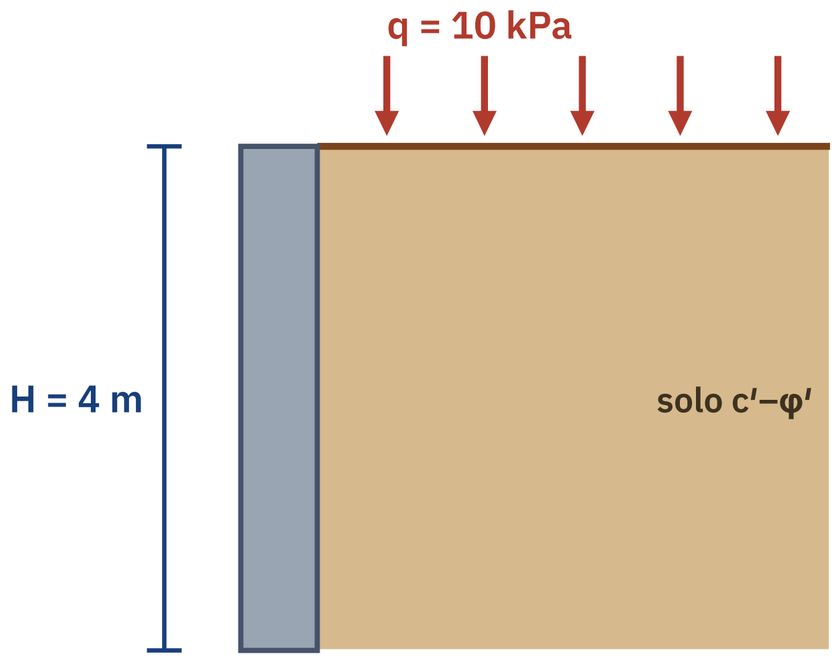
Apresentação de aula de geotecnia · Empuxo de terra

Empuxo passivo de terra sob sismo

Aula: cálculo pseudoestático da resistência passiva do solo à frente do muro durante um sismo (Subba Rao e Choudhury 2005): os coeficientes $K_{p\gamma(e)}$, $K_{pq(e)}$, $K_{pc'(e)}$, k_v, camadas, água e sobrecarga; exemplo resolvido em cada tópico.

$$P_{pe} = [\tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{p\gamma(e)} + qHK_{pq(e)} + 2c'HK_{pc'(e)}]/\cos\delta'$$

Subba Rao – Choudhury · k_h e k_v · Camada · água · sobrecarga



Introdução

O que veremos nesta aula?

- Por que a resistência passiva **diminui** durante o sismo: a cunha, com sua força de inércia, ajuda a afastar o solo do muro
- Cálculo da força passiva com **três coeficientes**: $P_{pe} = [\frac{1}{2}\gamma H^2 K_{p\gamma(e)} + qHK_{pq(e)} + 2c'HK_{pc'(e)}]/\cos\delta'$
- Os **ábacos** dos coeficientes ($\varphi' = 10–40°$, $\delta'/\varphi' = 0.5$ e 1, $k_v = 0$ e k_h) e como são lidos os valores intermediários
- Determinar a posição da força (H/3 e H/2) e a sua direção (δ' em relação à normal)
- O efeito de k_v, da **água** (confinada ou livre), das camadas e da sobrecarga
- O **limite de k_h** em que os ábacos terminam e por que o módulo para aí

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: qual é a regra e por que é assim?

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

As forças são por unidade de comprimento do muro (kN/m); muro vertical, superfície horizontal; k_v positivo para cima, $0 \le k_v \le k_h$.

Subba Rao e Choudhury (2005)

TEORIA

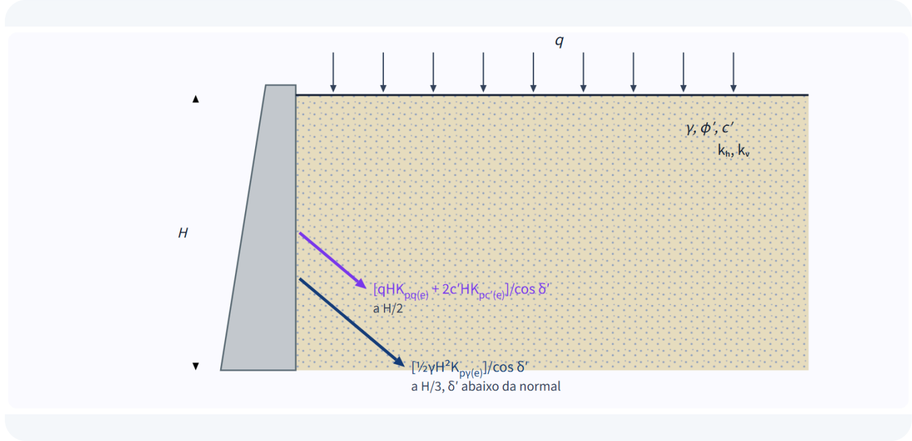
No sismo, a inércia da cunha à frente do muro ajuda a afastar o solo do muro; **a resistência passiva diminui**. Subba Rao e Choudhury estenderam o equilíbrio limite do empuxo passivo com superfície curva (espiral + trecho reto) com as forças $k_h W$ e $k_v W$ (muro vertical, reaterro horizontal c′–φ′, sobrecarga q, atrito solo-muro δ′, adesão c'_a):

$$P_{pe} = \left[\tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{p\gamma(e)} + qHK_{pq(e)} + 2c'HK_{pc'(e)}\right]\frac{1}{\cos\delta'}$$

Os três coeficientes são componentes **perpendiculares** ao muro; por isso são divididos por cos δ′. A parcela γ atua em H/3 e a parcela q e c′ em H/2:

$$\bar{z} = \frac{P_\gamma\,(H/3) + (P_q + P_{c'})\,(H/2)}{P_{pe}}$$

> A força é inclinada de δ′ **para baixo** em relação à normal à face do muro.



Ábacos e leitura de valores intermediários

TEORIA

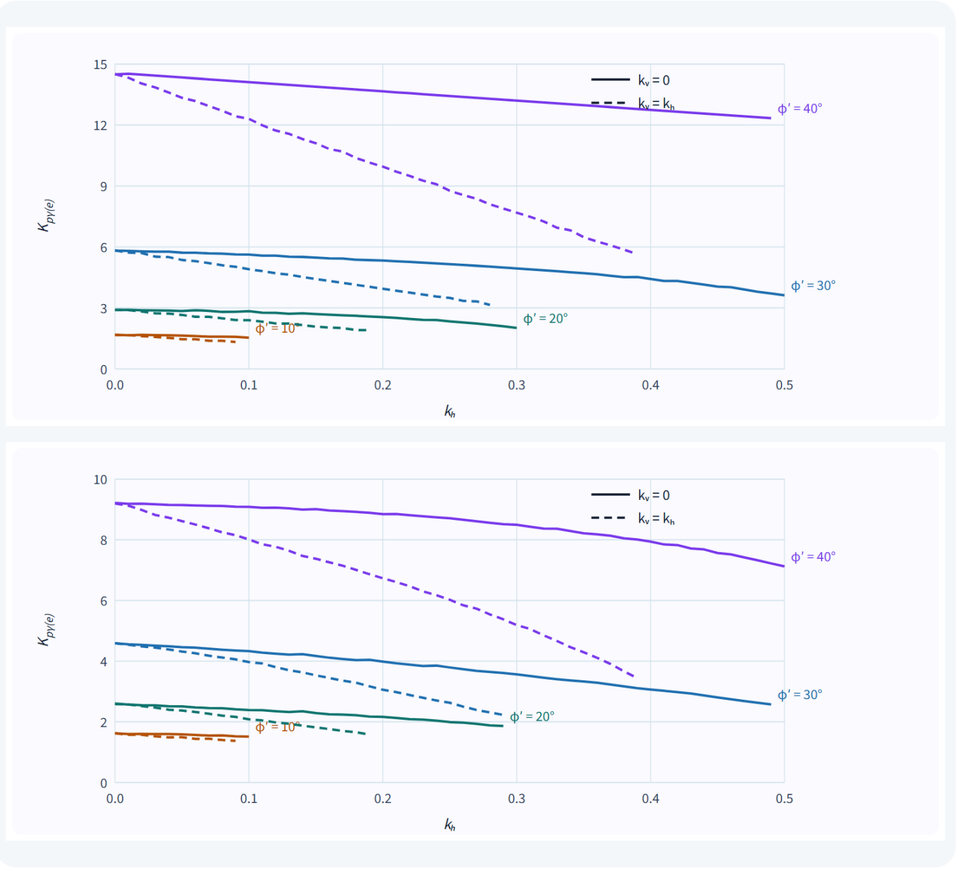
$K_{p\gamma(e)}$ e $K_{pq(e)}$ são fornecidos como **curvas de ábaco** para $\varphi' = 10°, 20°, 30°, 40°$; $\delta'/\varphi' = 0.5$ e 1; $k_v = 0$ e $k_v = k_h$ (o módulo trabalha com as curvas em passos de $\Delta k_h = 0.01$). Valores intermediários: lineares em k_h e δ'/φ', **log-lineares** em φ'; não há extrapolação fora do intervalo (φ' 10–40°, δ' $\varphi'/2$ – φ').

À medida que k_h aumenta, os coeficientes diminuem; **com $k_v = k_h$, muito mais rapidamente**. Cada curva termina no k_h em que a resistência passiva se esgota; o módulo para aí.

Em $k_h = 0$, os ábacos fornecem o coeficiente passivo estático: para $\varphi' = \delta' = 40°$, $K_{p\gamma(e)} = 14.49$; no módulo da espiral logarítmica, $K_p \cos \delta' = 14.45$.

$0 \le k_v \le k_h$ (para cima, desfavorável ao passivo): interpolação linear entre as curvas $k_v = 0$ e $k_v = k_h$; verificada com o coeficiente de Coulomb, erro < 0.4% (no sentido de valores menores).

$K_{pc'(e)}$ na tabela: para $\varphi' = 40°$, $\delta'/\varphi' = 1$, 5.95 com $c'_a = 0$ e 5.97 com adesão.



Enunciado

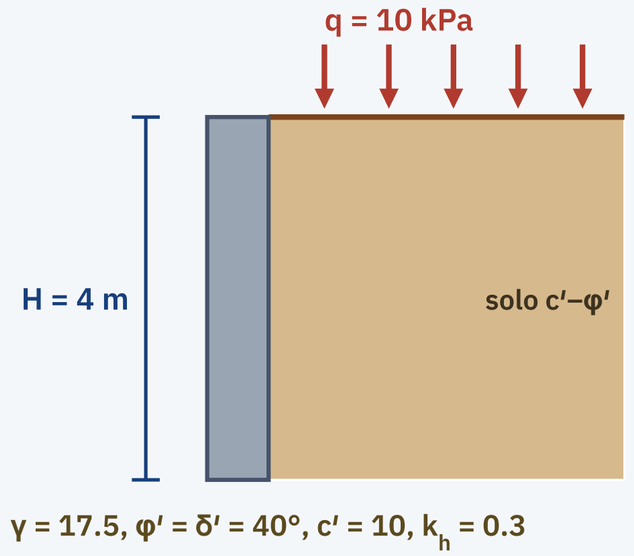
EXEMPLO

Dados

Muro	$H = 4$ **m, vertical; superfície horizontal;** $q = 10$ **kPa**
Solo	$\gamma = 17.5\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 40°,\ c' = 10$ **kPa;** $\delta' = 40°, c'_a = 0$
Sismo	$k_h = 0.3, k_v = 0$

PEDE-SE

Coeficientes do ábaco, $\mathbf{P_{pe}}$, sua direção e $\bar{\mathbf{z}}$. O módulo abre com este muro.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Coeficientes (δ′/φ′ = 1, k_h = 0.3, k_v = 0; o módulo lê dos ábacos)

$$K_{p\gamma(e)} = \mathbf{13.20} \qquad K_{pq(e)} = \mathbf{11.00} \qquad K_{pc'(e)} = \mathbf{5.95}$$

$$(\text{estático, } k_h = 0: \; K_{p\gamma} = 14.49, \; K_{pq} = 11.11)$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

2 Componentes normais e total

$$P_\gamma = \tfrac{1}{2}(17.5)(4)^2(13.20) = 1{,}848\ \text{kN/m}$$

$$P_q = 10(4)(11.00) = 440 \qquad P_{c'} = 2(10)(4)(5.95) = 476$$

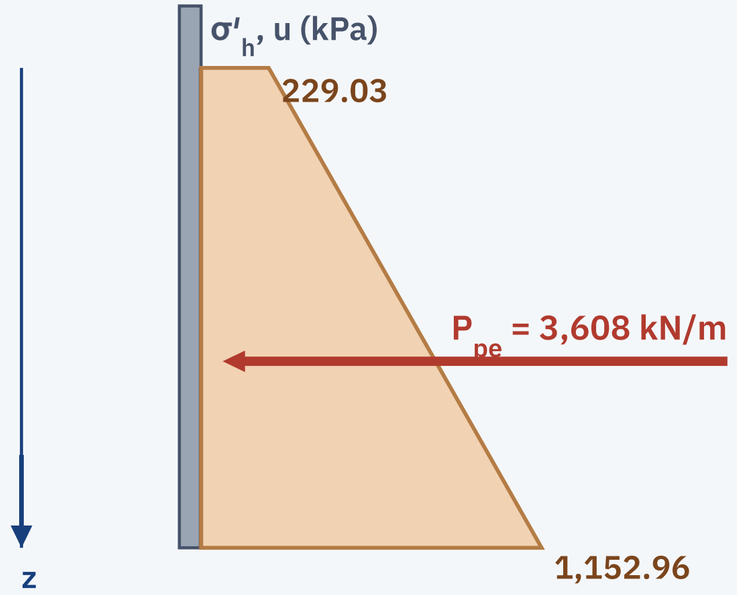
$$P_{pe} = \frac{1{,}848 + 440 + 476}{\cos 40^\circ} = \frac{2{,}764}{0.766} = \mathbf{3{,}608}\ \text{kN/m}$$

3 Posição e componentes

$$\bar{z} = \frac{2{,}412.2(4/3) + 1{,}195.9(2)}{3{,}608} = \mathbf{1.554}\ \text{m}$$

$$P_h = P_{pe}\cos 40^\circ = 2{,}764 \qquad P_v = P_{pe}\sin 40^\circ = 2{,}319\ \text{kN/m}$$

P_{pe} ≈ **3,608 kN/m**, inclinado 40° para baixo em relação à normal, a **1.554 m** acima da base; a parcela do peso do solo é de 2,412 e a de q e c′ é de 1,196 kN/m (ao dividir pela normal).



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

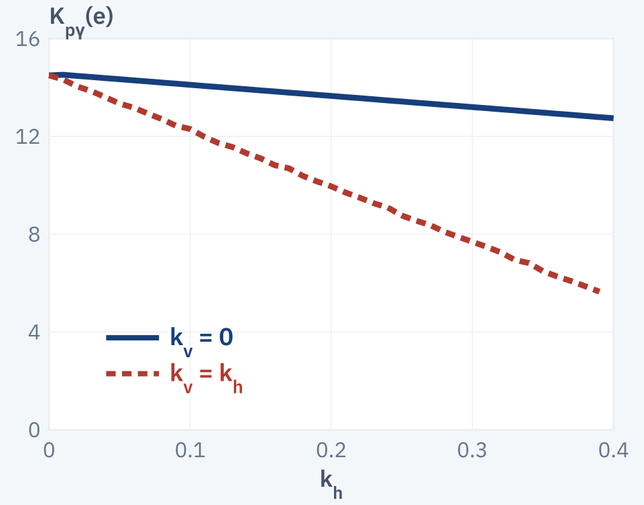
EXEMPLO

Dados

Solo	$\varphi' = \delta' = 40°$ **($\delta'/\varphi' = 1$); areia seca, não coesiva**
Variável	$k_h = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.35$ **e** $k_v = 0$ **ou** $k_v = k_h$

PEDE-SE

Valores de $K_{p\gamma(e)}$; razões de redução em $k_h = 0.3$.



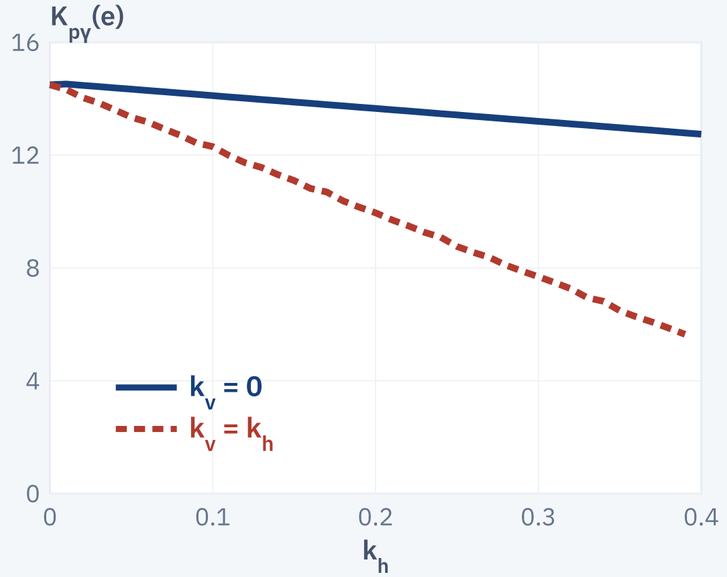
Solução

SOLUÇÃO

1 Leituras do ábaco ($\delta'/\varphi' = 1$)

k_h	$K_{p\gamma(e)}$ ($k_v = 0$)	$K_{p\gamma(e)}$ ($k_v = k_h$)
0.00	14.49	14.49
0.10	14.11	12.30
0.20	13.65	9.95
0.30	13.20	7.69
0.35	12.97	6.48

De $k_h = 0$ a 0.3, $K_{p\gamma(e)}$ passa de 14.49 a 13.20 (redução de 9%, $k_v = 0$); com $k_v = k_h$, cai para 7.69 (47%). No caso estático, 14.49 é compatível com $K_p \cos \delta' = 14.45$ do módulo da espiral logarítmica.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

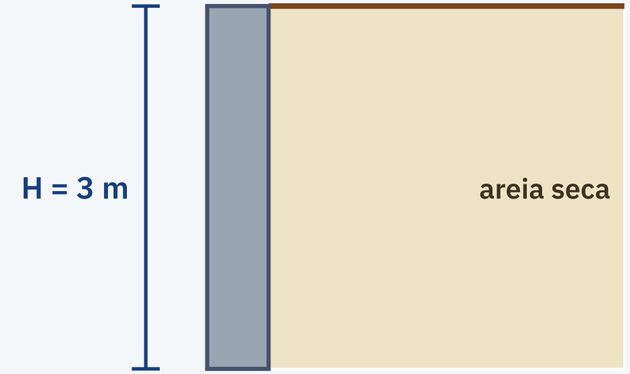
EXEMPLO

Dados

Muro	$H = 3$ m, vertical; superfície horizontal; sem sobrecarga
Solo	areia seca: $\gamma = 16\ \mathrm{kN/m^3}$, $\varphi' = 30°$; $\delta' = 15°$ ($\delta'/\varphi' = 0.5$)
Sismo	$k_h = 0.2$, $k_v = 0$

PEDE-SE

P_{pe}, $\bar{z}$, componentes; comparação com o empuxo passivo estático.



Solução

SOLUÇÃO

1 Coeficientes (δ′/φ′ = 0.5)

$$k_h = 0: \; K_{p\gamma} = 4.592 \qquad k_h = 0.2: \; K_{p\gamma(e)} = \mathbf{3.987}$$

2 Força (c′ = q = 0)

$$P_{pe} = \frac{\frac{1}{2}(16)(3)^2(3.987)}{\cos 15^\circ} = \frac{287.1}{0.9659} = \mathbf{297.2}\ \mathrm{kN/m}$$

$$\text{estático: } P_p = 342.3\ \mathrm{kN/m}\ (K_p = 4.592)$$

3 Posição e componentes

$$\bar{z} = \frac{H}{3} = \mathbf{1.00}\ \mathrm{m} \qquad P_h = P_{pe}\cos 15^\circ = 287.1 \qquad P_v = P_{pe}\sin 15^\circ = 76.9\ \mathrm{kN/m}$$

P_{pe} = **297.2 kN/m**; o valor estático era 342.3 kN/m: k_h = 0.2 **reduziu** a resistência em 13%.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

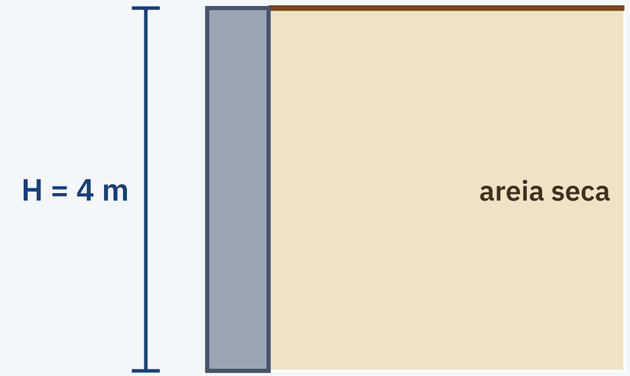
EXEMPLO

PEDE-SE

Para cada k_v, $K_{p\gamma(e)}$ e P_{pe}; como se obtém o valor intermediário?

Dados

Muro e solo	$H = 4$ **m; areia seca:** $\gamma = 17.5\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = \delta' = 40^\circ$
Sismo	$k_h = 0.3$**;** $k_v = 0,\ 0.15\ (= 0.5k_h),\ 0.30\ (= k_h)$



γ = 17.5, φ′ = δ′ = 40°, k_h = 0.3

Solução

SOLUÇÃO

1 Interpolação: $K(k_v) = K(0) + [K(k_h) - K(0)]\cdot k_v/k_h$; $P_{pe} = ½(17.5)(16)K_{pγ(e)}/\cos 40° = 182.7\ K_{pγ(e)}$

k_v	k_v/k_h	$K_{pγ(e)}$	$K_{pq(e)}$	P_{pe} (kN/m)
0.00	0.0	13.20	11.00	2,412
0.15	0.5	10.44	9.29	1,909
0.30	1.0	7.69	7.58	1,405

Com $k_v = 0.5k_h$, a força passa de 2,412 para 1,909 kN/m (redução de 21%); com $k_v = k_h$, é de 1,405 kN/m (redução de 42%). Como a aceleração vertical ascendente reduz o peso, ela é **desfavorável para o passivo**; $k_v = 0.5k_h$ é uma escolha comum.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Extensão de camadas do módulo

TEORIA

Os ábacos valem para solo único, muro vertical e superfície horizontal; a geometria permanece assim. O módulo divide o solo em **camadas delimitadas horizontalmente**; cada camada recebe o seu próprio coeficiente: o peso das camadas sobrejacentes (e q) atua como sobrecarga por meio de $K_{pq(e)}$, o peso próprio por meio de $K_{p\gamma(e)}$ e a coesão por meio de $K_{pc'(e)}$:

$$\sigma_n = K_{pq(e)}\sigma'_{v,top} + K_{p\gamma(e)}\left(\sigma'_v - \sigma'_{v,top}\right) + 2c'K_{pc'(e)} \qquad \text{ao longo da face: } \sigma_n \tan\delta'$$

Abaixo do nível d'água, $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$, e u é normal ao muro. No sismo, a água dos poros se move junto com o solo (**restrita**) ou não (**livre**); os ábacos são lidos com um k_h maior:

$$k_{h,w} = \frac{\gamma_{sat}}{\gamma_{sat} - \gamma_w}k_h \ \text{(restrita)} \qquad k_{h,w} = \frac{\gamma_d}{\gamma_{sat} - \gamma_w}k_h \ \text{(livre)}$$

Na água livre, a pressão hidrodinâmica de Westergaard $(7/8)k_h\gamma_w\sqrt{(d_w z')}$ é **subtraída da resistência** (fase desfavorável para o passivo). Sob a água, k_v é lido com a razão $k_v/k_{h,w}$.

Esta formulação em camadas é a extensão de engenharia do módulo; onde termina a curva do ábaco, o módulo para.

COMPOSIÇÃO

Camada: K_{pq} (sobrecarga acima) + $K_{p\gamma}$ (peso próprio) + $K_{pc'}$ (coesão); água: γ' e u; sismo: $k_{h,w}$.

Enunciado

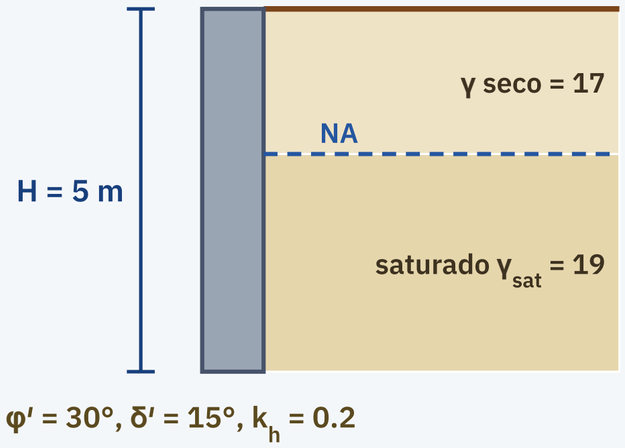
EXEMPLO

Dados

Muro	$H = 5$ **m, vertical; superfície horizontal; sem sobrecarga**
Solo	$\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3}$ **(seco),** $\gamma_{sat} = 19$**,** $\gamma_d = 17\ \mathrm{kN/m^3}$**;** $\varphi' = 30°,\ \delta' = 15°$
Sismo e água	$k_h = 0.2$**,** $k_v = 0$**; nível do lençol freático 2 m (d_w = 3 m)**

PEDE-SE

$\mathbf{P_{pe}}$ e $\bar{\mathbf{z}}$ para os dois casos de água confinada e livre; comparação com os valores seco e estático.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 k_h lido abaixo da água

$$\text{restrita: } k_{h,w} = \frac{19}{19 - 9.81}(0.2) = \mathbf{0.413} \qquad \text{livre: } k_{h,w} = \frac{17}{19 - 9.81}(0.2) = \mathbf{0.370}$$

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

2 Coeficientes e forças ($\sigma_n = K_{p\gamma(e)}\sigma'_v$, sem carga no topo da camada; abaixo do nível do lençol freático, $u = 9.81(z - 2)$; $P_{wd} = (7/12)(0.2)(9.81)(3)^2 = 10.30$ kN/m é subtraído da resistência)

	k_h lido	$K_{p\gamma(e)}$	Solo N_s	Água	Hidrodinâmica	P (kN/m)	$\bar{z}$ (m)
Acima do NA (0–2 m)	0.200	3.987					
Submerso, água confinada	0.413	3.008	566.8	44.1	–	629.5	1.84
Submerso, água livre	0.370	3.230	598.6	44.1	10.3	652.5	1.83

Com água restrita, P = **629.5 kN/m**; com água livre, **652.5 kN/m**; no solo sem água subterrânea, 877.1; no caso estático ($k_h = 0$) e com água, 885.9 kN/m. Como o $k_{h,w}$ lido sob a água é grande, $K_{p\gamma(e)}$ cai de 3.99 para 3.01 e a resistência **diminui**.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

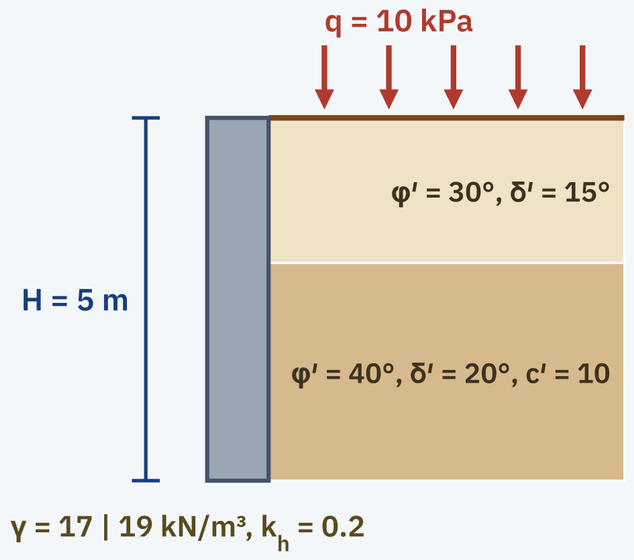
EXEMPLO

Dados

Muro	$H = 5$ **m, vertical; superfície horizontal;** $q = 10$ **kPa; sem água**
Camada 1 (0–2 m)	$\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30^\circ,\ \delta' = 15^\circ,\ c' = 0$
Camada 2 (2–5 m)	$\gamma = 19\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 40^\circ,\ \delta' = 20^\circ,\ c' = 10$ **kPa**
Sismo	$k_h = 0.2$**,** $k_v = 0$

PEDE-SE

Salto de pressão no limite entre camadas, forças em cada camada, **P**, β e **z̄**.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Coeficientes ($k_h = 0.2$)

$$\text{camada 1: } K_{p\gamma} = 3.987,\ K_{pq} = 4.096$$

$$\text{camada 2: } K_{p\gamma} = 8.844,\ K_{pq} = 8.449,\ K_{pc'} = 4.33$$

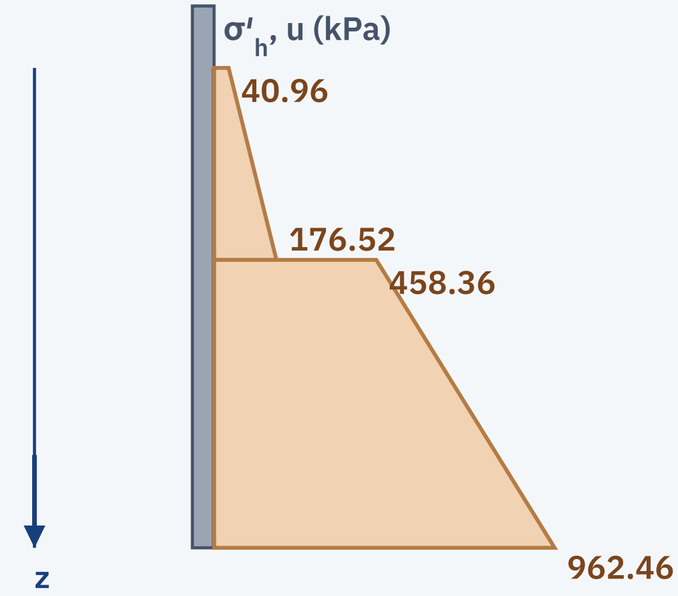
2 Tensão normal σ_n (σ'_v = 10; 44; 101 kPa: topo, interface, base)

$$\sigma_n(0) = K_{pq} q = 4.096(10) = 40.96$$

$$\sigma_n(2^-) = 40.96 + 3.987(34) = 176.52$$

$$\sigma_n(2^+) = 8.449(44) + 2(10)(4.33) = \mathbf{458.36}$$

$$\sigma_n(5) = 458.36 + 8.844(57) = \mathbf{962.46}\ \text{kPa}$$



Solução (2/2)

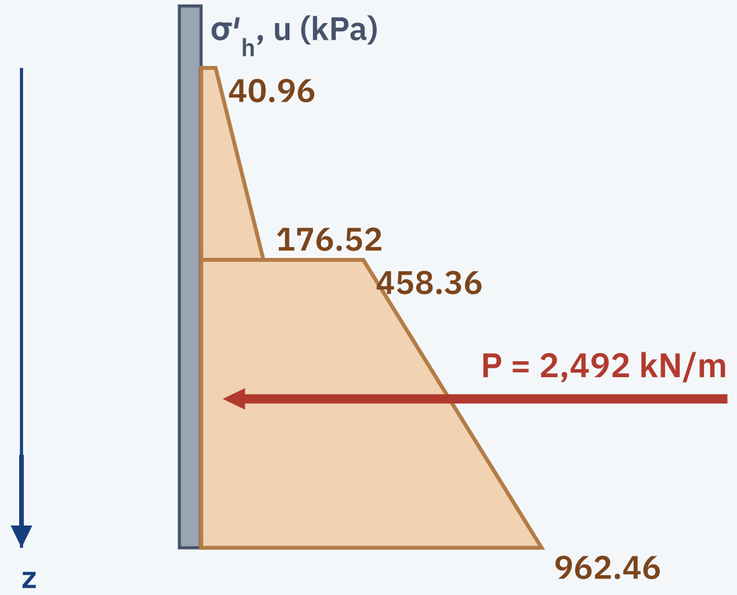
SOLUÇÃO

3 Componentes normal e ao longo da face (com δ′ da camada; braços a partir da base)

$$N_1 = 217.5 \text{ (braço } 3.79 \text{ m)}$$
$$N_2 = 2{,}131.2 \text{ (braço } 1.32 \text{ m)}$$
$$N = 2{,}348.7 \qquad T = 834.0 \text{ kN/m}$$

4 Resultante e posição

$$P = \sqrt{N^2 + T^2} = \mathbf{2{,}492.4} \text{ kN/m} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{T}{N} = 19.55°$$
$$\bar{z} = \frac{217.5(3.79) + 2{,}131.2(1.32)}{2{,}348.7} = \mathbf{1.55} \text{ m}$$



P = **2,492 kN/m**, β = 19.5° (δ′ entre 15° e 20°), a 1.55 m acima da base. No limite, σ_n **salta** de 176.5 para 458.4 kPa (φ′, δ′ e c′ mudam).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Onde se situa o módulo?

TEORIA

Cada curva do ábaco termina no valor de k_h em que a resistência passiva se esgota; o módulo para aí (não extrapola). O limite depende de φ', δ'/φ' e k_v:

φ'	$k_v = 0$, $\delta'/\varphi' = 0.5$	$k_v = 0$, $\delta'/\varphi' = 1$	$k_v = k_h$, $\delta'/\varphi' = 0.5$	$k_v = k_h$, $\delta'/\varphi' = 1$
10°	0.108	0.098	0.085	0.079
20°	0.292	0.279	0.185	0.198
30°	0.494	0.463	0.288	0.282
40°	0.500	0.463	0.393	0.397

As curvas $k_v = k_h$ terminam muito mais cedo ($\varphi' = 30°$, $\delta' = \varphi'/2$: 0.29).

O valor **lido sob a água** $k_{h,w} = k_h \gamma_{sat}/\gamma' \approx 2k_h$ ultrapassa facilmente esse limite.

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Solo	$\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$; $\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3}$; **lençol freático no topo do muro (z_w = 0)**
Sismo	$k_h = 0.3$, $k_v = 0$; **água intersticial restrita**

PEDE-SE

$k_{h,w}$ a ser lido sob a água; limite do ábaco; o que o módulo faz?

Solução

SOLUÇÃO

1 k_h lido e limite do ábaco

$$k_{h,w} = \frac{19}{19 - 9.81}(0.3) = \mathbf{0.620}$$

$$k_{h,lim}(30^\circ,\ \delta'/\varphi' = 0.5,\ k_v = 0) = 0.494$$

$k_{h,w}$ = 0.620 > 0.494: o ábaco não existe para esse valor (região em que a resistência passiva se esgota), **o módulo interrompe o cálculo**. Solução: rebaixar o nível do lençol freático ou reduzir k_h; para k_h = 0.2, $k_{h,w}$ = 0.41 está dentro do limite (Exemplo 5).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Escopo da solução

TEORIA

Pseudoestático: k_h e k_v constantes; sem dependência do tempo e sem deslocamento permanente.

Geometria: muro vertical, superfície horizontal; ábacos para $\varphi' = 10–40°$, $\delta'/\varphi' = 0.5–1$; k_v apenas para cima (desfavorável para o passivo), $0 \le k_v \le k_h$.

Coesão: tabela de $K_{pc'(e)}$; a adesão é nula ou $c'_a/c' = \tan\delta'/\tan\varphi'$.

Camada, água e sobrecarga é a extensão de engenharia do módulo (não existe solução fechada na literatura); a água pode ser restrita ou livre e, no caso livre, a parcela de Westergaard é retirada da resistência.

Empuxo passivo estático: espiral logarítmica e Coulomb; **empuxo ativo sísmico**: módulos de Mononobe–Okabe.

Resumo

Pontos-chave

$P_{pe} = [½\gamma H^2 K_{p\gamma(e)} + qHK_{pq(e)} + 2c'HK_{pc'(e)}] / \cos \delta'$; a parcela de γ em H/3, as de q e c′ em H/2; δ′ abaixo da normal à face

Os **coeficientes** são lidos em ábacos (φ′ de 10–40°, δ′/φ′ de 0.5–1, $k_v = 0$ e k_h): k_h varia linearmente em δ′/φ′ e log-linearmente em φ′; os coeficientes diminuem à medida que k_h aumenta

k_v (para cima) é desfavorável ao empuxo passivo: em $k_v = k_h$, com φ′ = δ′ = 40° e $k_h = 0.3$, $K_{p\gamma(e)}$ passa de 13.2 para 7.7

Nas camadas, $\sigma_n = K_{pq}\sigma'_{v,top} + K_{p\gamma}(\sigma'_v - \sigma'_{v,top}) + 2c'K_{pc'}$; salto no limite entre camadas; ao longo da face, $\sigma_n \tan \delta'$

Água: γ′ e u; o ábaco é lido com $k_{h,w} = k_h\gamma_{sat}/\gamma'$ (restrita) ou γ_d/γ' (livre); no caso livre, a pressão hidrodinâmica é subtraída da resistência

Limite: se a curva do ábaco termina ($k_{h,w}$ grande, $k_v = k_h$), o módulo é interrompido

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Subba Rao, K.S. e Choudhury, D. (2005). Seismic passive earth pressures in soils. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 131(1), 131–135.

Westergaard, H.M. (1933). Water pressures on dams during earthquakes. Transactions ASCE, 98, 418–433.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram extraídos do código de cálculo do próprio módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O módulo abre com o muro do Exemplo 1 (H = 4 m, $\varphi' = \delta' = 40°$, $k_h = 0.3$).

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva as camadas, a coesão, a sobrecarga, o lençol freático e os coeficientes sísmicos do próprio muro; o módulo fornece P_{pe}, a sua direção e a altura de aplicação em conjunto.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.