$

É a área da fatia entre r_0 e r_1; o módulo determina numericamente a área da cunha e o centro de gravidade.



a resultante F das forças normais e de cisalhamento na espiral (a ϕ′ em relação à normal) coincide com o rai ela passa por O

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Espiral	**centro O; raio inicial** $r_0 = 1.00$ **m;** $\varphi' = 30^\circ$
Ângulo	$\omega = 60^\circ$ **e** $\omega = 90^\circ$

PEDE-SE

$\mathbf{r_1}$, o ângulo do raio até a curva e a **área** do setor.

Solução

SOLUÇÃO

1 ω = 60° = 1.0472 rad

$$r_1 = r_0 e^{\omega \tan\varphi'} = 1.00\, e^{1.0472 \times 0.5774} = 1.00\, e^{0.6046}$$

$$r_1 = \mathbf{1.831}\ \mathrm{m}$$

2 Área do setor

$$A = \frac{r_1^2 - r_0^2}{4 \tan\varphi'} = \frac{3.351 - 1.00}{4(0.5774)} = \mathbf{1.018}\ \mathrm{m^2}$$

3 para ω = 90°

$$r_1 = 1.00\, e^{1.5708 \times 0.5774} = \mathbf{2.477}\ \mathrm{m} \qquad A = \mathbf{2.223}\ \mathrm{m^2}$$

O raio aumenta por um fator de $e^{\tan\varphi'}$ = 1.781 a cada radiano; em ω = 60°, r_1 = 1.831 m e a área é 1.018 m². O raio forma **φ′ = 30° em todos os pontos** com a curva; por isso a resultante passa por O.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Método de Terzaghi e Peck (1967)

TEORIA

Para o muro vertical AB de altura H:

A partir de A, traça-se a reta AC abaixo da superfície, com inclinação de **45° – φ′/2**; escolhe-se um ponto C sobre ela.

Sobre a reta AC, determina-se o centro **O** da espiral de raio r_0 = OB que passa por B e atinge C (r_1 = OC = $r_0 e^{\omega \tan \varphi'}$).

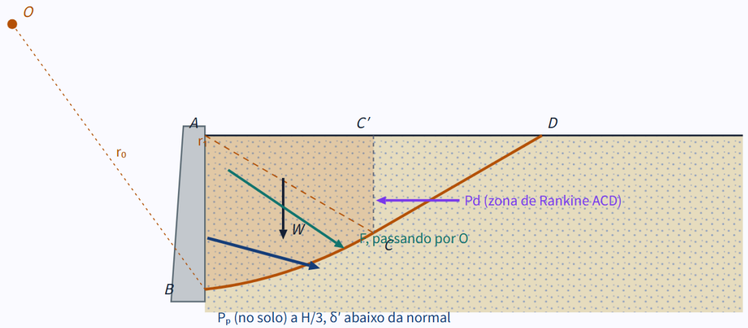
A face CC′ suporta o empuxo passivo de Rankine da zona ACD (horizontal, a d/3 acima de C):

$$P_d = \tfrac{1}{2}\gamma d^2 \tan^2\left(45^\circ + \frac{\varphi'}{2}\right)$$

Momento em relação a O para o peso W da cunha ABCC′, P_d e a força do muro P (em H/3, δ′ abaixo da normal) (a resultante F passa por O):

$$P = \frac{W\, l_W + P_d\, l_1}{l_P} \qquad P_p = \min_C P \qquad K_p = \frac{2P_p}{\gamma H^2}$$

A tentativa é repetida para muitos valores de C; a menor força é a força passiva. Para δ′ = 0, a superfície em espiral reduz-se a um plano e $K_p = \tan^2(45° + \varphi'/2)$.



Enunciado

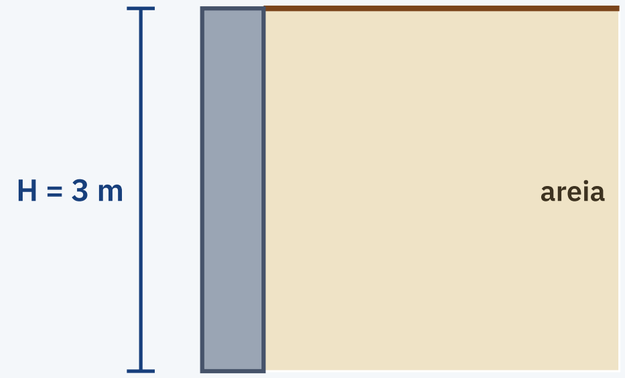
EXEMPLO

PEDE-SE

Geometria da menor cunha de tentativa e **P_p**, **K_p**; comparação com várias cunhas de tentativa. O módulo abre com este muro.

Dados

Muro	$H = 3$ **m, vertical; reaterro horizontal**
Solo	**areia seca:** $\gamma = 15.7\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30°$**;** **atrito solo-muro** $\delta' = 15°$



γ = 15.7 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15° (passivo)

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Geometria (AC a 45° − 15° = 30° com a horizontal)

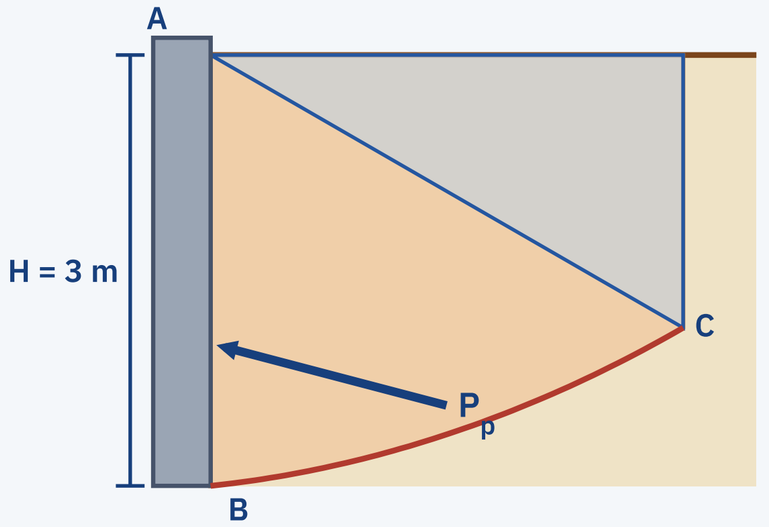
$$t = 3.80\ \text{m}: \ C = (3.29;\ 1.10)\ \text{m}, \ \ d = H - y_C = 1.90\ \text{m}$$

$$O = (-3.76;\ 5.17)\ \text{m}, \ \ r_0 = OB = 6.39\ \text{m}, \ \ r_1 = OC = 8.14\ \text{m}$$

2 Ângulo da espiral e peso da cunha

$$\omega = \ln(r_1/r_0)/\tan 30^\circ = 23.97^\circ$$

$$W = \gamma A_{ABCC'} = 15.7\,(8.480) = \mathbf{133.14}\ \text{kN/m}$$



Solução (2/2)

SOLUÇÃO

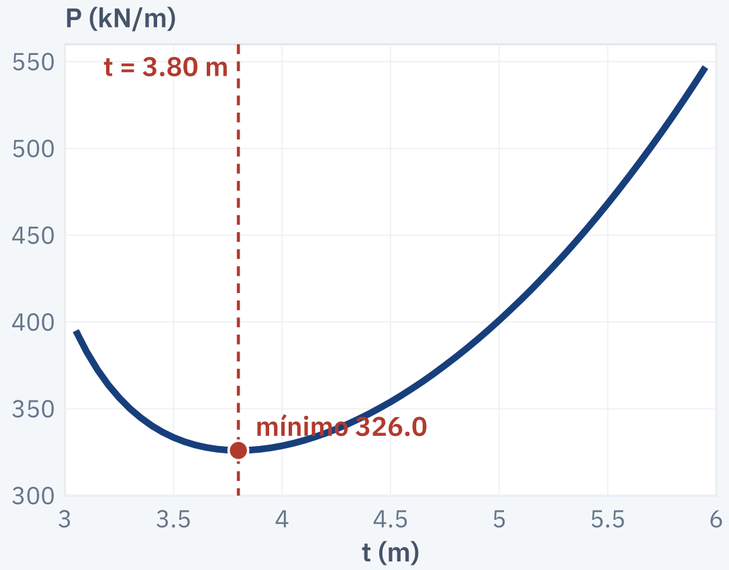
3 Zona de Rankine: $P_d = \frac{1}{2}\gamma d^2 \tan^2 60°$

$$P_d = \tfrac{1}{2}(15.7)(1.899)^2(3) = \mathbf{84.96}\ \mathrm{kN/m}$$

4 Momento em relação a O (braços $l_W = 5.289$, $|l_1| = 3.438$, $l_P = 3.056$ m)

$$P = \frac{W\, l_W + P_d\, |l_1|}{l_P} = \frac{133.14(5.289) + 84.96(3.438)}{3.056} = \mathbf{326.03}\ \mathrm{kN/m}$$

A menor força de tentativa é **P_p = 326.0 kN/m** (t = 3.80 m); $K_p = 2P_p/(\gamma H^2)$ = **4.615**. Para t menor ou maior, a força aumenta (t = 3.2 m: 363.8; t = 4.5 m: 354.0 kN/m); ou seja, a força passiva corresponde à cunha de tentativa de **menor** força.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

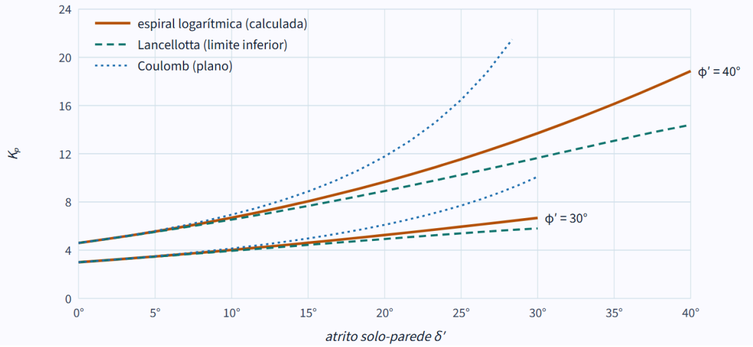
Espiral e outras soluções

TEORIA

Muro vertical, aterro horizontal: outras soluções (todas $P_p = \frac{1}{2}K_p\gamma H^2$): Shields–Tolunay (método das fatias, tabela), Sokolowskiĭ (método das características, tabela), Zhu–Qian (fatia triangular, tabela) e a solução fechada de **Lancellotta (2002)** (limite inferior):

$$K_p = \frac{\cos\delta'}{1-\sin\varphi'}\left(\cos\delta' + \sqrt{\sin^2\varphi' - \sin^2\delta'}\right) e^{2\theta\tan\varphi'}\frac{1}{\cos\delta'} \qquad 2\theta = \sin^{-1}\frac{\sin\delta'}{\sin\varphi'} + \delta'$$

φ′	δ′	Espiral log.	Lancellotta	Coulomb
20°	10°	2.56	2.52	2.64
20°	20°	3.07	2.87	3.53
30°	15°	4.61	4.44	4.98
30°	30°	6.68	5.80	10.10
40°	20°	9.67	8.92	11.77
40°	40°	18.86	14.39	92.59



Lancellotta é o limite inferior, a espiral logarítmica é o limite superior; o método das características situa-se entre os dois, muito próximo da espiral.

Para δ′ grande, Coulomb superestima o valor (φ′ = δ′ = 40°: 92.6).

Enunciado

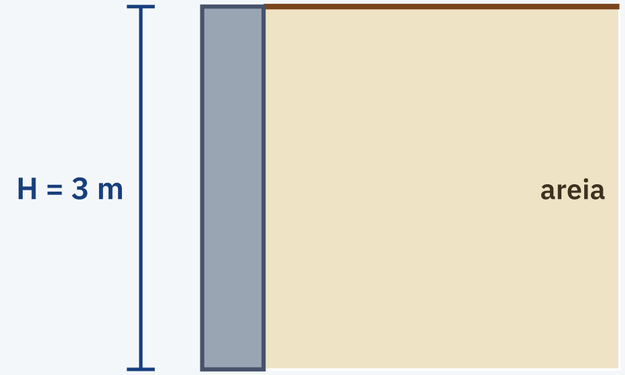
EXEMPLO

PEDE-SE

O K_p de **Lancellotta**, etapa por etapa; o valor de P_p das cinco soluções e sua ordenação.

Dados

Muro e solo	**Muro do Exemplo 2:** $H = 3$ m, $\gamma = 15.7\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$



γ = 15.7 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15° (passivo)

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Lancellotta (limite inferior): 2θ e K_p

$$2\theta = \sin^{-1}\frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} + 15^\circ = 31.17^\circ + 15^\circ = 0.8059\ \text{rad}$$

$$K_p = \frac{\cos 15^\circ}{1-\sin 30^\circ}\left(\cos 15^\circ + 0.4278\right) e^{0.8059\tan 30^\circ}\frac{1}{\cos 15^\circ} = \mathbf{4.439}$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

2 Cinco soluções ($P_p = ½K_p(15.7)(9) = 70.65\ K_p$)

Solução	K_p	P_p (kN/m)
Coulomb (1776), superfície plana	4.977	351.6
Terzaghi & Peck (espiral logarítmica)	4.615	326.0
Shields & Tolunay (1973)	4.280	302.4
Zhu & Qian (2000)	4.575	323.2
Lancellotta (2002)	4.439	313.6

O método de Coulomb plano fornece o maior valor (351.6 kN/m); as soluções com superfície curva se agrupam na faixa de **302–326 kN/m**. Lancellotta (limite inferior) fornece 313.6; a espiral logarítmica (limite superior), 326.0 kN/m.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Solo	**areia, $\varphi' = 30°$; muro vertical, reaterro horizontal**
Variável	$\delta' = 0°,\ 10°,\ 15°,\ 20°,\ 30°$

PEDE-SE

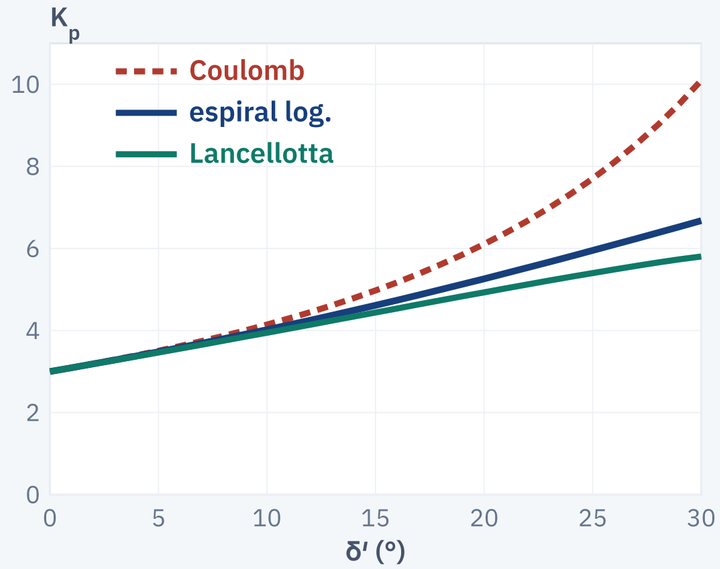
Para cada δ′, $\mathbf{K_p}$ (espiral logarítmica, Lancellotta, Coulomb) e o excesso de Coulomb.

Solução

SOLUÇÃO

1 Quatro métodos para o mesmo φ′ = 30°

δ′	Espiral log.	Lancellotta	Coulomb	Coulomb / espiral
0°	3.000	3.000	3.000	1.00
10°	4.020	3.946	4.143	1.03
15°	4.615	4.439	4.977	1.08
20°	5.260	4.930	6.105	1.16
30°	6.677	5.804	10.095	1.51



Para δ′ = 0, os três valores são iguais ao de Rankine (3.00); à medida que δ′ aumenta, Coulomb supera rapidamente a espiral: 8% a mais para δ′ = 15°, 51% a mais para δ′ = 30° (contra a segurança). Na prática, para a resistência passiva usa-se a espiral logarítmica ou δ′ ≤ φ′/2.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Reaterro inclinado, superfície inclinada, sobrecarga, camada e água

TEORIA

O módulo estende a cunha de Terzaghi–Peck a um tardoz inclinado de θ e a uma superfície inclinada de α: a região entre AC e a superfície está no estado passivo de Rankine da superfície inclinada; a espiral é traçada a partir do ponto O sobre AC; a espiral pode degenerar em plano (o plano de Coulomb também é um mecanismo, e adota-se o menor dos dois).

$$P_p = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{p\gamma} + q_e H K_{pq} \qquad q_e = q\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)}$$

As parcelas do peso do solo (H/3) e da sobrecarga (H/2) são obtidas das respectivas cunhas de tentativa de valor mínimo. No reaterro **em camadas**, cada camada adota os próprios valores de $K_{p\gamma}$ e K_{pq}; o peso do solo sobrejacente atua como sobrecarga; **sob a água**, γ′ e u são adicionados perpendicularmente ao tardoz:

$$\sigma'_p = \left[K_{pq}\sigma'_{v,top} + K_{p\gamma}\left(\sigma'_v - \sigma'_{v,top}\right)\right]\cos\theta$$

Caso (δ′ = φ′ = 30°)	Ábacos de K_p (Caquot–Kerisel)	Módulo K_p	Diferença
θ = 20°	3.84	3.82	−0.6 %
θ = 30°	2.76	2.80	+1.6 %
α/φ′ = 0.4 (α = 12°)	10.60	10.22	−3.6 %
α/φ′ = 0.8 (α = 24°)	15.10	14.51	−3.9 %

$K_p = K_{p\gamma}\cos^2\theta$ (em Caquot–Kerisel, adota-se o comprimento do tardoz $H_1 = H/\cos\theta$ em lugar de H). Essa generalização para solos estratificados é uma extensão de engenharia do módulo.

CAQUOT – KERISEL R′

Os ábacos de Caquot–Kerisel são para δ′ = φ′; para outros δ′, $K_p = R' K_{p(\delta'=\varphi')}$. Para φ′ = 30°, δ′/φ′ = 0.5, R′ = 0.746.

Enunciado

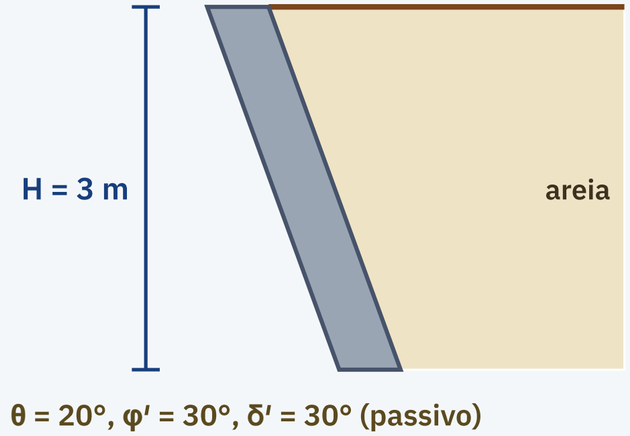
EXEMPLO

PEDE-SE

$K_{p\gamma}$, P_p; comparação com K_p do ábaco; comparação com um muro de tardoz vertical.

Dados

Muro	$H = 3$ **m; tardoz inclinado** $\theta = 20^\circ$ **em relação à vertical; reaterro horizontal**
Solo	**areia seca:** $\gamma = 15.7\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ$; $\delta' = 30^\circ = \varphi'$



Solução

SOLUÇÃO

1 Coeficiente da espiral (módulo; δ′ = φ′ = 30°, θ = 20°)

$$K_{p\gamma} = \mathbf{4.321} \qquad K_{pq} = 4.127$$

2 Comparação com a força e com o ábaco

$$P_p = \tfrac{1}{2} K_{p\gamma} \gamma H^2 = \tfrac{1}{2}(4.321)(15.7)(9) = \mathbf{305.3}\ \mathrm{kN/m}$$

$$K_p = K_{p\gamma} \cos^2 20^\circ = 4.321(0.8830) = \mathbf{3.82}\ (\text{ábaco } 3.84)$$

P_p = **305.3 kN/m**; no mesmo solo, um muro com tardoz vertical (θ = 0, δ′ = 30°) forneceria 471.8 kN/m: um tardoz inclinado de 20° **reduz** a resistência passiva em 35%. A diferença em relação ao ábaco é de 0.6%.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

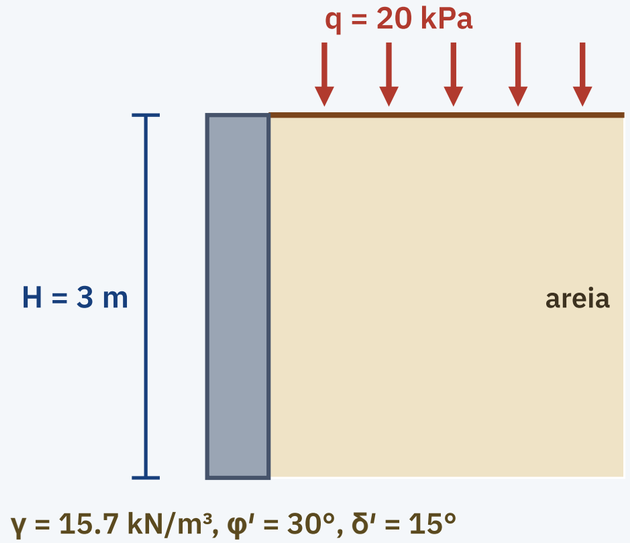
EXEMPLO

PEDE-SE

Parcelas do solo e da sobrecarga, $\mathbf{P_p}$ total e $\bar{\mathbf{z}}$.

Dados

Muro e solo	**Muro do Exemplo 2:** $H = 3$ **m,** $\gamma = 15.7\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30°,\ \delta' = 15°$
Sobrecarga	$q = 20$ **kPa (em superfície horizontal)**



Solução

SOLUÇÃO

1 Coeficientes (módulo, δ′ = 15°)

$$K_{p\gamma} = \mathbf{4.615} \qquad K_{pq} = \mathbf{4.532} \qquad q_e = 20\ \text{kPa}$$

2 Forças: solo (braço H/3 = 1.00 m) + sobrecarga (braço H/2 = 1.50 m)

$$P_\gamma = \tfrac{1}{2} K_{p\gamma} \gamma H^2 = 326.03\ \text{kN/m}$$

$$P_q = K_{pq} q_e H = 4.532(20)(3) = 271.90\ \text{kN/m}$$

3 Total e posição

$$P_p = 326.03 + 271.90 = \mathbf{597.94}\ \text{kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{326.03(1.00) + 271.90(1.50)}{597.94} = \mathbf{1.23}\ \text{m}$$

P_p = **597.9 kN/m**, $\bar{z}$ = **1.23 m** (1.00 m sem sobrecarga); a parcela da sobrecarga corresponde a 83% da parcela do solo.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

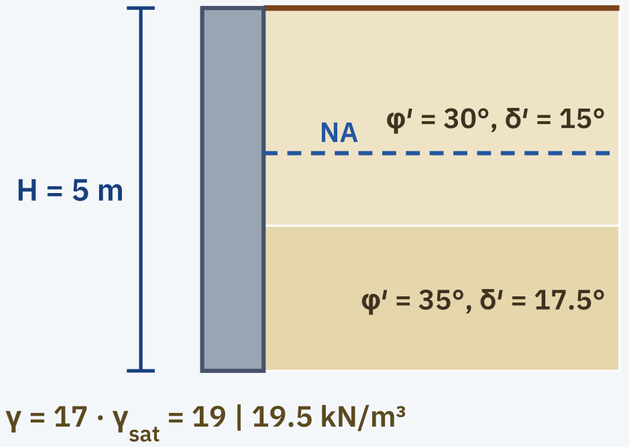
EXEMPLO

Dados

Muro	$H = 5$ **m, vertical; reaterro horizontal; sem sobrecarga**
Camada 1 (0–3 m)	$\gamma = 17,\ \gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ,\ \delta' = 15^\circ$
Camada 2 (3–5 m)	$\gamma = 17,\ \gamma_{sat} = 19.5\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 35^\circ,\ \delta' = 17.5^\circ$
Água subterrânea	**a 2 m de profundidade**

PEDE-SE

Salto de pressão na interface entre camadas, componentes, **P**, β e **z̄**.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Fatores (módulo)

$$\text{camada 1: } K_{p\gamma} = 4.615$$

$$\text{camada 2: } K_{p\gamma} = 6.522,\ K_{pq} = 6.351$$

2 Tensões: $\sigma'_v(2) = 34$; $\sigma'_v(3) = 43.19$; $\sigma'_v(5) = 62.57$ kPa

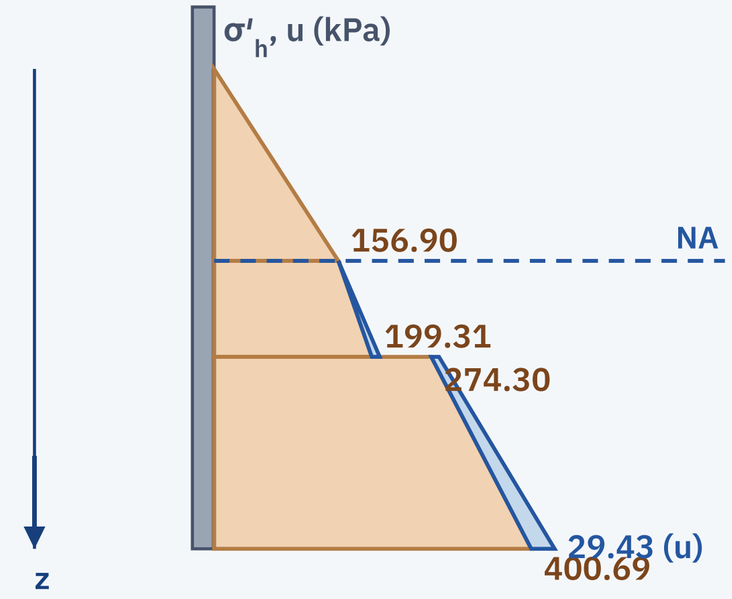
$$p(2) = 4.615(34) = 156.90$$

$$p(3^-) = 4.615(43.19) = 199.31$$

$$p(3^+) = K_{pq}\sigma'_v(3) = 6.351(43.19) = \mathbf{274.30}$$

$$p(5) = 274.30 + 6.522(19.38) = \mathbf{400.69}\ \text{kPa}$$

$$u(5) = \mathbf{29.43}\ \text{kPa}$$



Solução (2/2)

SOLUÇÃO

3 Forças e componentes ao longo do tardoz (com δ′ da camada)

$$P_s = 335.0 + 675.0 = 1{,}010.0 \text{ kN/m}$$

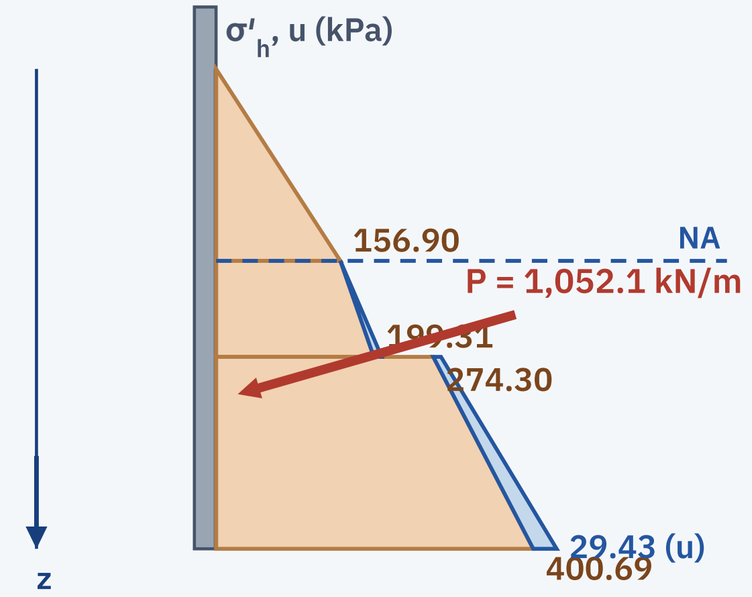
$$N_s = 967.3 \qquad T = 289.7 \text{ kN/m}$$

$$N_w = \tfrac{1}{2}(29.43)(3) = 44.15 \text{ kN/m (perpendicular à crista)}$$

4 Resultante e posição

$$N = N_s + N_w = 1{,}011.5 \qquad P = \sqrt{N^2 + T^2} = \mathbf{1{,}052.1} \text{ kN/m}$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{T}{N} = 15.98^\circ \qquad \bar{z} = \mathbf{1.61} \text{ m}$$



P = **1,052.1 kN/m**, β = 16.0°, a 1.61 m acima da base. A parcela da água é de apenas 44.1 kN/m (4%): no caso passivo, a resistência do solo é muito grande em comparação com a água; no limite, p salta de 199.3 para 274.3 kPa.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Escopo da solução

TEORIA

Solo granular ($c' = 0$); para o empuxo passivo em solo coesivo, ver os módulos de Rankine e de Coulomb.

A espiral logarítmica é o limite superior e Lancellotta, o limite inferior; a resistência real situa-se entre os dois. O método planar de Coulomb é contrário à segurança para δ' elevado.

A **cunha generalizada** (tardoz inclinado, superfície inclinada, camada, água, sobrecarga) é a extensão de engenharia do módulo; não existe solução fechada para solo estratificado; as parcelas do peso do solo e da sobrecarga são obtidas de suas próprias cunhas mínimas.

Validade: $\alpha < \varphi'$; o tardoz e a superfície devem se interceptar em ângulo suficiente; se a espiral sair do solo ou girar no sentido errado, não há mecanismo (o plano é o caso-limite).

Para **sismo**, utiliza-se o módulo de empuxo passivo sísmico.

Resumo

Pontos-chave

No caso passivo, a cunha plana é insegura: com atrito solo-muro, a superfície de ruptura é curva (espiral) junto ao calcanhar e plana perto da superfície (zona de Rankine)

Espiral: $r = r_0 e^{\omega \tan \varphi'}$; cada raio encontra a curva sob o ângulo φ', a resultante passa por O; área $(r_1^2 - r_0^2)/(4 \tan \varphi')$

Terzaghi–Peck: $P = (W\, l_W + P_d\, l_1)/l_P$; o P da cunha de tentativa de **menor** valor é a força passiva; $K_p = 2P_p/(\gamma H^2)$

Lancellotta (limite inferior, solução fechada), espiral (limite superior); Coulomb fornece 5 vezes mais em $\varphi' = \delta' = 40°$

Cunha generalizada: $P = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{p\gamma} + q_e H K_{pq}$; $K_p = K_{p\gamma}\cos^2\theta$ (definição do ábaco); camada a camada, $\sigma' = [K_{pq}\sigma'_{v,top} + K_{p\gamma}(\sigma'_v - \sigma'_{v,top})]\cos\theta$

Muro de exemplo ($H = 3$ m, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$): Coulomb 351.6 · espiral 326.0 · Lancellotta 313.6 kN/m

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Terzaghi, K. and Peck, R.B. (1967). Soil Mechanics in Engineering Practice, 2nd ed. Wiley, New York.

Shields, D.H. and Tolunay, A.Z. (1973). Passive pressure coefficients by method of slices. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 99(SM12), 1043–1053.

Lancellotta, R. (2002). Analytical solution of passive earth pressure. Géotechnique, 52(8), 617–619.

Sokolowskiĭ, V.V. (1965). Statics of Granular Media. Pergamon, London.

Zhu, D.Y. and Qian, Q. (2000). Determination of passive earth pressure coefficients by the method of triangular slices. Canadian Geotechnical Journal, 37(2), 485–491.

Caquot, A. and Kerisel, J. (1948). Tables for the Calculation of Passive Pressure, Active Pressure and Bearing Capacity of Foundations. Gauthier-Villars, Paris.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o motor de cálculo do próprio módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O exemplo inicial do módulo é o muro do Exemplo 2-3 (H = 3 m, δ′ = 15°).

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva a inclinação do tardoz do próprio muro, a inclinação do reaterro, as camadas, a sobrecarga e a água subterrânea; o módulo fornece em conjunto a espiral crítica, P_p e a altura de aplicação.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.