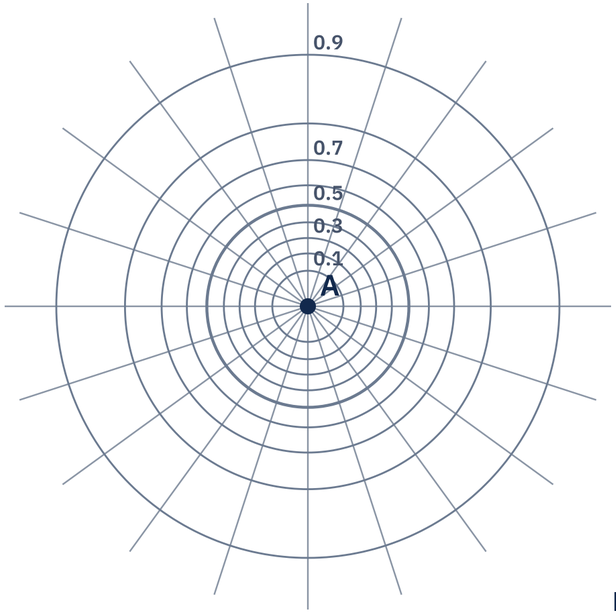
岩土工程讲义 · 土体中的应力

Newmark影响图

讲义：Newmark影响图；将荷载面积的平面图置于图上，数出被覆盖的单元数，得到$\Delta\sigma_z$ = (IV) q M。

- 等应力增量圆环
- 影响值IV = 0.005
- 单元计数
- 任意平面图形
- 可手算求解



引言

本讲内容

该图的构造方法：由圆形荷载解得到半径为$R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}$的圆

10个圆环 × 20个扇区 = 200个单元：每个单元的影响相同，**IV = 1/N = 0.005**

使用方法：平面图按**AB = z**的比例绘制，A点置于影响图中心，数得单元数**M**；$\Delta\sigma_z = (IV)\ q\ M$

用**矩形角点解**手算验证逐环计数结果；深度、L形平面以及面积范围以外的点

每个深度均须**单独绘制平面图**

讲授流程

每个主题按**三个步骤**讲解：

1 · **理论**：公式及其依据

2 · **题目**：已知条件与所求

3 · **解答**：逐步计算，代入数值

算例：3 m × 3 m柱下基础，660 kN (q = 73.33 kN/m²)；A点位于基础下方3 m处，在一条边中点的正下方。

等附加应力圆

理论

均布荷载圆形面积中心下方$\Delta\sigma_z/q = 1 - 1/[(R/z)^2 + 1]^{3/2}$。将该关系式反解，可得产生选定应力比的圆形面积**半径**（等式两边均无量纲）

对于$\Delta\sigma_z/q$ = 0.1、0.2 … 0.9，以相应半径所作的圆将平面划分为若干**圆环**。每个圆环单独加载时，在圆心下方深度z处产生**0.1 q**的附加应力；最后一个圆环（0.9与1.0之间）延伸至无穷远

$$\frac{R}{z} = \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q}\right)^{-2/3} - 1}$$

$\Delta\sigma_z/q$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
R/z	0.0000	0.1865	0.2698	0.3383	0.4005	0.4598	0.5181	0.5768	0.6370	0.6998
$\Delta\sigma_z/q$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
R/z	0.7664	0.8384	0.9176	1.0067	1.1097	1.2328	1.3871	1.5944	1.9083	2.5235

200个单元，影响值0.005

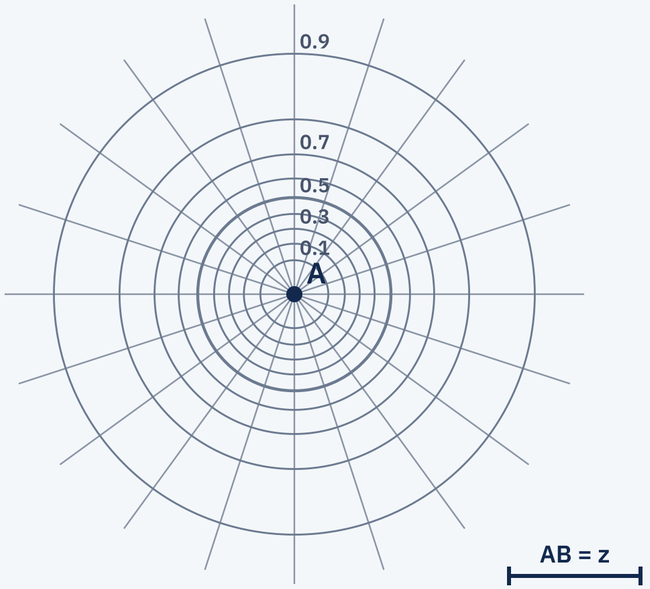
理论

Newmark (1942)将各圆环用等间距的**径向直线**划分为单元。由于对称性，同一圆环内每个单元的影响相同

若单元总数为**N**，则每个受荷单元对其中心下方应力的贡献为q的**IV = 1/N**倍：即**影响值**。对于10个圆环和20个扇形，N = 200，IV = 0.005

由于每个单元的影响与其在图中的位置无关，任意形状的受荷面积均可通过**数单元个数**来度量

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = 0.005$$



$\Delta\sigma_z = (IV)\ q\ M$

理论

1. 选定荷载面积下方所需求应力的**深度z**

2. 按比例尺绘制荷载作用面积的平面图，使深度z等于图中**单位长度AB**

3.将平面图置于影响图上，使所求应力的点与图的**中心**重合

4.确定平面范围内的单元数M；部分位于范围内的单元通过估算计入

每个深度都需要**单独绘制平面图**

$$\Delta\sigma_z = (IV)\, q\, M$$

所覆盖的单元数M

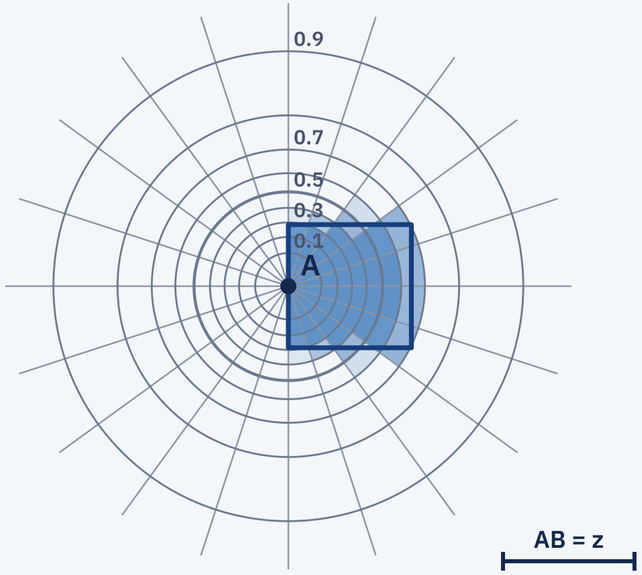
理论

模块按输入的深度绘图：所覆盖的单元按其**位于平面范围内的部分**绘制阴影

计数时采用**精确值**：与圆形情形相同，将Boussinesq解在以该点为极点的极坐标下**对多边形积分**，得到**M = (Δσ$_z$/q)/IV**。该值即为完全准确的计数所应给出的值

平面形状可以是顶点不超过六个的任意多边形

$$M = \frac{\Delta\sigma_z / q}{IV}$$



题目

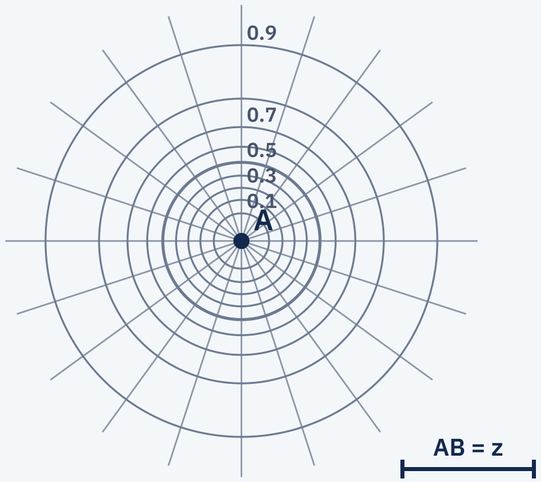
算例

求

各圆的**R/z**之比；单元数**N**、影响值**IV**；每个圆所覆盖的单元数。

已知条件

应力比	$\Delta\sigma_z/q = 0.1;\ 0.2 \ldots 0.9$ **（九个圆；第十个圆环延伸至无穷远）**
扇形区	**20个相等的径向分块**



解答 (1/2)

解答

1 $\Delta\sigma_z/q = 0.3$时

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.3)^{-2/3}-1} = \sqrt{1.2684-1} = \sqrt{0.2684} = \mathbf{0.5181}$$

2 $\Delta\sigma_z/q = 0.9$时

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.9)^{-2/3}-1} = \sqrt{4.6416-1} = \sqrt{3.6416} = \mathbf{1.9083}$$

第三个圆的半径为z的**0.5181**倍，第九个圆的半径为**1.9083**倍；半径随应力比增大而迅速增大，当比值趋于1时趋于无穷大。

解答 (2/2)

解答

1 N = 10个环 × 20个扇区 = 200个单元

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = \mathbf{0.005} \qquad k.\text{圆：}\ 20\,k\ \text{构件} \Rightarrow IV\,(20\,k) = 0.1\,k = \frac{\Delta\sigma_z}{q}$$

圆	$\Delta\sigma_z/q$	R/z	其覆盖的单元	总影响 = IV × 单元
1	0.1	0.2698	20 (= 20 × 1)	0.10
2	0.2	0.4005	40 (= 20 × 2)	0.20
3	0.3	0.5181	60 (= 20 × 3)	0.30
4	0.4	0.6370	80 (= 20 × 4)	0.40
5	0.5	0.7664	100 (= 20 × 5)	0.50
6	0.6	0.9176	120 (= 20 × 6)	0.60
7	0.7	1.1097	140 (= 20 × 7)	0.70
8	0.8	1.3871	160 (= 20 × 8)	0.80
9	0.9	1.9083	180 (= 20 × 9)	0.90
第10环	1.0	∞	200	1.00

每个圆环由20个单元组成，单独产生**0.1 q**的作用：第k个圆内20 k个单元的作用，与圆形荷载解给出的$\Delta\sigma_z/q$ = 0.1 k相同。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

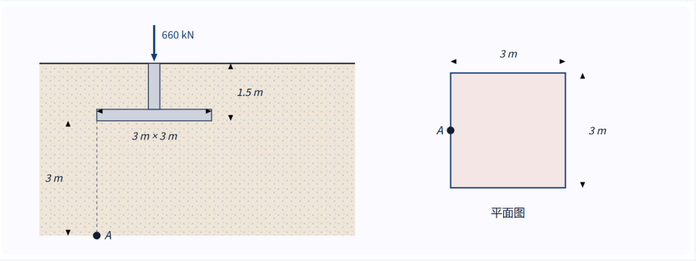
算例

已知条件

基础	3×3 m，**柱荷载**660 kN ($q = 660/(3 \times 3)$)
A点	**基础下方**$z = 3$ m，**位于某一边中点的正下方**
图示	$IV = 0.005$（**10个环，20个扇区**）

求

q、平面图比例尺、M、$\Delta\sigma_z$；用矩形解对M进行验算。



解答 (1/3)

解答

1 基底压力

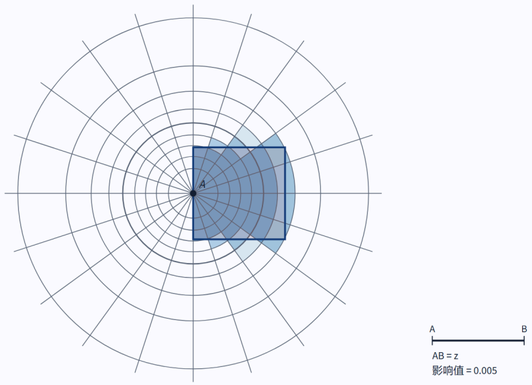
$$q = \frac{660}{3 \times 3} = \mathbf{73.33}\ \text{kN/m}^2$$

2 平面图比例：AB = z = 3 m

$$\text{基础边缘} = \frac{3\ \text{m}}{AB} = \frac{3}{3} = 1\ AB$$

3 布置：将A点置于图的中心，使基础左边缘通过该中心

基础画成边长为**AB**的正方形，其左边中点(A)置于图的中心（右图）。



解答 (2/3)

解答

4 A点位于边的中点：基础分为在A点处具有角点的两个矩形(1.5 m × 3 m)

$$m = \frac{1.5}{3} = 0.5\,, \quad n = \frac{3}{3} = 1\,, \quad m^2 = 0.25\,, \quad n^2 = 1\,, \quad \sqrt{m^2+n^2+1} = 1.50$$

5 Boussinesq矩形角点解I_3(0.5; 1)

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1} + \tan^{-1}\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+1-m^2n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1.5}{2.5}\cdot\frac{3.25}{2.25} + \tan^{-1}\frac{1.5}{2.0}\right] = \frac{0.8667 + 0.6435}{4\pi} = \mathbf{0.12018}$$

以A点为角点的1.5 m × 3 m矩形的影响系数为**I_3 = 0.12018**；两个矩形对称分布于A点两侧，故总影响系数为2 I_3。

解答 (3/3)

解答

6 单元数

$$M = \frac{\Delta\sigma_z/q}{IV} = \frac{2\,I_3}{IV} = \frac{2\,(0.12018)}{0.005} = \mathbf{48.07}$$

7 附加应力

$$\Delta\sigma_z = (IV)\,q\,M = (0.005)\left(\frac{660}{3\times 3}\right)(48.07) = 0.005 \times \mathbf{73.33} \times 48.07 = \mathbf{17.63}\ \text{kN/m}^2$$

8 直接采用Boussinesq矩形解

$$\Delta\sigma_z = 2\,q\,I_3 = 2\,(73.33)(0.12018) = \mathbf{17.63}\ \text{kN/m}^2$$

在A点处，影响图上基础平面覆盖**M = 48.07个单元**（占200个单元的24.0%）：**$\Delta\sigma_z$ = 17.63 kN/m²**（为q的24.0%）；模块给出相同的数值。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

平面	**算例2：3×3 m基础，A点为左边缘中点，$z = 3$ m ($AB = 3$ m)**
题目	**每个环内所含单元数；总数M；单个单元对应力的贡献**

求

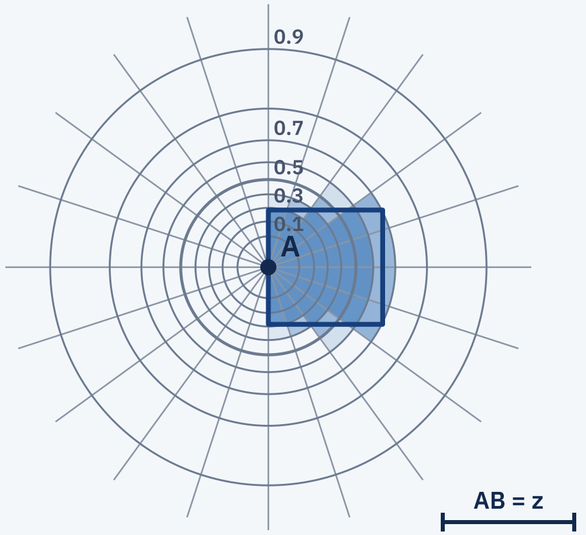
每个圆环**所覆盖的单元数**（总共20个单元）及总和；计数时**一个单元**的误差所产生的影响。

解答

解答

圆环	R/z范围	被覆盖单元	环内单元
1	0.000 – 0.270	**10.00**	20
2	0.270 – 0.400	**10.00**	20
3	0.400 – 0.518	**9.82**	20
4	0.518 – 0.637	**6.78**	20
5	0.637 – 0.766	**5.09**	20
6	0.766 – 0.918	**4.08**	20
7	0.918 – 1.110	**2.29**	20
8	1.110 – 1.387	**0.00**	20
9	1.387 – 1.908	**0.00**	20
10	1.908 – ∞	**0.00**	20
合计		**48.07**	200

前两环为半圆（**10 + 10**）：A点位于边上。合计**M = 48.07**。每个单元相当于IV q = 0.37 kN/m²：计数相差1个单元，$\Delta\sigma_z$变化0.37 kN/m²（2.1%）。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

算例

已知条件

基础与计算点	**算例2中的基础与A点($q = 73.33$ kN/m²)**
深度	$z = 1.2;\ 2.4;\ 3.6 \ldots 12$ m **（模块的地层剖面表）**

求

各深度处的平面比例尺、M和$\Delta\sigma_z$；z = 6 m时手算。

解答 (1/2)

解答

z (m)	基础边长（AB单位）	M（构件）	$\Delta\sigma_z$ = IV q M (kN/m²)
1.2	2.500	87.03	**31.91**
2.4	1.250	59.27	**21.73**
3.6	0.833	39.16	**14.36**
4.8	0.625	26.72	**9.80**
6.0	0.500	19.01	**6.97**
7.2	0.417	14.07	**5.16**
8.4	0.357	10.76	**3.95**
9.6	0.312	8.47	**3.11**
10.8	0.278	6.82	**2.50**
12.0	0.250	5.61	**2.06**

随深度增加，平面图向其中心缩小（z = 1.2 m时基础边缘为2.50 AB，z = 12 m时为0.25 AB），所覆盖的单元减少：**M = 87.03 → 5.61**。每一行的平面图均已重新绘制。

解答 (2/2)

解答

1 平面比例尺与m、n

$$AB = z = 6\ \text{m} \Rightarrow \text{基础边缘} = \frac{3}{6} = 0.5\,AB\ ; \quad m = \frac{1.5}{6} = 0.25\ , \ n = \frac{3}{6} = 0.5$$

2 单元数与应力

$$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753 \ \Rightarrow \ M = \frac{2\,(0.04753)}{0.005} = \mathbf{19.01}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 73.33 \times 19.01 = \mathbf{6.97}\ \text{kN/m}^2$$

z = 6 m时，基础相对于影响图中心而言很小，仅覆盖**19.01个单元**；$\Delta\sigma_z$ = **6.97 kN/m²**（z = 3 m时为17.63 kN/m²）。

在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

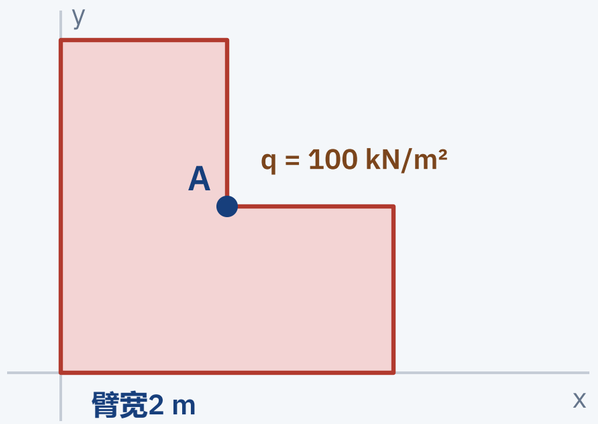
算例

已知条件

面积	**L形（6个角点）：** $(0;0),\ (4;0),\ (4;2),\ (2;2),\ (2;4),\ (0;4)$ **m；** $q = 100$ **kN/m²**
A点	**凹角下方，** $(2;\ 2)$**；** $z = 2$ **m**
提示	**A点周围的四个2 m × 2 m象限中有三个受荷**

求

M与$\Delta\sigma_z$；逐环累加。



解答 (1/2)

解答

1 平面比例尺与象限

$$AB = z = 2\ \text{m} \Rightarrow \text{臂宽} = 1\,AB\,; \quad \text{每个四分之一部分：}\ m = n = \frac{2}{2} = 1$$

2 一个象限的单元数与总数

$$I_3(1;1) = 0.17522 \ \Rightarrow\ M_{\text{象限}} = \frac{0.17522}{0.005} = 35.04$$

$$M = 3\,M_{\text{象限}} = 3\,(35.04) = \mathbf{105.13}$$

3 应力

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 100 \times 105.13 = \mathbf{52.57}\ \text{kN/m}^2 \qquad \left(= 3\,q\,I_3 = 3\,(100)(0.17522)\right)$$

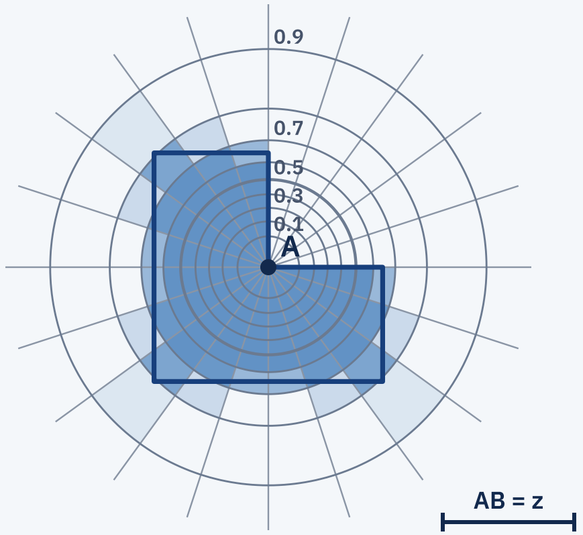
凹角下方的L形荷载覆盖**105.13个单元**：四个象限中的三个。若四个象限均受荷载，则M = 140.18。

解答 (2/2)

解答

圆环	被覆盖单元	环内单元
1	**15.00**	20
2	**15.00**	20
3	**15.00**	20
4	**15.00**	20
5	**15.00**	20
6	**15.00**	20
7	**11.94**	20
8	**3.18**	20
9	**0.01**	20
10	**0.00**	20
合计	**105.13**	200

在第1–6环中，每环的**15个单元**（20个的四分之三）被覆盖；在外环中仅有平面的角点起作用（第7环11.94个单元，第8环3.18个单元）。合计**M = 105.13**。



在GeoTerva中验算解答 ↗

题目

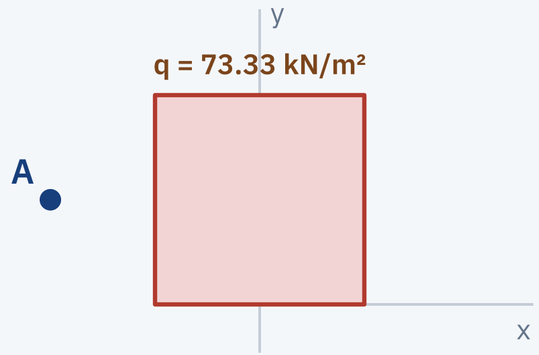
算例

已知条件

平面与荷载	**算例2中的3×3 m基础($q = 73.33$ kN/m²)**
A点	**基础外：$x = -3$ m，$y = 1.5$ m（距左边缘1.5 m）；$z = 3$ m**

求

M与$\Delta\sigma_z$；外部点处计数的含义。



解答 (1/2)

解答

1 自A点至基础的距离(z = 3 m)

$$x：\ 1.5\ \text{按m}\ 4.5\ \text{m}\ ;\quad y：\ \pm 1.5\ \text{m}\ \Rightarrow\ m = \frac{1.5}{3} = 0.5\ \text{和}\ \frac{4.5}{3} = 1.5\ ,\ \ n = 0.5$$

2 阴影标示的两个矩形（4.5 × 3 m减1.5 × 3 m），对称：为其两倍

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 2\left[I_3(1.5;0.5) - I_3(0.5;0.5)\right] = 2\left[0.13136 - 0.08403\right] = 0.09466$$

$$M = \frac{0.09466}{0.005} = \mathbf{18.93}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 73.33 \times 18.93 = \mathbf{6.94}\ \text{kN/m}^2$$

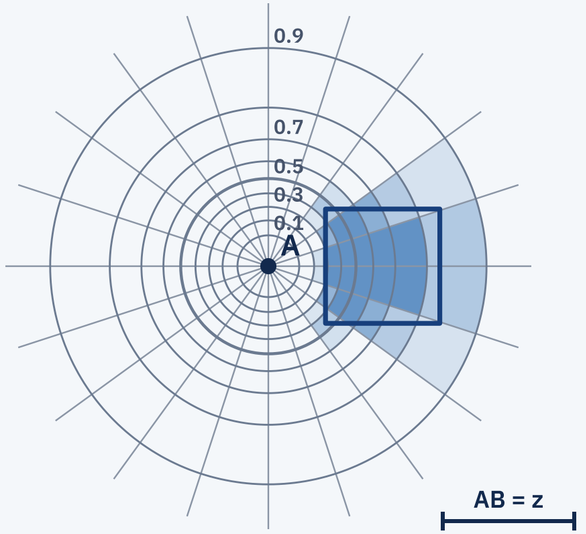
外部点同样受到应力：**M = 18.93个单元**，**$\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²**；平面图不覆盖影响图的中心。

解答 (2/2)

解答

圆环	被覆盖单元	环内单元
1	**0.00**	20
2	**0.00**	20
3	**0.18**	20
4	**3.22**	20
5	**4.69**	20
6	**4.08**	20
7	**3.31**	20
8	**2.66**	20
9	**0.80**	20
10	**0.00**	20
合计	**18.93**	200

基础平面图自第3环起进入影响图，在第5环（4.69个单元）影响最大。总计**M = 18.93**；若同一基础位于中心下方，则M = 67.22。



在GeoTerva中验算解答 ↗

小结

要点回顾

影响图：半径为$R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1}$]的九个同心圆和20条径向直线；共**200个单元**，每个单元的影响值为**IV = 1/N = 0.005**

用法：平面图按AB = z的比例绘制，A点位于中心；统计所覆盖的单元数M；**$\Delta\sigma_z$ = (IV) q M**；每一深度须另绘一张平面图

算例（3 m × 3 m，660 kN，z = 3 m，边中点）：q = 73.33 kN/m²；M = 48.07；$\Delta\sigma_z$ = **17.63 kN/m²**；z = 6 m处，M = 19.01，$\Delta\sigma_z$ = 6.97 kN/m²

任意形状：L形平面，凹角(M = 105.13, $\Delta\sigma_z$ = 52.57 kN/m²)；面积之外的点(M = 18.93, $\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²)

精度：一个单元的影响值IV q = 0.37 kN/m²；模块通过精确积分给出M（计数无误差）

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Newmark, N.M. (1942). Influence charts for computation of stresses in elastic foundations. University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin No. 338.

注

所有数值算例均由模块自身的计算引擎生成，模块给出相同的数值。模块的初始算例：3 m × 3 m基础，660 kN，A点位于基础边中点下方3 m处。

GeoTerva

在线岩土工程计算

从理论到应用

在GeoTerva中输入自己的平面形状（最多六个顶点的多边形）、荷载及A点；模块按输入的深度绘制图示，对被覆盖的单元加阴影，并同时给出M、$\Delta\sigma_z$值、深度分布曲线、分步解答和报告。

打开模块→　**理论页面 →**

用手机打开
试用模块无需注册。

如需在课堂教学中使用：info@geoterva.com