Lezione di geotecnica · Spinta delle terre

Spinta passiva delle terre in condizioni sismiche

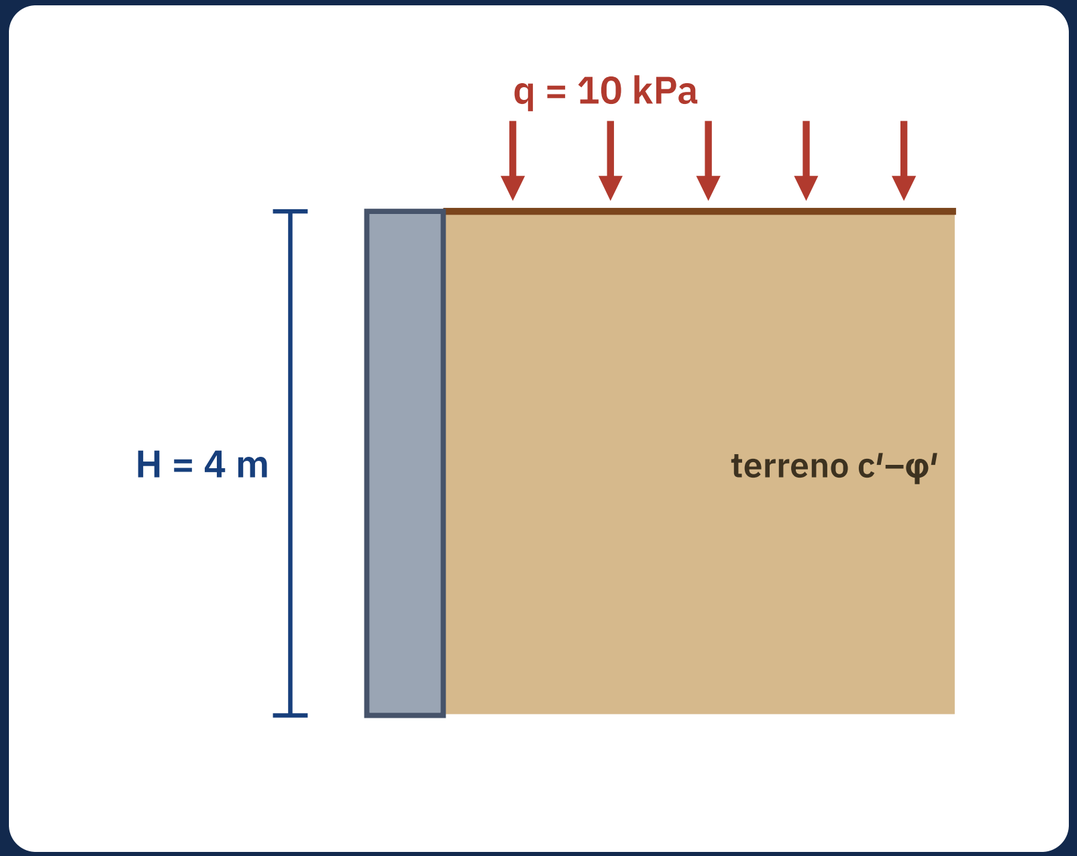
Lezione: calcolo pseudostatico della resistenza passiva del terreno a valle del muro in condizioni sismiche (Subba Rao e Choudhury 2005): coefficienti $K_{p\gamma(e)}$, $K_{pq(e)}$, $K_{pc'(e)}$, k_v, stratificazione, acqua e sovraccarico; un esempio di calcolo per ogni argomento.

$$P_{pe} = [\tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{p\gamma(e)} + qHK_{pq(e)} + 2c'HK_{pc'(e)}]/\cos\delta'$$

Subba Rao – Choudhury

k_h e k_v

Strato · acqua · sovraccarico



Introduzione

Che cosa si impara in questa lezione?

- Perché in condizioni sismiche la resistenza passiva **si riduce**: la forza d'inerzia del cuneo contribuisce ad allontanare il terreno dal muro
- Il calcolo della spinta passiva mediante **tre coefficienti**: $P_{pe} = [\frac{1}{2}\gamma H^2 K_{p\gamma(e)} + qHK_{pq(e)} + 2c'HK_{pc'(e)}]/\cos\delta'$
- Gli **abachi** dei coefficienti ($\varphi' = 10–40°$, $\delta'/\varphi' = 0.5$ e 1, $k_v = 0$ e k_h) e come si leggono i valori intermedi
- Determinare la posizione della forza (H/3 e H/2) e la sua direzione (δ' rispetto alla normale)
- l'effetto di k_v, dell'**acqua** (confinata o libera), degli strati e del sovraccarico
- Il **limite di k_h** oltre il quale terminano gli abachi e perché il modulo si arresta

SVOLGIMENTO DELLA LEZIONE

Ogni argomento è trattato in **tre passaggi**:

1 · **Teoria**: qual è la regola e perché è così?

2 · **Traccia**: dati e richiesto

3 · **Soluzione**: passo per passo, con i numeri

Le forze sono per unità di lunghezza del muro (kN/m); muro verticale, superficie orizzontale; k_v positivo verso l'alto, $0 \le k_v \le k_h$.

Subba Rao e Choudhury (2005)

TEORIA

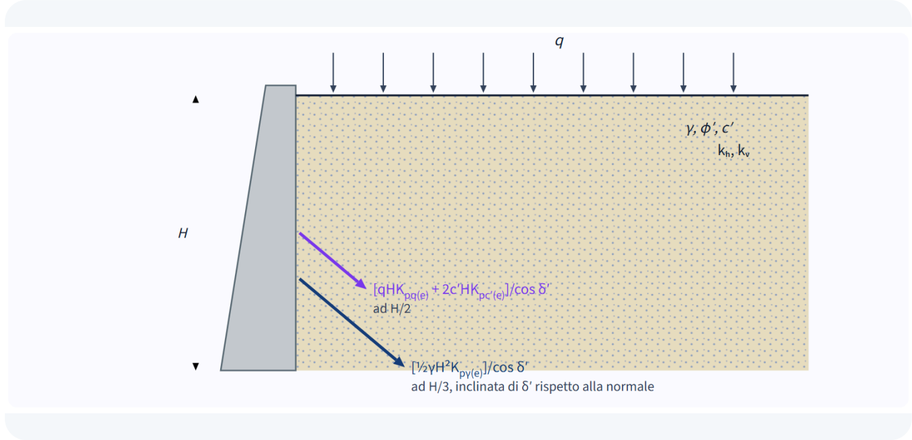
In condizioni sismiche l'inerzia del cuneo antistante il muro contribuisce ad allontanare il terreno dal muro; **la resistenza passiva diminuisce**. Subba Rao e Choudhury hanno esteso l'equilibrio limite della spinta passiva a superficie curva (spirale + tratto rettilineo) con le forze $k_h W$ e $k_v W$ (muro verticale, terrapieno orizzontale c′–φ′, sovraccarico q, attrito terra-muro δ′, adesione c'_a):

$$P_{pe} = \left[\tfrac{1}{2}\gamma H^2 K_{p\gamma(e)} + qHK_{pq(e)} + 2c'HK_{pc'(e)}\right]\frac{1}{\cos\delta'}$$

I tre coefficienti sono componenti **perpendicolari** al muro; pertanto si dividono per cos δ′. La parte γ agisce a H/3, la parte q e c′ a H/2:

$$\bar{z} = \frac{P_\gamma\,(H/3) + (P_q + P_{c'})\,(H/2)}{P_{pe}}$$

> La forza è inclinata di δ′ **verso il basso** rispetto alla normale al paramento.



Abachi e lettura dei valori intermedi

TEORIA

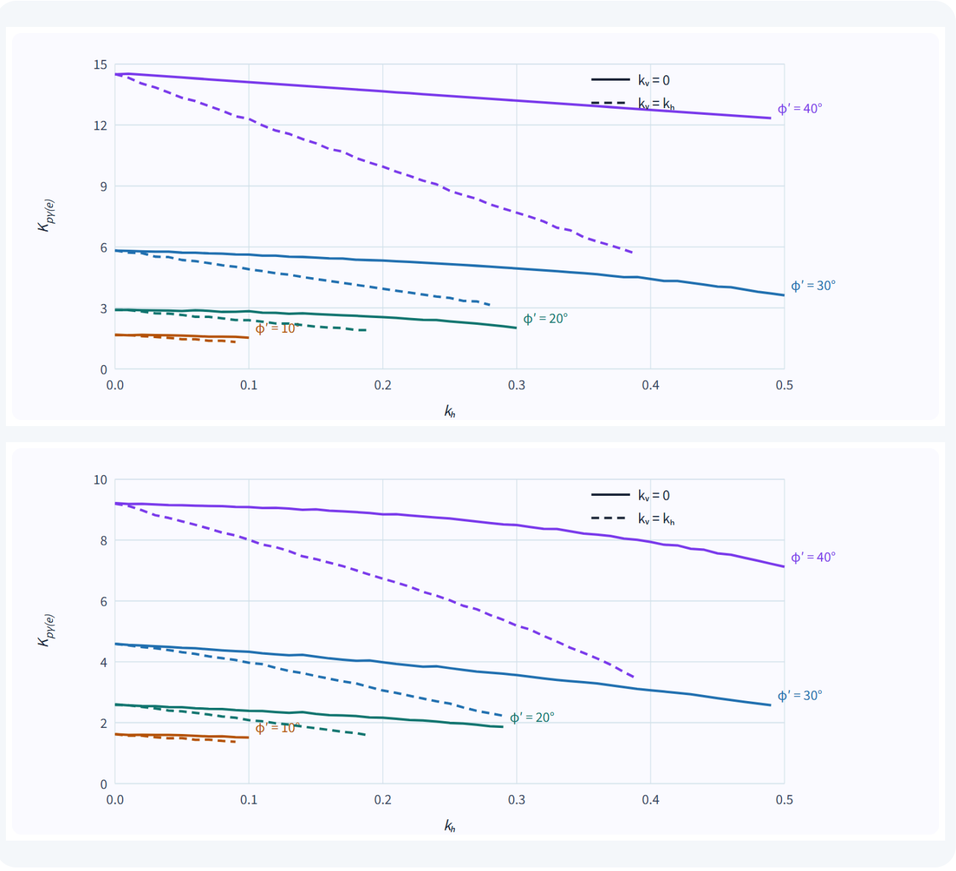
$K_{p\gamma(e)}$ e $K_{pq(e)}$ sono forniti come **abachi di progetto** per $\varphi' = 10°, 20°, 30°, 40°$; $\delta'/\varphi' = 0.5$ e 1; $k_v = 0$ e $k_v = k_h$ (gli abachi del modulo sono tabulati con passo $\Delta k_h = 0.01$). Valori intermedi: lineari in k_h e δ'/φ', **log-lineari** in φ'; non si estrapola al di fuori dell'intervallo (φ' 10–40°, δ' $\varphi'/2$ – φ').

Al crescere di k_h i coefficienti diminuiscono; con **$k_v = k_h$ molto più rapidamente**. Ogni curva termina al k_h in cui si esaurisce la resistenza passiva; il modulo si arresta in quel punto.

Per $k_h = 0$ gli abachi restituiscono il coefficiente di spinta passiva statico: per $\varphi' = \delta' = 40°$, $K_{p\gamma(e)} = 14.49$; nel modulo a spirale logaritmica $K_p \cos \delta' = 14.45$.

$0 \le k_v \le k_h$ (verso l'alto, sfavorevole per la spinta passiva): interpolazione lineare tra le curve $k_v = 0$ e $k_v = k_h$; verificata con il coefficiente di Coulomb, errore < 0.4% (nell'intervallo inferiore).

$K_{pc'(e)}$ nella tabella: per $\varphi' = 40°$, $\delta'/\varphi' = 1$, 5.95 con $c'_a = 0$ e 5.97 con adesione.



Traccia

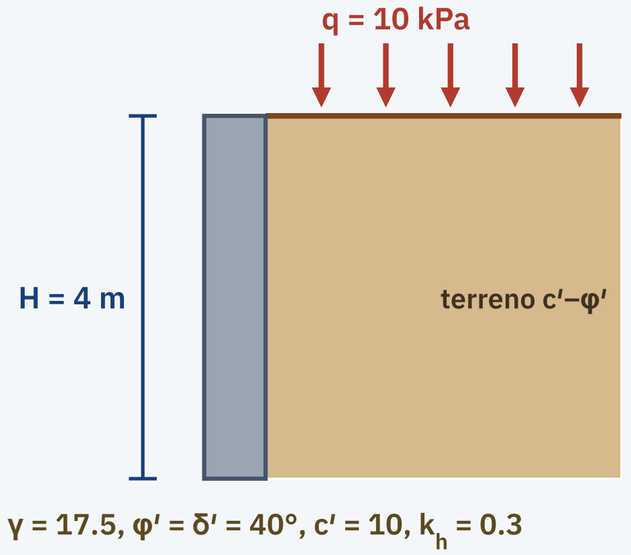
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 4$ **m, verticale; superficie orizzontale;** $q = 10$ **kPa**
Terreno	$\gamma = 17.5\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 40°,\ c' = 10$ **kPa;** $\delta' = 40°, c'_a = 0$
Sisma	$k_h = 0.3, k_v = 0$

RICHIESTO

Coefficienti dell'abaco, $\mathbf{P_{pe}}$, la sua direzione e $\bar{\mathbf{z}}$. Il modulo si apre con questo muro.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Coefficienti ($\delta'/\varphi' = 1$, $k_h = 0.3$, $k_v = 0$; il modulo legge dagli abachi)

$$K_{p\gamma(e)} = \mathbf{13.20} \qquad K_{pq(e)} = \mathbf{11.00} \qquad K_{pc'(e)} = \mathbf{5.95}$$

$$(\text{statico, } k_h = 0: \;\; K_{p\gamma} = 14.49, \;\; K_{pq} = 11.11)$$

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

2 Componenti normali e risultante

$$P_\gamma = \tfrac{1}{2}(17.5)(4)^2(13.20) = 1{,}848 \text{ kN/m}$$

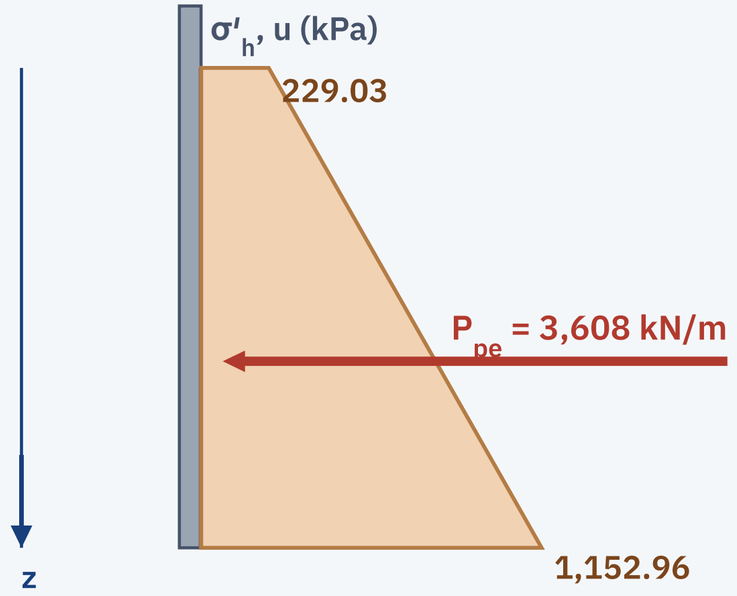
$$P_q = 10(4)(11.00) = 440 \qquad P_{c'} = 2(10)(4)(5.95) = 476$$

$$P_{pe} = \frac{1{,}848 + 440 + 476}{\cos 40^\circ} = \frac{2{,}764}{0.766} = \mathbf{3{,}608} \text{ kN/m}$$

3 Posizione e componenti

$$\bar{z} = \frac{2{,}412.2(4/3) + 1{,}195.9(2)}{3{,}608} = \mathbf{1.554} \text{ m}$$

$$P_h = P_{pe}\cos 40^\circ = 2{,}764 \qquad P_v = P_{pe}\sin 40^\circ = 2{,}319 \text{ kN/m}$$



$P_{pe} \approx$ **3,608 kN/m**, inclinata di 40° verso il basso rispetto alla normale, a **1.554 m** sopra la base; il contributo del peso del terreno è 2,412, quello di q e c′ è 1,196 kN/m (divisi per la normale).

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

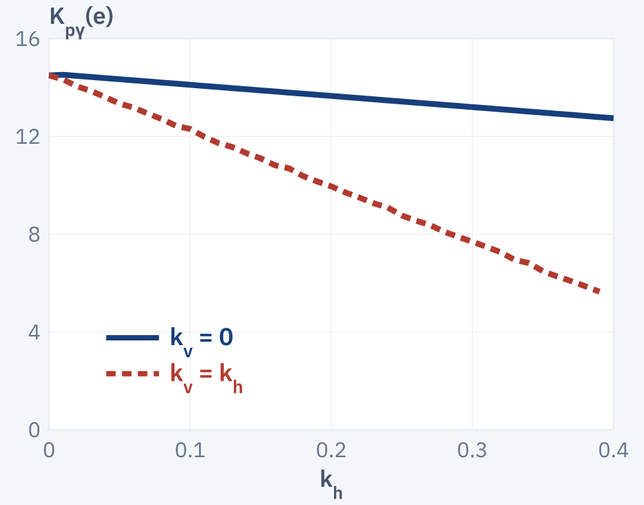
ESEMPIO

Dati

Terreno	$\varphi' = \delta' = 40°$ **($\delta'/\varphi' = 1$); sabbia asciutta, incoerente**
Variabile	$k_h = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.35$ **e** $k_v = 0$ **oppure** $k_v = k_h$

RICHIESTO

Valori di $K_{p\gamma(e)}$; rapporti di riduzione per $k_h = 0.3$.



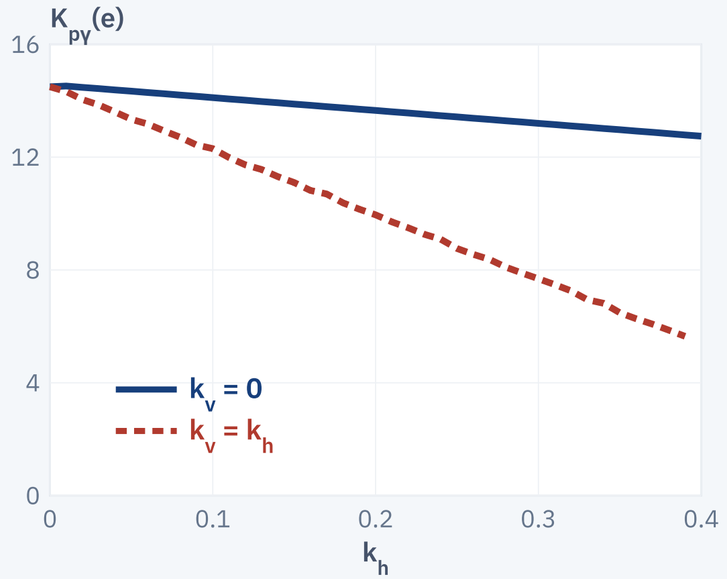
Soluzione

SOLUZIONE

1 Letture degli abachi ($\delta'/\varphi' = 1$)

k_h	$K_{p\gamma(e)}$ ($k_v = 0$)	$K_{p\gamma(e)}$ ($k_v = k_h$)
0.00	14.49	14.49
0.10	14.11	12.30
0.20	13.65	9.95
0.30	13.20	7.69
0.35	12.97	6.48

Da $k_h = 0$ a 0.3, $K_{p\gamma(e)}$ 14.49 → 13.20 (riduzione del 9%, $k_v = 0$); con $k_v = k_h$ scende a 7.69 (47%). In condizioni statiche 14.49 è coerente con $K_p \cos \delta' = 14.45$ del modulo a spirale logaritmica.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

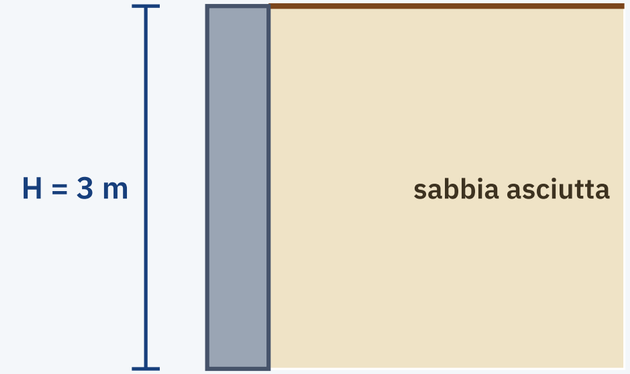
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 3$ **m, verticale; superficie orizzontale; nessun sovraccarico**
Terreno	**sabbia asciutta:** $\gamma = 16\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30°$**;** $\delta' = 15°$ **(**$\delta'/\varphi' = 0.5$**)**
Sisma	$k_h = 0.2$**,** $k_v = 0$

RICHIESTO

P_{pe}, $\bar{z}$, componenti; confronto con la forza passiva statica.



γ = 16 kN/m³, φ′ = 30°, δ′ = 15°, k_h = 0.2

Soluzione

SOLUZIONE

1 Coefficienti (δ′/φ′ = 0.5)

$$k_h = 0: \; K_{p\gamma} = 4.592 \qquad k_h = 0.2: \; K_{p\gamma(e)} = \mathbf{3.987}$$

2 Forza (c′ = q = 0)

$$P_{pe} = \frac{\frac{1}{2}(16)(3)^2(3.987)}{\cos 15^\circ} = \frac{287.1}{0.9659} = \mathbf{297.2}\ \mathrm{kN/m}$$

$$\text{statico: } P_p = 342.3\ \mathrm{kN/m}\ (K_p = 4.592)$$

3 Posizione e componenti

$$\bar{z} = \frac{H}{3} = \mathbf{1.00}\ \mathrm{m} \qquad P_h = P_{pe}\cos 15^\circ = 287.1 \qquad P_v = P_{pe}\sin 15^\circ = 76.9\ \mathrm{kN/m}$$

P_{pe} = **297.2 kN/m**; il valore statico era 342.3 kN/m: con k_h = 0.2 la resistenza si **riduce** del 13%.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

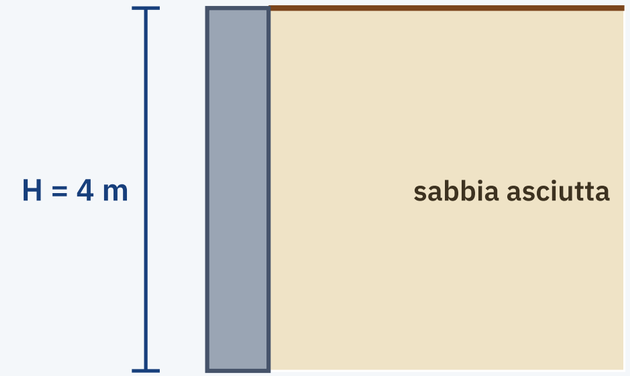
ESEMPIO

RICHIESTO

Per ciascun k_v, $\mathbf{K_{p\gamma(e)}}$ e $\mathbf{P_{pe}}$; come si determina il valore intermedio?

Dati

Muro e terreno	$H = 4$ **m; sabbia asciutta:** $\gamma = 17.5\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = \delta' = 40^\circ$
Sisma	$k_h = 0.3$**;** $k_v = 0,\ 0.15\ (= 0.5k_h),\ 0.30\ (= k_h)$



γ = 17.5, φ′ = δ′ = 40°, k_h = 0.3

Soluzione

SOLUZIONE

1 Interpolazione: $K(k_v) = K(0) + [K(k_h) - K(0)]\cdot k_v/k_h$; $P_{pe} = ½(17.5)(16)K_{pγ(e)}/\cos 40° = 182.7\ K_{pγ(e)}$

k_v	k_v/k_h	$K_{pγ(e)}$	$K_{pq(e)}$	P_{pe} (kN/m)
0.00	0.0	13.20	11.00	2,412
0.15	0.5	10.44	9.29	1,909
0.30	1.0	7.69	7.58	1,405

Per $k_v = 0.5k_h$ la forza passa da 2,412 a 1,909 kN/m (21%), per $k_v = k_h$ vale 1,405 kN/m (42%). Poiché l'accelerazione verticale diretta verso l'alto riduce il peso, risulta **sfavorevole per la spinta passiva**; $k_v = 0.5k_h$ è una scelta comune.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Estensione degli strati del modulo

TEORIA

Gli abachi sono riferiti a un terreno unico, a un muro verticale e a una superficie orizzontale; la geometria resta tale. Il modulo suddivide il terreno in **strati a limiti orizzontali**; ogni strato assume il proprio coefficiente, con il peso degli strati sovrastanti (e q) che agisce come sovraccarico tramite $K_{pq(e)}$, il peso proprio tramite $K_{p\gamma(e)}$ e la coesione tramite $K_{pc'(e)}$:

$$\sigma_n = K_{pq(e)}\sigma'_{v,top} + K_{p\gamma(e)}\left(\sigma'_v - \sigma'_{v,top}\right) + 2c' K_{pc'(e)} \qquad \text{lungo il paramento: } \sigma_n \tan\delta'$$

Sotto il livello dell'acqua $\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$, u è perpendicolare al muro. In condizioni sismiche l'acqua interstiziale si muove insieme al terreno (**vincolata**) oppure no (**libera**); gli abachi si leggono a un k_h maggiore:

$$k_{h,w} = \frac{\gamma_{sat}}{\gamma_{sat} - \gamma_w} k_h \ \text{(vincolata)} \qquad k_{h,w} = \frac{\gamma_d}{\gamma_{sat} - \gamma_w} k_h \ \text{(libera)}$$

In acqua libera, la pressione idrodinamica di Westergaard $(7/8)k_h\gamma_w\sqrt{(d_w z')}$ **si sottrae dalla resistenza** (fase sfavorevole per la spinta passiva). In condizioni immerse k_v si legge con il rapporto $k_v/k_{h,w}$.

Questo formato a strati è l'estensione ingegneristica del modulo; il modulo si arresta dove termina la curva dell'abaco.

STRUTTURA

Strato: K_{pq} (sovraccarico sovrastante) + $K_{p\gamma}$ (peso proprio) + $K_{pc'}$ (coesione); acqua: γ' e u; sisma: $k_{h,w}$.

Traccia

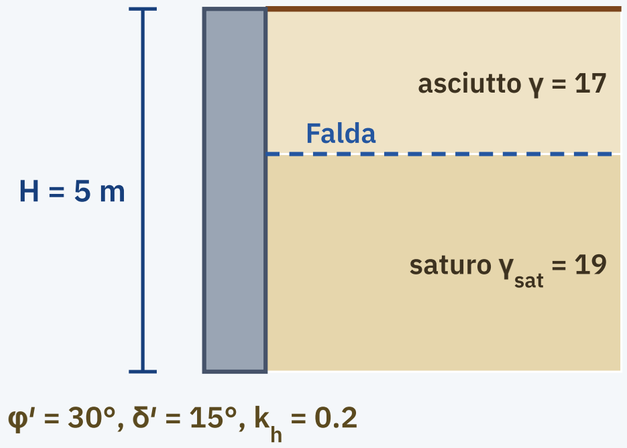
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 5$ **m, verticale; superficie orizzontale; nessun sovraccarico**
Terreno	$\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3}$ **(secco),** $\gamma_{sat} = 19$**,** $\gamma_d = 17\ \mathrm{kN/m^3}$**;** $\varphi' = 30°,\ \delta' = 15°$
Sisma e acqua	$k_h = 0.2$**,** $k_v = 0$**; falda freatica a 2 m (d_w = 3 m)**

RICHIESTO

P_{pe} e **$\bar{z}$** nei due casi di acqua impedita e libera; confronto con i valori in assenza d'acqua e statici.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 k_h letto sotto la falda

$$\text{vincolata: } k_{h,w} = \frac{19}{19 - 9.81}(0.2) = \mathbf{0.413} \qquad \text{libera: } k_{h,w} = \frac{17}{19 - 9.81}(0.2) = \mathbf{0.370}$$

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

2 Coefficienti e forze ($\sigma_n = K_{p\gamma(e)}\sigma'_v$, nessun carico alla sommità dello strato; sotto falda $u = 9.81(z - 2)$; $P_{wd} = (7/12)(0.2)(9.81)(3)^2 = 10.30$ kN/m è sottratto alla resistenza)

	k_h letto	$K_{p\gamma(e)}$	Terreno N_s	Acqua	Idrodinamico	P (kN/m)	$\bar{z}$ (m)
Al di sopra dell'acqua (0–2 m)	0.200	3.987					
Acqua in pressione confinata	0.413	3.008	566.8	44.1	–	629.5	1.84
Non confinato sotto falda	0.370	3.230	598.6	44.1	10.3	652.5	1.83

Con acqua confinata P = **629.5 kN/m**, con acqua libera **652.5 kN/m**; in terreno privo di falda 877.1, con condizione statica ($k_h = 0$) e acqua 885.9 kN/m. Poiché il $k_{h,w}$ letto in acqua è elevato, $K_{p\gamma(e)}$ scende da 3.99 a 3.01 e la resistenza **diminuisce**.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

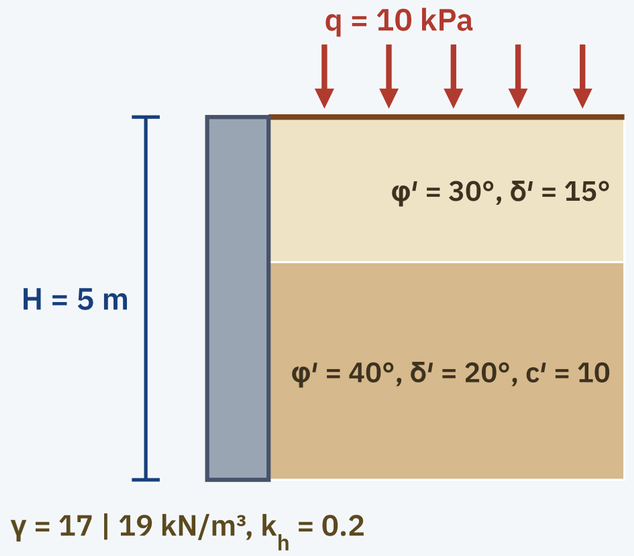
ESEMPIO

Dati

Muro	$H = 5$ **m, verticale; superficie orizzontale;** $q = 10$ **kPa; assenza di acqua**
Strato 1 (0–2 m)	$\gamma = 17\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 30°,\ \delta' = 15°,\ c' = 0$
Strato 2 (2–5 m)	$\gamma = 19\ \mathrm{kN/m^3},\ \varphi' = 40°,\ \delta' = 20°,\ c' = 10$ **kPa**
Sisma	$k_h = 0.2$**,** $k_v = 0$

RICHIESTO

Salto di pressione al confine, forze sugli strati, **P**, β e **z̄**.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Coefficienti ($k_h = 0.2$)

$$\text{strato 1: } K_{p\gamma} = 3.987,\ K_{pq} = 4.096$$

$$\text{strato 2: } K_{p\gamma} = 8.844,\ K_{pq} = 8.449,\ K_{pc'} = 4.33$$

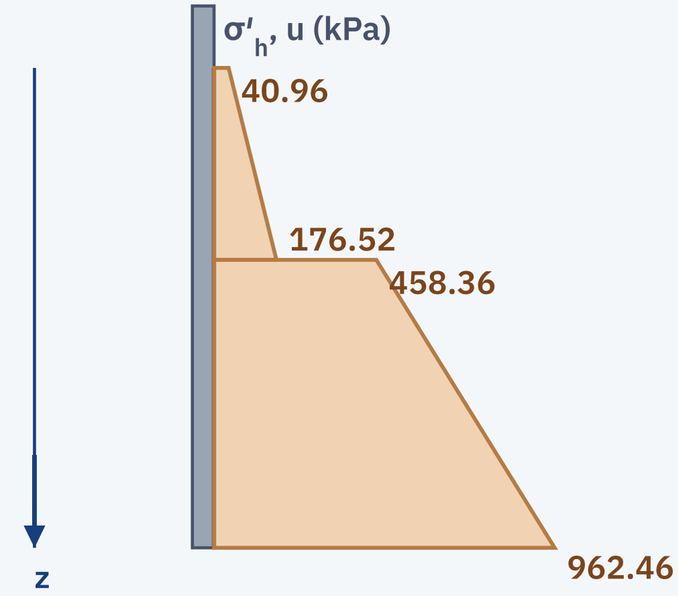
2 Tensione normale σ_n ($\sigma'_v = 10; 44; 101$ kPa: sommità, limite, base)

$$\sigma_n(0) = K_{pq} q = 4.096(10) = 40.96$$

$$\sigma_n(2^-) = 40.96 + 3.987(34) = 176.52$$

$$\sigma_n(2^+) = 8.449(44) + 2(10)(4.33) = \mathbf{458.36}$$

$$\sigma_n(5) = 458.36 + 8.844(57) = \mathbf{962.46}\ \text{kPa}$$



Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

3 Componenti normale e lungo il paramento (con δ′ dello strato; bracci dalla base)

$$N_1 = 217.5 \ (\text{braccio } 3.79 \text{ m})$$

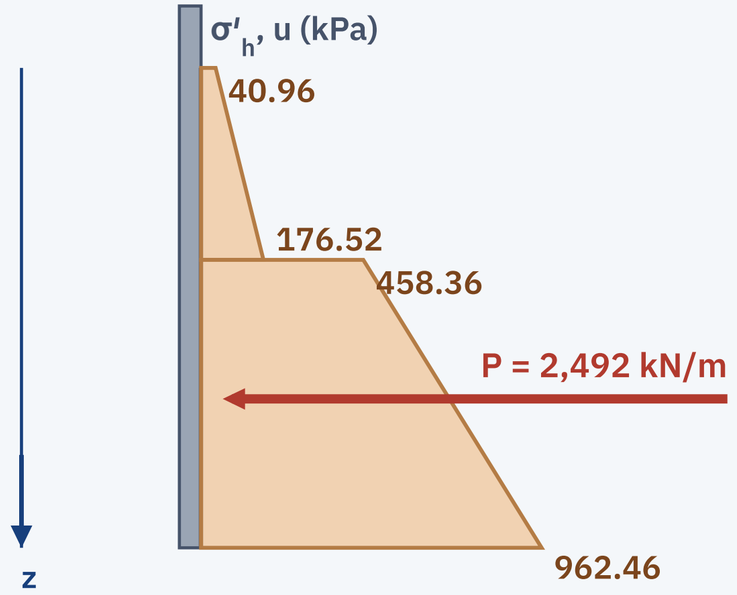
$$N_2 = 2{,}131.2 \ (\text{braccio } 1.32 \text{ m})$$

$$N = 2{,}348.7 \qquad T = 834.0 \text{ kN/m}$$

4 Risultante e posizione

$$P = \sqrt{N^2 + T^2} = \mathbf{2{,}492.4} \text{ kN/m} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{T}{N} = 19.55°$$

$$\bar{z} = \frac{217.5(3.79) + 2{,}131.2(1.32)}{2{,}348.7} = \mathbf{1.55} \text{ m}$$



P = **2,492 kN/m**, β = 19.5° (δ′ compreso tra 15° e 20°), a 1.55 m sopra la base. Al confine σ_n **salta** da 176.5 a 458.4 kPa (φ′, δ′ e c′ cambiano).

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Dove si colloca il modulo?

TEORIA

Ogni curva dell'abaco termina al valore di k_h in cui la resistenza passiva si esaurisce; il modulo si arresta lì (non estrapola). Il limite dipende da φ', δ'/φ' e k_v:

φ'	$k_v = 0$, $\delta'/\varphi' = 0.5$	$k_v = 0$, $\delta'/\varphi' = 1$	$k_v = k_h$, $\delta'/\varphi' = 0.5$	$k_v = k_h$, $\delta'/\varphi' = 1$
10°	0.108	0.098	0.085	0.079
20°	0.292	0.279	0.185	0.198
30°	0.494	0.463	0.288	0.282
40°	0.500	0.463	0.393	0.397

Le curve $k_v = k_h$ terminano molto prima ($\varphi' = 30°$, $\delta' = \varphi'/2$: 0.29).

Misurato in condizioni di falda, $k_{h,w} = k_h \gamma_{sat}/\gamma' \approx 2k_h$ supera facilmente questo limite.

Traccia

ESEMPIO

Dati

Terreno	$\varphi' = 30°$, $\delta' = 15°$; $\gamma_{sat} = 19\ \mathrm{kN/m^3}$; **falda freatica alla sommità del muro (z_w = 0)**
Sisma	$k_h = 0.3$, $k_v = 0$; **pressione interstiziale limitata**

RICHIESTO

$k_{h,w}$ da leggere in condizioni immerse; limite dell'abaco; che cosa fa il modulo?

Soluzione

SOLUZIONE

1 k_h letto e limite dell'abaco

$$k_{h,w} = \frac{19}{19 - 9.81}(0.3) = \mathbf{0.620}$$

$$k_{h,lim}(30^\circ,\ \delta'/\varphi' = 0.5,\ k_v = 0) = 0.494$$

$k_{h,w}$ = 0.620 > 0.494: l'abaco non esiste per questo valore (regione in cui la resistenza passiva è esaurita), **il modulo interrompe il calcolo**. Soluzione: abbassare il livello della falda freatica oppure ridurre k_h; per k_h = 0.2, $k_{h,w}$ = 0.41 rientra nel limite (Esempio 5).

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Ambito della soluzione

TEORIA

Pseudostatico: k_h, k_v costanti; nessuna dipendenza dal tempo e nessuno spostamento permanente.

Geometria: muro verticale, superficie orizzontale; abachi per $\varphi' = 10–40°$, $\delta'/\varphi' = 0.5–1$; k_v solo verso l'alto (sfavorevole per la passiva), $0 \le k_v \le k_h$.

Coesione: tabella $K_{pc'(e)}$; l'adesione è nulla oppure $c'_a/c' = \tan\delta'/\tan\varphi'$.

Strato, acqua e sovraccarico è l'estensione ingegneristica del modulo (in letteratura non esiste una soluzione in forma chiusa); l'acqua può essere impedita o libera e, nel caso libera, la resistenza di Westergaard viene rimossa.

Passivo statico: spirale logaritmica e Coulomb; **sisma in condizioni attive**: moduli di Mononobe–Okabe.

Sintesi

Punti chiave

$P_{pe} = [½\gamma H^2 K_{p\gamma(e)} + qHK_{pq(e)} + 2c'HK_{pc'(e)}] / \cos \delta'$; la parte γ a H/3, le parti q e c′ a H/2; δ′ verso il basso rispetto alla normale al paramento

I **coefficienti** si leggono dagli abachi (φ′ 10–40°, δ′/φ′ 0.5–1, $k_v = 0$ e k_h): k_h è lineare in δ′/φ′ e log-lineare in φ′; i coefficienti diminuiscono all'aumentare di k_h

k_v (verso l'alto) è sfavorevole per la spinta passiva: con $k_v = k_h$, φ′ = δ′ = 40°, per $k_h = 0.3$, $K_{p\gamma(e)}$ 13.2 → 7.7

Negli strati $\sigma_n = K_{pq}\sigma'_{v,sup} + K_{p\gamma}(\sigma'_v - \sigma'_{v,sup}) + 2c'K_{pc'}$; salto al confine; lungo il paramento $\sigma_n \tan \delta'$

Acqua: γ′ e u; l'abaco si legge con $k_{h,w} = k_h \gamma_{sat}/\gamma'$ (condizione impedita) oppure γ_d/γ' (condizione libera); nel caso libero la pressione idrodinamica si sottrae alla resistenza

Limite: se la curva dell'abaco termina ($k_{h,w}$ elevato, $k_v = k_h$) il modulo si arresta

Bibliografia

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Subba Rao, K.S. and Choudhury, D. (2005). Seismic passive earth pressures in soils. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 131(1), 131–135.

Westergaard, H.M. (1933). Water pressures on dams during earthquakes. Transactions ASCE, 98, 418–433.

NOTA

Tutti gli esempi numerici sono tratti dal codice di calcolo del modulo stesso; il modulo restituisce gli stessi valori. Il modulo si apre con il muro dell'Esempio 1 ($H = 4$ m, $\varphi' = \delta' = 40°$, $k_h = 0.3$).

GeoTerva

Calcoli geotecnici online

Dalla teoria alla pratica

Inserire in GeoTerva gli strati, la coesione, il sovraccarico, la falda freatica e i coefficienti sismici del proprio muro; il modulo restituisce insieme P_{pe}, la sua direzione e la sua altezza di applicazione.

Aprire il modulo → | **Pagina di teoria →**

Aprire dallo smartphone
I moduli di prova non richiedono registrazione.

Se si desidera utilizzarli nelle proprie lezioni: info@geoterva.com