GeoTerva

地盤工学講義スライド・土圧

受働土圧：対数らせん

講義：粗い壁面に作用する受働土圧を曲線すべり面（対数らせん）で計算する方法、Terzaghi–Peckの試行くさび、Lancellottaの解、Coulombとの比較；傾斜した背面、傾斜面、層と水；各項目に計算例。

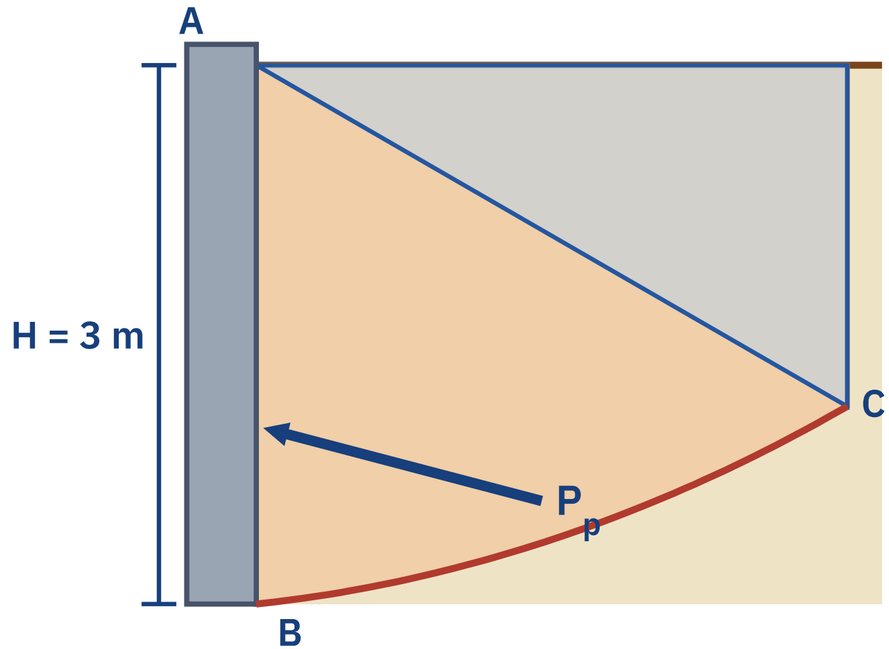
壁面摩擦

$r = r_0 e^{\omega \tan \phi'}$

Terzaghi – Peckのくさび

Lancellotta・Coulomb

傾斜背面・層・水



はじめに

この講義で学ぶこと

壁面が粗い場合に、なぜ**平面くさび**（Coulomb）ではなく**曲面**が必要となるのか

対数らせん：$r = r_0 e^{\omega \tan \phi'}$。各半径が$\phi'$で曲線に交わること、および合力がらせんの中心を通ること。

Terzaghi–Peck の試行くさびにおけるモーメントのつり合いによる P の計算；力は**最小**の試行くさびから求めること

K_pを**Lancellotta**の閉形式解で求め、Coulomb、Shields–Tolunay、Zhu–Qianと比較すること

背面土の傾斜、斜面、上載荷重、**層および水**に対する一般化くさび

大きなδ'においてCoulombがどれほど**不安全**になるか

講義の流れ

各項目は**3つの手順**で扱う：

1 · **理論**：規則は何か、なぜそうなるのか

2 · **問題**：与条件と求めるもの

3 · **解答**：数値を用いて手順ごとに

力は壁頭の単位長さ当たりである（kN/m）；$P_p = \tfrac{1}{2} K_p \gamma H^2$；壁面摩擦$\delta'$は壁が地盤を下方へ引きずる方向に働く。

受働の場合に平面すべり面が生じないのはなぜか。

理論

Coulombの平面すべり面は**主働**土圧に対しては良い近似である。しかし粗い壁面の**受働**抵抗に対しては実際の抵抗より大きな値を与え、壁面摩擦が増すほどさらに大きくなる：**危険側**である。

壁を地盤に押し込むと、地盤は壁に対して相対的に盛り上がる。壁は地盤を**下方**へ動かし（正の壁面摩擦）、受働力は壁面の法線からδ'だけ**下方**に傾く。この場合の破壊面は次のとおりである：

つま先付近（BC）は**曲線である**（対数らせん）

地表付近（CD）は**直線**である：水平と$45° - \phi'/2$をなす。ACD領域はRankine受働状態にある

COULOMBはどれだけ多く与えるか

ϕ' / δ'	らせん	Coulomb
30° / 15°	4.61	4.98
30° / 30°	6.68	10.10
40° / 20°	9.67	11.77
40° / 40°	18.86	92.59

K_p係数；$\phi' = \delta' = 40°$の場合Coulombは5倍大きくなる。

対数らせんを有用にする性質

理論

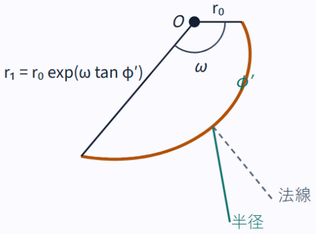
すべり面の曲線部分 BC は、O を中心とする対数らせんとみなす：

$$r = r_0 \, e^{\omega \tan \varphi'}$$

r_0は$\omega = 0$における半径である。対数らせんの性質：**すべての半径は曲線とϕ'で交わる**。砂質土では、すべり面上の法線力とせん断力の合力も法線とϕ'をなす；すなわち、対数らせん上では合力は半径に沿って延び、**Oを通る**：これはOに関するモーメントの式から導かれる。

$$A_{OAB} = \frac{r_1^2 - r_0^2}{4 \tan \varphi'}$$

r_0 と r_1 の間の分割片の面積である；モジュールはくさびの面積と図心を数値的に求める。



垂直力とせん断力の合力F（螺旋上で法線に対しφ'傾く）は半径上にあり ー Oを通る

問題

例題

与条件

らせん	**中心O；初期半径**$r_0 = 1.00$ **m；**$\varphi' = 30^\circ$
角度	$\omega = 60^\circ$ **と**$\omega = 90^\circ$

求めるもの

r_1、曲線に対する半径の角度、および扇形の**面積**。

解答

解答

1 ω = 60° = 1.0472 rad

$$r_1 = r_0 e^{\omega \tan\varphi'} = 1.00\, e^{1.0472 \times 0.5774} = 1.00\, e^{0.6046}$$

$$r_1 = \mathbf{1.831}\ \text{m}$$

2 扇形の面積

$$A = \frac{r_1^2 - r_0^2}{4\tan\varphi'} = \frac{3.351 - 1.00}{4(0.5774)} = \mathbf{1.018}\ \text{m}^2$$

3 ω = 90°の場合

$$r_1 = 1.00\, e^{1.5708 \times 0.5774} = \mathbf{2.477}\ \text{m} \qquad A = \mathbf{2.223}\ \text{m}^2$$

半径は1ラジアンごとに $e^{\tan\phi'}$ = 1.781 倍になる。ω = 60° では r_1 = 1.831 m、面積は 1.018 m² である。半径は曲線と**各点で ϕ' = 30°** をなす。したがって合力は O を通る。

GeoTervaで解答を確認する ↗

TerzaghiとPeck (1967) の方法

理論

高さHの鉛直壁ABについて：

Aから、地表の**45° − ϕ'/2**下方に直線ACを引く；その上に点Cを選ぶ。

AC線上で、Bを通るr_0 = OBの半径をもち、Cに達する（$r_1 = OC = r_0 e^{\omega \tan \phi'}$）対数らせんの中心**O**を求める。

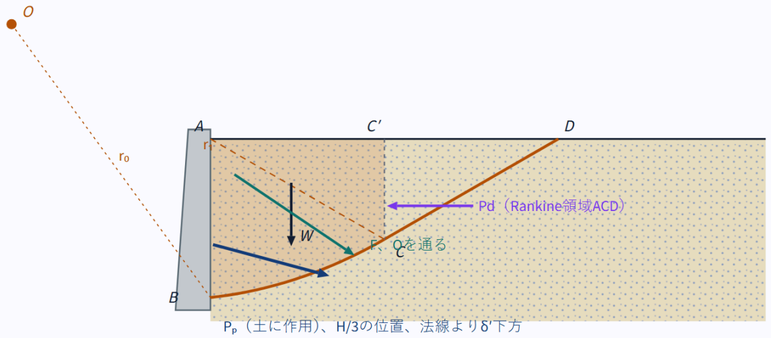
面CC′は領域ACDのRankine受働力を負担する（水平、C′からd/3上方）：

$$P_d = \tfrac{1}{2}\gamma d^2 \tan^2\!\left(45^\circ + \frac{\varphi'}{2}\right)$$

くさびABCC′の重量W、P_dおよび壁面力P（H/3の位置、法線からδ'下方）についてOに関するモーメント（合力FはOを通る）：

$$P = \frac{W\,l_W + P_d\,l_1}{l_P} \qquad P_p = \min_C P \qquad K_p = \frac{2P_p}{\gamma H^2}$$

試行は多くのCについて繰り返す；最小の力が受働力である。$\delta' = 0$では対数らせんは平面に帰着し、$K_p = \tan^2(45° + \phi'/2)$となる。



問題

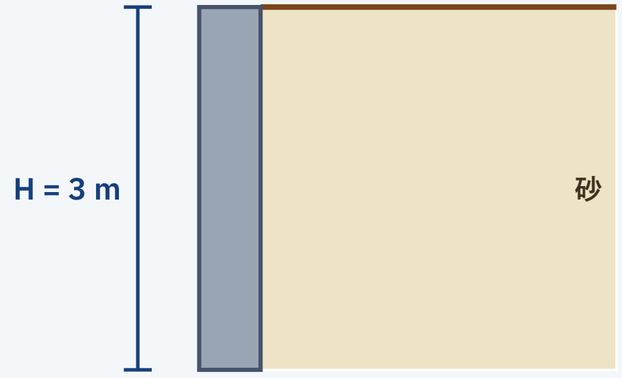
例題

与条件

壁	$H = 3$ m、鉛直方向；水平な背面土
地盤	乾燥砂：$\gamma = 15.7$ kN/m^3, $\varphi' = 30^\circ$；壁面摩擦$\delta' = 15^\circ$

求めるもの

最小の試行くさびの形状およびP_p、K_p。複数の試行くさびとの比較。モジュールはこの擁壁で開く。



γ = 15.7 kN/m³、ϕ' = 30°、δ' = 15°（受働）

解答 (1/2)

解答

1 幾何形状（ACは水平と45° − 15° = 30°）

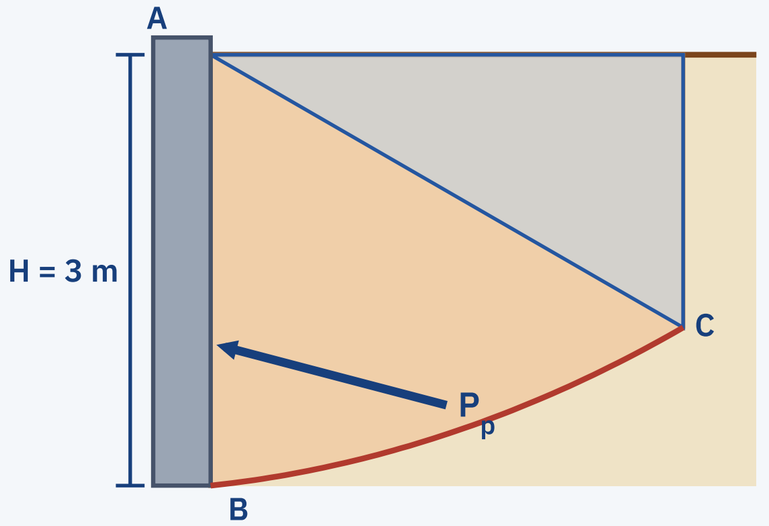
$$t = 3.80\ \text{m}:\ C = (3.29;\ 1.10)\ \text{m},\ \ d = H - y_C = 1.90\ \text{m}$$

$$O = (-3.76;\ 5.17)\ \text{m},\ \ r_0 = OB = 6.39\ \text{m},\ \ r_1 = OC = 8.14\ \text{m}$$

2 らせん角とくさび重量

$$\omega = \ln(r_1/r_0)/\tan 30^\circ = 23.97^\circ$$

$$W = \gamma A_{ABCC'} = 15.7\,(8.480) = \mathbf{133.14}\ \text{kN/m}$$



解答 (2/2)

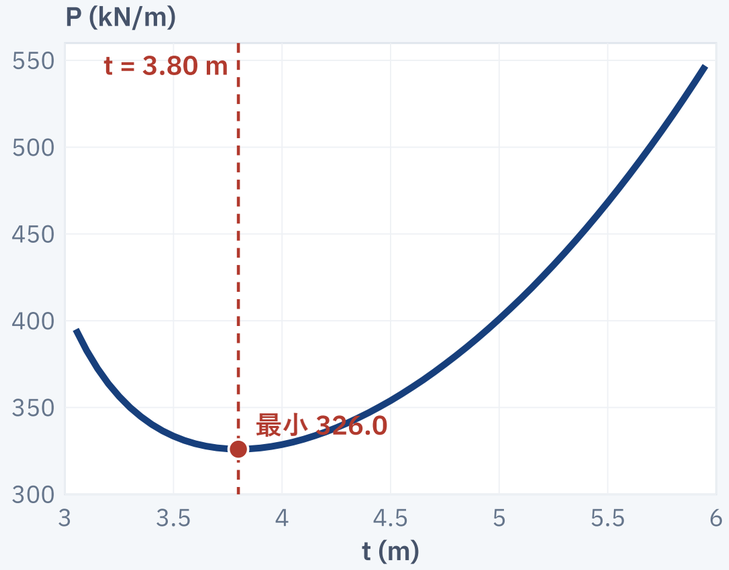
解答

3 Rankine領域：$P_d = \frac{1}{2}\gamma d^2 \tan^2 60°$

$$P_d = \tfrac{1}{2}(15.7)(1.899)^2(3) = \mathbf{84.96}\ \text{kN/m}$$

4 Oに関するモーメント（腕の長さ$l_W = 5.289$、$|l_1| = 3.438$、$l_P = 3.056$ m）

$$P = \frac{W\,l_W + P_d\,|l_1|}{l_P} = \frac{133.14(5.289) + 84.96(3.438)}{3.056} = \mathbf{326.03}\ \text{kN/m}$$



最小の試行力は**P_p = 326.0 kN/m**（t = 3.80 m）、$K_p = 2P_p/(\gamma H^2)$ = **4.615**である。tがより小さい場合もより大きい場合も力は増大する（t = 3.2 m：363.8、t = 4.5 m：354.0 kN/m）。したがって受働力が**最小**となる試行くさびである。

GeoTervaで解答を確認する ↗

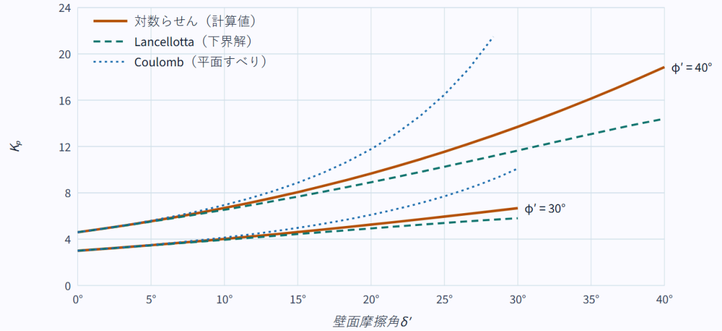
対数らせんとその他の解法

理論

鉛直壁、水平背面土の場合の他の解法（いずれも$P_p = \frac{1}{2}K_p \gamma H^2$）：Shields–Tolunay（分割法、表）、Sokolowskiĭ（特性曲線法、表）、Zhu–Qian（三角形分割片、表）および**Lancellotta (2002)**の閉形式解（下界）：

$$K_p = \frac{\cos\delta'}{1-\sin\varphi'}\left(\cos\delta' + \sqrt{\sin^2\varphi' - \sin^2\delta'}\right) e^{2\theta\tan\varphi'} \frac{1}{\cos\delta'} \qquad 2\theta = \sin^{-1}\frac{\sin\delta'}{\sin\varphi'} + \delta'$$

ϕ'	δ'	対数らせん	Lancellotta	Coulomb
20°	10°	2.56	2.52	2.64
20°	20°	3.07	2.87	3.53
30°	15°	4.61	4.44	4.98
30°	30°	6.68	5.80	10.10
40°	20°	9.67	8.92	11.77
40°	40°	18.86	14.39	92.59



Lancellottaは下限であり、対数らせんは上限である。特性曲線法は両者の間にあり、対数らせんに非常に近い。

Coulombは大きなδ'で過大評価する（$\phi' = \delta' = 40°$：92.6）。

問題

例題

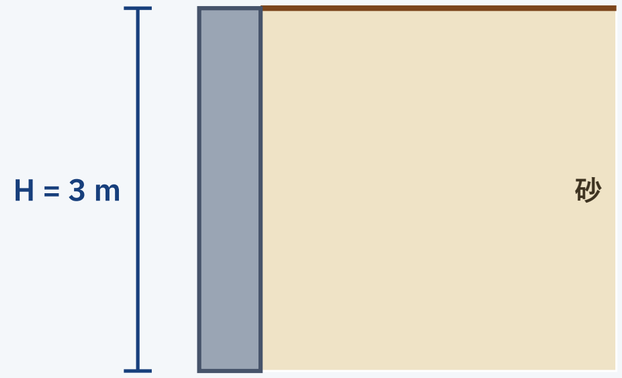
与条件

壁体と地盤

例題2の擁壁： $H = 3$ m, $\gamma = 15.7$ kN/m^3, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$

求めるもの

LancellottaのK_pを段階的に；5解法のP_p値とその順位。



γ = 15.7 kN/m³、ϕ' = 30°、δ' = 15°（受働）

解答 (1/2)

解答

1 Lancellotta（下界）：2θ と K_p

$$2\theta = \sin^{-1}\frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} + 15^\circ = 31.17^\circ + 15^\circ = 0.8059 \text{ rad}$$

$$K_p = \frac{\cos 15^\circ}{1-\sin 30^\circ}\left(\cos 15^\circ + 0.4278\right) e^{0.8059\tan 30^\circ}\frac{1}{\cos 15^\circ} = \mathbf{4.439}$$

解答 (2/2)

解答

2 5つの解（$P_p = \frac{1}{2}K_p(15.7)(9) = 70.65\ K_p$）

解答	K_p	P_p (kN/m)
Coulomb (1776)、平面すべり面	4.977	351.6
Terzaghi & Peck（対数らせん）	4.615	326.0
Shields & Tolunay (1973)	4.280	302.4
Zhu & Qian (2000)	4.575	323.2
Lancellotta (2002)	4.439	313.6

平面すべりCoulomb解は最大値（351.6 kN/m）を与える。曲面すべり解は**302–326 kN/m**の範囲に集中する。Lancellotta（下限）は313.6、対数らせん（上限）は326.0 kN/mである。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

例題

与条件

地盤	**砂、$\varphi' = 30^\circ$；鉛直壁、水平背面土**
変数	$\delta' = 0^\circ,\ 10^\circ,\ 15^\circ,\ 20^\circ,\ 30^\circ$

求めるもの

各 δ' に対する K_p（対数らせん、Lancellotta、Coulomb）とCoulombに対する超過分。

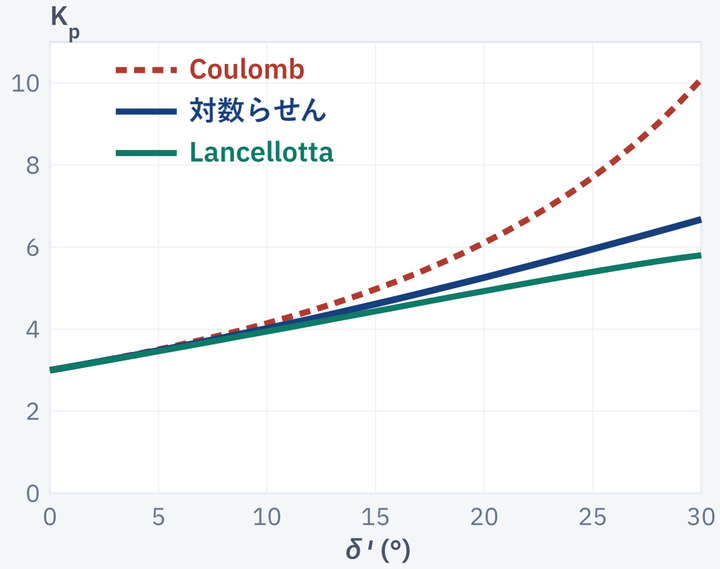
解答

解答

1 同一の $\phi' = 30°$ に対する4手法

δ'	対数らせん	Lancellotta	Coulomb	Coulomb／対数らせん
0°	3.000	3.000	3.000	1.00
10°	4.020	3.946	4.143	1.03
15°	4.615	4.439	4.977	1.08
20°	5.260	4.930	6.105	1.16
30°	6.677	5.804	10.095	1.51

$\delta' = 0$では3つともRankine（3.00）に等しい；δ'が増加するとCoulombの対数らせんは急速にこれを上回る：$\delta' = 15°$で8%、$\delta' = 30°$で51%大きい（不安全）。実務では受働抵抗に対して対数らせんまたは $\delta' \le \phi'/2$ を用いる。



GeoTervaで解答を確認する ↗

傾斜した背面土、傾斜表面、上載荷重、層、水

理論

モジュールはTerzaghi–Peckのくさびを、θで傾斜する法肩とαで傾斜する壁面に拡張する：ACと地表面の間の領域は、傾斜壁面のRankine受働状態にある。AC上の対数らせんはOから描かれる。対数らせんは平面に縮退しうる（Coulomb平面も一つの機構であり、両者のうち小さい方を採用する）。

$$P_p = \tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{p\gamma} + q_e H K_{pq} \qquad q_e = q\frac{\cos\theta}{\cos(\theta-\alpha)}$$

土の重量（H/3）と上載荷重（H/2）の寄与分は、それぞれの最小試行くさびから求める。**成層**盛土では各層がそれぞれの$K_{p\gamma}$、K_{pq}値をとる。上載土の重量は上載荷重のように作用する。**水中**ではγ'とuを背面に直角に加算する：

$$\sigma'_p = \left[K_{pq}\sigma'_{v,top} + K_{p\gamma}\left(\sigma'_v - \sigma'_{v,top}\right)\right]\cos\theta$$

ケース（$\delta' = \phi' = 30°$）	K_p図表（Caquot–Kerisel）	K_pモジュール	差
θ = 20°	3.84	3.82	−0.6 %
θ = 30°	2.76	2.80	+1.6 %
α/ϕ' = 0.4 (α = 12°)	10.60	10.22	−3.6 %
α/ϕ' = 0.8 (α = 24°)	15.10	14.51	−3.9 %

$K_p = K_{p\gamma}\cos^2\theta$ （Caquot–KeriselではHの代わりに背面長さ$H_1 = H/\cos\theta$をとる）。この層状化への拡張はモジュールの工学的拡張である。

CAQUOT – KERISEL R′

Caquot–Keriselの図表は$\delta' = \phi'$に対するものである。他のδ'に対しては$K_p = R'K_{p(\delta'=\phi')}$とする。$\phi' = 30°$、$\delta'/\phi' = 0.5$の場合、$R' = 0.746$である。

問題

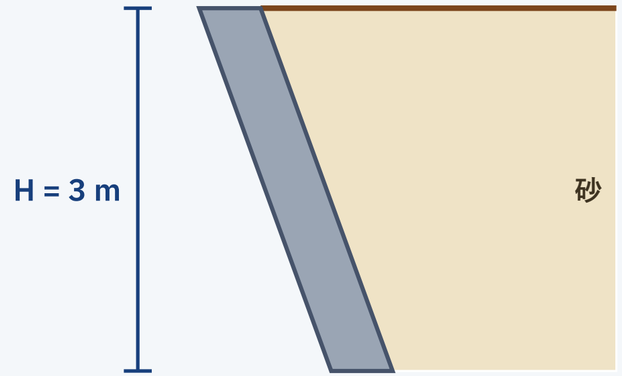
例題

与条件

壁	$H = 3$ m；背面は鉛直から$\theta = 20^\circ$傾斜；水平地表面
地盤	乾燥砂：$\gamma = 15.7$ kN/m^3, $\varphi' = 30^\circ$；$\delta' = 30^\circ = \varphi'$

求めるもの

$K_{p\gamma}$、P_p；図表によるK_pとの比較；背面が鉛直な壁との比較。



θ = 20°、ϕ' = 30°、δ' = 30°（受働）

解答

解答

1 対数らせん係数（モジュール；$\delta' = \phi' = 30°$、$\theta = 20°$）

$$K_{p\gamma} = \mathbf{4.321} \qquad K_{pq} = 4.127$$

2 力と図表による比較

$$P_p = \tfrac{1}{2} K_{p\gamma} \gamma H^2 = \tfrac{1}{2}(4.321)(15.7)(9) = \mathbf{305.3}\ \text{kN/m}$$

$$K_p = K_{p\gamma} \cos^2 20^\circ = 4.321(0.8830) = \mathbf{3.82}\ \text{（図表 3.84）}$$

P_p = **305.3 kN/m**。同じ地盤で背面が鉛直の壁（$\theta = 0$、$\delta' = 30°$）では471.8 kN/mとなる：背面が20°傾斜すると受働抵抗は35%**減少**する。図表との差は0.6%。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

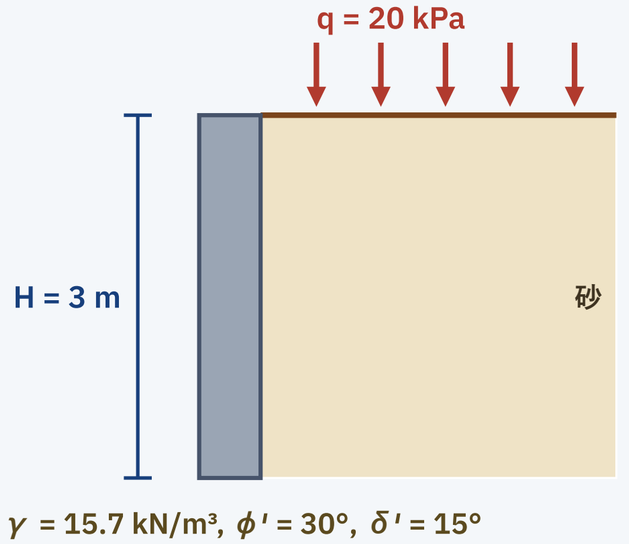
例題

与条件

壁体と地盤	**例題2の擁壁：** $H = 3$ m, $\gamma = 15.7$ kN/m^3, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$
上載荷重	$q = 20$ **kPa（水平面において）**

求めるもの

地盤と上載荷重の寄与分、合計P_pおよび$\bar{z}$。



解答

解答

1 係数（モジュール、$\delta' = 15°$）

$$K_{p\gamma} = \mathbf{4.615} \qquad K_{pq} = \mathbf{4.532} \qquad q_e = 20 \text{ kPa}$$

2 力：地盤（腕の長さH/3 = 1.00 m）＋上載荷重（腕の長さH/2 = 1.50 m）

$$P_\gamma = \tfrac{1}{2} K_{p\gamma} \gamma H^2 = 326.03 \text{ kN/m}$$

$$P_q = K_{pq} q_e H = 4.532(20)(3) = 271.90 \text{ kN/m}$$

3 合計と位置

$$P_p = 326.03 + 271.90 = \mathbf{597.94} \text{ kN/m}$$

$$\bar{z} = \frac{326.03(1.00) + 271.90(1.50)}{597.94} = \mathbf{1.23} \text{ m}$$

P_p = **597.9 kN/m**、$\bar{z}$ = **1.23 m**（上載荷重なしでは1.00 m）；上載荷重の寄与は地盤の83%である。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

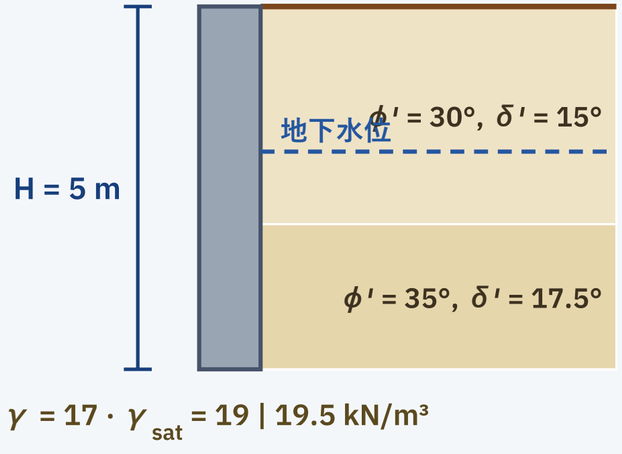
例題

与条件

壁	$H = 5$ m、鉛直、水平背面土、上載荷重なし
第1層（0–3 m）	$\gamma = 17$, $\gamma_{sat} = 19$ kN/m^3, $\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$
第2層（3–5 m）	$\gamma = 17$, $\gamma_{sat} = 19.5$ kN/m^3, $\varphi' = 35°$, $\delta' = 17.5°$
地下水	深さ2 mで

求めるもの

層境界における圧力の飛び、成分、**P**、β および$\bar{z}$。



解答 (1/2)

解答

1 係数（モジュール）

$$\text{層1：}\ K_{p\gamma} = 4.615$$

$$\text{層2：}\ K_{p\gamma} = 6.522,\ K_{pq} = 6.351$$

2 応力：$\sigma'_v(2) = 34$；$\sigma'_v(3) = 43.19$；$\sigma'_v(5) = 62.57$ kPa

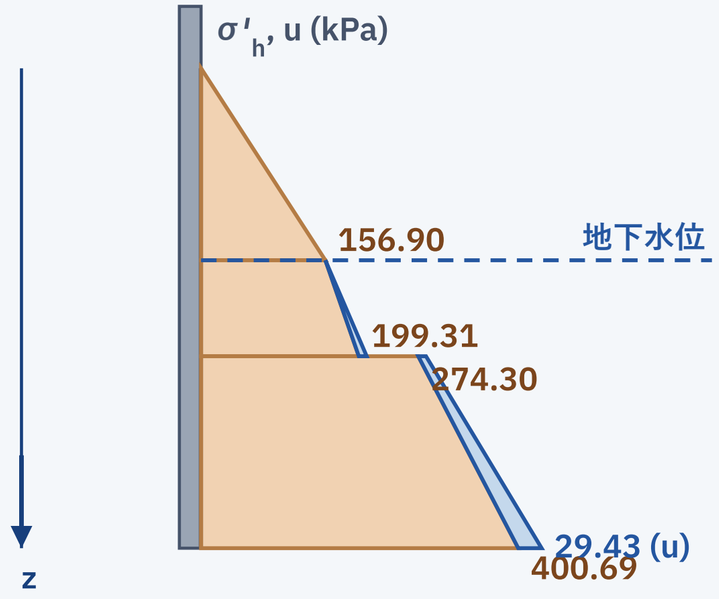
$$p(2) = 4.615(34) = 156.90$$

$$p(3^-) = 4.615(43.19) = 199.31$$

$$p(3^+) = K_{pq}\sigma'_v(3) = 6.351(43.19) = \mathbf{274.30}$$

$$p(5) = 274.30 + 6.522(19.38) = \mathbf{400.69}\ \text{kPa}$$

$$u(5) = \mathbf{29.43}\ \text{kPa}$$



解答 (2/2)

解答

3 背面に沿う力とその成分（層の δ' を用いる）

$$P_s = 335.0 + 675.0 = 1{,}010.0 \text{ kN/m}$$

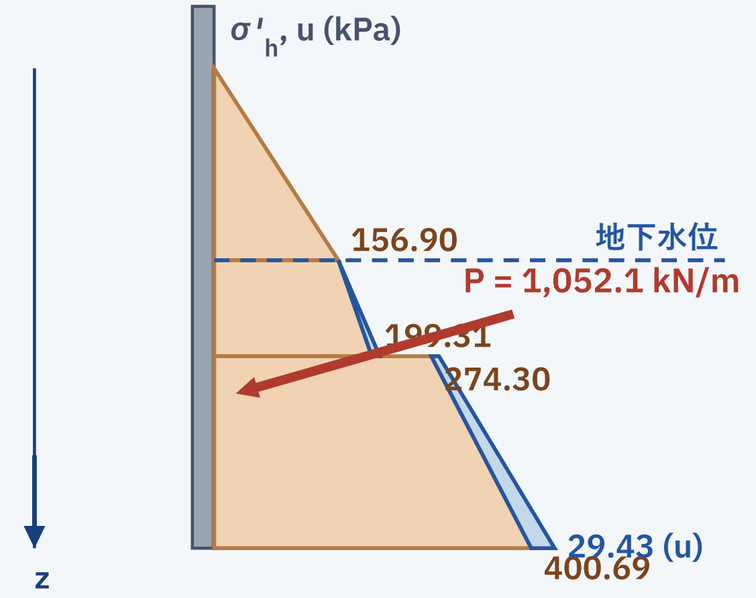
$$N_s = 967.3 \qquad T = 289.7 \text{ kN/m}$$

$$N_w = \tfrac{1}{2}(29.43)(3) = 44.15 \text{ kN/m}$$ （尾根に直交）

4 合力と作用位置

$$N = N_s + N_w = 1{,}011.5 \qquad P = \sqrt{N^2 + T^2} = \mathbf{1{,}052.1} \text{ kN/m}$$

$$\beta = \tan^{-1}\frac{T}{N} = 15.98^\circ \qquad \bar{z} = \mathbf{1.61} \text{ m}$$



P = **1,052.1 kN/m**、β = 16.0°、底面から1.61 m上方。水の寄与はわずか44.1 kN/m（4%）：受働時は水に比べて土の抵抗が非常に大きい；限界でpは199.3 → 274.3 kPaへ跳ぶ。

GeoTervaで解答を確認する ↗

解答の範囲

理論

砂質土（$c' = 0$）；粘性土の受働土圧についてはRankineおよびCoulombのモジュールを参照。

対数らせんが上限、Lancellottaが下限であり、実際の抵抗は両者の間にある。平面すべりのCoulombは大きなδ'では不安全側となる。

一般化くさび（傾斜した背面、傾斜した地表面、層、水、上載荷重）は本モジュールの工学的拡張であり、層状地盤の閉形式解は存在しない。土の重量と上載荷重の分担は、それぞれ自身の最小くさびから求める。

適用条件：$\alpha < \phi'$；背面と地表面は十分な角度で交差しなければならない；らせんが地盤から抜け出る場合や回転方向が逆の場合は機構とならない（直線は極限状態である）。

地震時には地震時受働モジュールを用いる。

まとめ

ポイントのまとめ

受働側では平面くさびは安全でない：壁面摩擦があると、破壊面はかかと部で曲線（らせん）となり、地表付近では平面（Rankine領域）となる

対数らせん：$r = r_0 e^{\omega \tan \phi'}$；各半径は$\phi'$で曲線と交わり、合力はOを通る；面積は$(r_1^2 - r_0^2)/(4 \tan \phi')$

Terzaghi–Peck：$P = (W l_W + P_d l_1)/l_P$。**最小**の試行くさびにおけるPが受働土圧である。$K_p = 2P_p/(\gamma H^2)$

Lancellotta（下限、閉形式解）、対数らせん（上限）；Coulombは$\phi' = \delta' = 40°$で5倍多く与える

一般化くさび：$P = \frac{1}{2}\gamma H^2 K_{p\gamma} + q_e H K_{pq}$；$K_p = K_{p\gamma} \cos^2\theta$（図表による定義）；層ごとに $\sigma' = [K_{pq}\sigma'_{v,上} + K_{p\gamma}(\sigma'_v - \sigma'_{v,上})]\cos\theta$

例題の壁（$H = 3$ m, $\phi' = 30°$, $\delta' = 15°$）：Coulomb 351.6・対数らせん 326.0・Lancellotta 313.6 kN/m

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Terzaghi, K. and Peck, R.B. (1967). Soil Mechanics in Engineering Practice, 2nd ed. Wiley, New York.

Shields, D.H. and Tolunay, A.Z. (1973). Passive pressure coefficients by method of slices. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 99(SM12), 1043–1053.

Lancellotta, R. (2002). Analytical solution of passive earth pressure. Géotechnique, 52(8), 617–619.

Sokolowskiĭ, V.V. (1965). Statics of Granular Media. Pergamon, London.

Zhu, D.Y. and Qian, Q. (2000). Determination of passive earth pressure coefficients by the method of triangular slices. Canadian Geotechnical Journal, 37(2), 485–491.

Caquot, A. and Kerisel, J. (1948). Tables for the Calculation of Passive Pressure, Active Pressure and Bearing Capacity of Foundations. Gauthier-Villars, Paris.

Das, B.M. (2016). Principles of Foundation Engineering, 8th ed. Cengage Learning.

注記

数値例はすべてモジュール自身の計算エンジンで生成したものであり、モジュールは同じ値を与える。モジュールは例題2-3の擁壁（H = 3 m、$\delta' = 15°$）で開く。

GeoTerva

オンライン地盤工学計算

理論から実務へ

自身の擁壁の背面傾斜、背面土の勾配、層構成、上載荷重、地下水をGeoTervaに入力する。モジュールは臨界らせん、P_pおよび合力の作用高さを同時に与える。

モジュールを開く →

理論ページ →

スマートフォンで開く

お試しモジュールは登録不要です。

講義で使用したい場合：info@geoterva.com