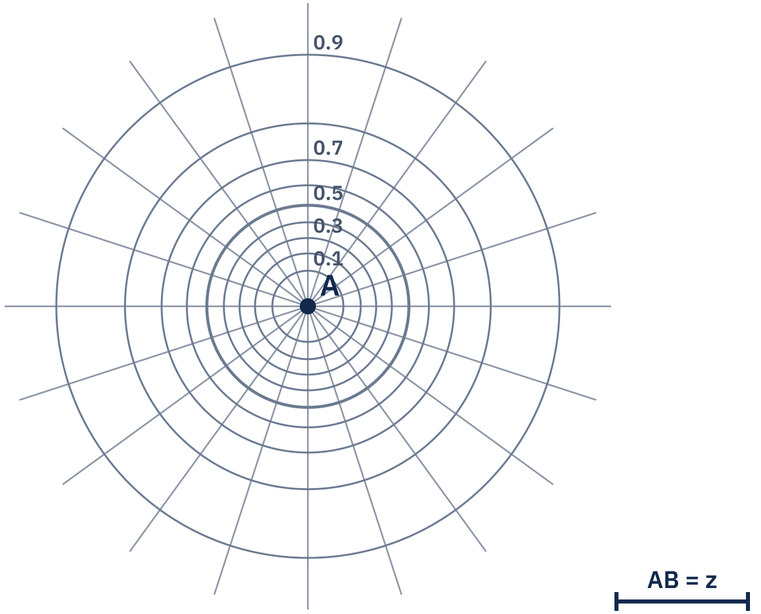
Презентация к лекции по геотехнике · Напряжения в грунтовом массиве

Номограмма влияния Newmark

Лекция: номограмма влияния Newmark; план загруженной площади накладывается на диаграмму, подсчитываются покрытые элементы, находится $\Delta\sigma_z$ = (IV) q M.



- Кольца с равным приращением напряжений
- Значение влияния IV = 0.005
- Подсчёт элементов
- Любая форма в плане
- Решается вручную

Введение

Что мы изучим на этой лекции?

Как строится диаграмма: из решения для круговой нагрузки — окружности радиусом $R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}$

10 колец × 20 секторов = 200 элементов: влияние каждого элемента одинаково, **IV = 1/N = 0.005**

Применение: план вычерчивается в масштабе **AB = z**, точка A помещается в центр диаграммы, подсчитывается число элементов **M**; $\Delta\sigma_z$ **= (IV) q M**

Проверка подсчёта по кольцам вручную **решением для угла прямоугольника**; глубина, план L-образной формы и точка вне площади

То, что для каждой глубины требуется **отдельный чертёж** плана

ХОД ЛЕКЦИИ

Каждая тема излагается **в три шага**:

1 · **Теория**: формула и обоснование

2 · **Условие**: дано и требуется определить

3 · **Решение**: пошагово, с числами

Пример: колонный фундамент 3 m × 3 m, 660 kN (q = 73.33 kN/m²); точка A расположена на 3 m ниже фундамента, под серединой одной из сторон.

Окружности равного приращения напряжений

ТЕОРИЯ

Под центром равномерно загруженного круга $\Delta\sigma_z/q = 1 - 1/[(R/z)^2 + 1]^{3/2}$. Обратив зависимость, находят **радиус** круга, создающего выбранное отношение напряжений (обе части безразмерны)

Для $\Delta\sigma_z/q$ = 0.1; 0.2 … 0.9 круги, проведённые этими радиусами, делят плоскость на **кольца**. Если загружено только одно кольцо, на глубине z под центром возникает приращение напряжения **0.1 q**; последнее кольцо (между 0.9 и 1.0) простирается до бесконечности

$$\frac{R}{z} = \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q}\right)^{-2/3} - 1}$$

$\Delta\sigma_z/q$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
R/z	0.0000	0.1865	0.2698	0.3383	0.4005	0.4598	0.5181	0.5768	0.6370	0.6998
$\Delta\sigma_z/q$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
R/z	0.7664	0.8384	0.9176	1.0067	1.1097	1.2328	1.3871	1.5944	1.9083	2.5235

200 элементов, значение коэффициента влияния 0.005

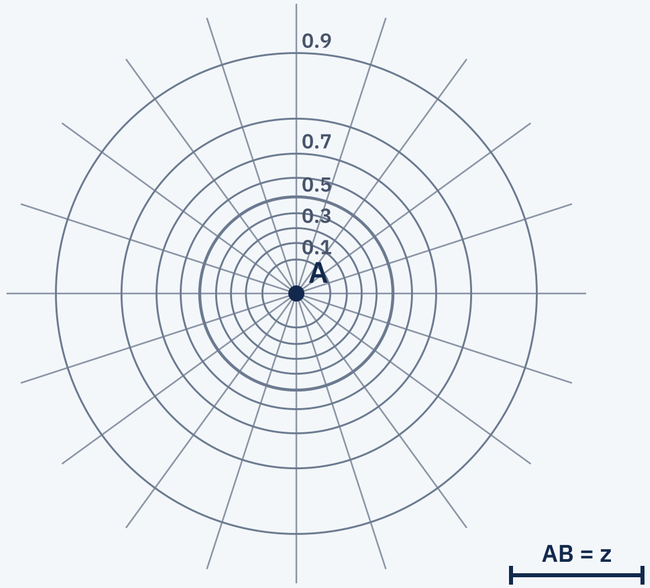
ТЕОРИЯ

Newmark (1942) разделил кольца на секторы равноотстоящими **радиальными линиями**. Вследствие симметрии влияние каждого элемента в одном кольце одинаково

Если общее число элементов равно **N**, то вклад каждого нагруженного элемента в напряжение под центром равен q, умноженному на **IV = 1/N**: это **значение влияния**. Для 10 колец и 20 секторов N = 200, IV = 0.005

Поскольку влияние каждого элемента не зависит от его положения на диаграмме, загруженную площадь любой формы можно измерить **подсчётом элементов**

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = 0.005$$



$\Delta\sigma_z = (IV)\, q\, M$

ТЕОРИЯ

1. Выбирается **глубина z** под загруженной площадью, на которой требуется найти напряжение

2. План загруженной площади вычерчивается в таком масштабе, чтобы глубина z равнялась **единичной длине AB** диаграммы

3. План накладывается на диаграмму так, чтобы точка, в которой требуется определить напряжение, оказалась в **центре** диаграммы

4. Определяется число элементов **M**, остающихся в плане; элементы, частично попадающие в план, учитываются приблизительно

Для каждой глубины требуется **отдельный чертёж** плана

$$\Delta\sigma_z = (IV)\, q\, M$$

Число охваченных элементов M

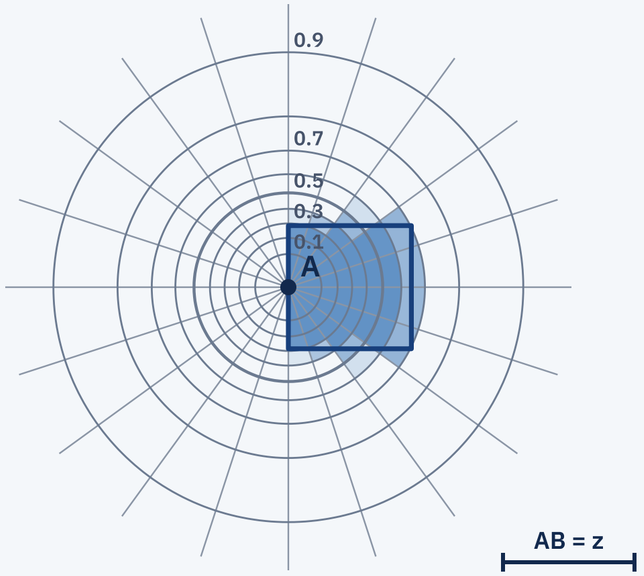
ТЕОРИЯ

Модуль выполняет построение для введённой глубины: охватываемые элементы затеняются **в соответствии с их частями, остающимися в плане**

Для подсчёта используется **точное значение**: решение Boussinesq, как и для круга, **интегрируется по многоугольнику** в полярных координатах относительно точки, и получается **M = (Δσ$_z$/q)/IV**. Это значение, которое дал бы безошибочный подсчёт

План может быть любым многоугольником не более чем с шестью вершинами

$$M = \frac{\Delta\sigma_z / q}{IV}$$



Условие

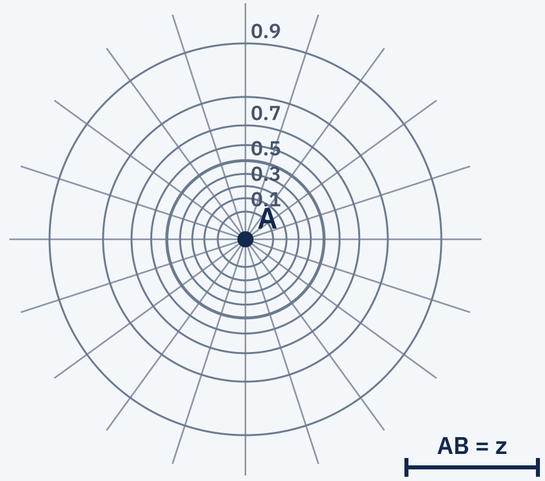
ПРИМЕР

Дано

Отношения напряжений	$\Delta\sigma_z/q = 0.1;\ 0.2 \ldots 0.9$ **(девять окружностей; десятое кольцо простирается до бесконечности)**
Сектор	**20 равных радиальных секторов**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Отношения **R/z** для кругов; число элементов **N**, значение влияния **IV**; число элементов, охватываемых каждым кругом.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Для $\Delta\sigma_z/q = 0.3$

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.3)^{-2/3} - 1} = \sqrt{1.2684 - 1} = \sqrt{0.2684} = \mathbf{0.5181}$$

2 Для $\Delta\sigma_z/q = 0.9$

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.9)^{-2/3} - 1} = \sqrt{4.6416 - 1} = \sqrt{3.6416} = \mathbf{1.9083}$$

Радиус третьей окружности равен **0.5181** z, девятой — **1.9083** z; радиусы быстро растут с увеличением отношения напряжений и стремятся к бесконечности, когда отношение приближается к 1.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 N = 10 колец × 20 секторов = 200 элементов

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = \mathbf{0.005} \qquad k\text{. круг : } 20\,k \text{ элемент } \Rightarrow\ IV\,(20\,k) = 0.1\,k = \frac{\Delta\sigma_z}{q}$$

Круг	$\Delta\sigma_z/q$	R/z	Охватываемый им элемент	Суммарное влияние = IV × элемент
1	0.1	0.2698	20 (= 20 × 1)	0.10
2	0.2	0.4005	40 (= 20 × 2)	0.20
3	0.3	0.5181	60 (= 20 × 3)	0.30
4	0.4	0.6370	80 (= 20 × 4)	0.40
5	0.5	0.7664	100 (= 20 × 5)	0.50
6	0.6	0.9176	120 (= 20 × 6)	0.60
7	0.7	1.1097	140 (= 20 × 7)	0.70
8	0.8	1.3871	160 (= 20 × 8)	0.80
9	0.9	1.9083	180 (= 20 × 9)	0.90
10-е кольцо	1.0	∞	200	1.00

Каждое кольцо состоит из 20 элементов и само по себе создаёт **0.1 q**: действие 20 k элементов внутри k-го круга совпадает со значением $\Delta\sigma_z/q = 0.1$ k, которое даёт решение для круговой нагрузки.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

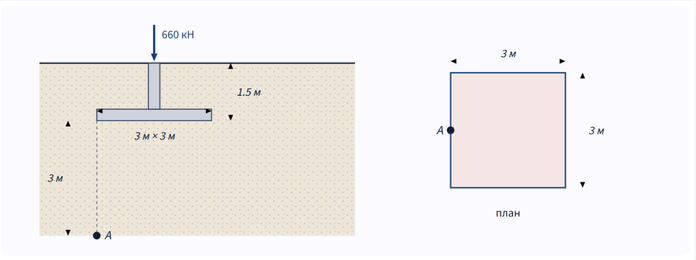
ПРИМЕР

Дано

Фундамент	3×3 **m, нагрузка на колонну** 660 **kN (**$q = 660/(3 \times 3)$**)**
Точка A	**на** $z = 3$ **m ниже подошвы фундамента, под серединой одной из сторон**
Диаграмма	$IV = 0.005$ **(10 колец, 20 секторов)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

q, масштаб плана, **M**, **$\Delta\sigma_z$**; проверка M по решению для прямоугольника.



Решение (1/3)

РЕШЕНИЕ

1 Давление под фундаментом

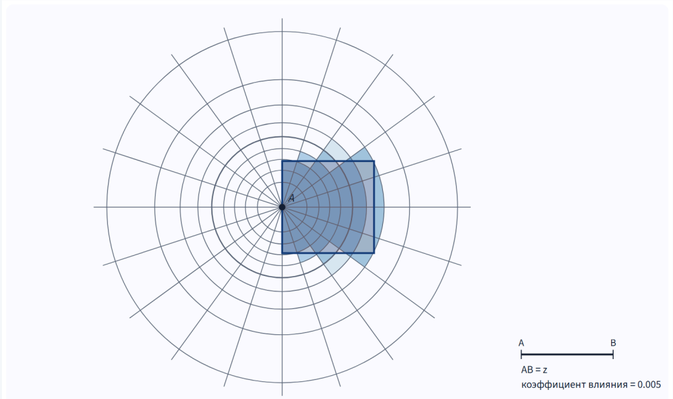
$$q = \frac{660}{3 \times 3} = \mathbf{73.33}\ \text{kN/m}^2$$

2 Масштаб плана: AB = z = 3 m

$$\text{край фундамента} = \frac{3\ \text{m}}{AB} = \frac{3}{3} = 1\ AB$$

3 Размещение: точка A помещается в центр диаграммы так, чтобы левый край фундамента проходил через центр

Фундамент вычерчивается как квадрат со стороной **AB**, а середина его левой стороны (A) помещается в центр диаграммы (рисунок справа).



Решение (2/3)

РЕШЕНИЕ

4 Точка A находится в середине края: фундамент разбивается на два прямоугольника с углом в точке A (1.5 m × 3 m)

$$m = \frac{1.5}{3} = 0.5\,, \quad n = \frac{3}{3} = 1\,, \quad m^2 = 0.25\,, \quad n^2 = 1\,, \quad \sqrt{m^2+n^2+1} = 1.50$$

5 Решение Boussinesq для угла прямоугольника $I_3(0.5;\,1)$

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1} + \tan^{-1}\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+1-m^2n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1.5}{2.5}\cdot\frac{3.25}{2.25} + \tan^{-1}\frac{1.5}{2.0}\right] = \frac{0.8667+0.6435}{4\pi} = \mathbf{0.12018}$$

Значение коэффициента влияния прямоугольника 1.5 m × 3 m с углом в точке A равно $\mathbf{I_3 = 0.12018}$; поскольку два прямоугольника расположены симметрично по обе стороны от A, суммарное значение составляет 2 I_3.

Решение (3/3)

РЕШЕНИЕ

6 Число элементов

$$M = \frac{\Delta\sigma_z / q}{IV} = \frac{2\,I_3}{IV} = \frac{2\,(0.12018)}{0.005} = \mathbf{48.07}$$

7 Приращение напряжений

$$\Delta\sigma_z = (IV)\,q\,M = (0.005)\left(\frac{660}{3\times 3}\right)(48.07) = 0.005 \times \mathbf{73.33} \times 48.07 = \mathbf{17.63}\ \text{kN/m}^2$$

8 Непосредственно по решению Boussinesq для прямоугольника

$$\Delta\sigma_z = 2\,q\,I_3 = 2\,(73.33)(0.12018) = \mathbf{17.63}\ \text{kN/m}^2$$

В точке A диаграмма охватывает **M = 48.07 элемента** (это 24.0% от 200 элементов плана): **$\Delta\sigma_z$ = 17.63 kN/m²** (24.0% от q); модуль даёт то же значение.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

ПРИМЕР

Дано

План	**Пример 2: фундамент 3×3 m, A — середина левой стороны, $z = 3$ m ($AB = 3$ m)**
Задачи	**число элементов, охватываемых каждым кольцом; всего M; вклад одного элемента в напряжение**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

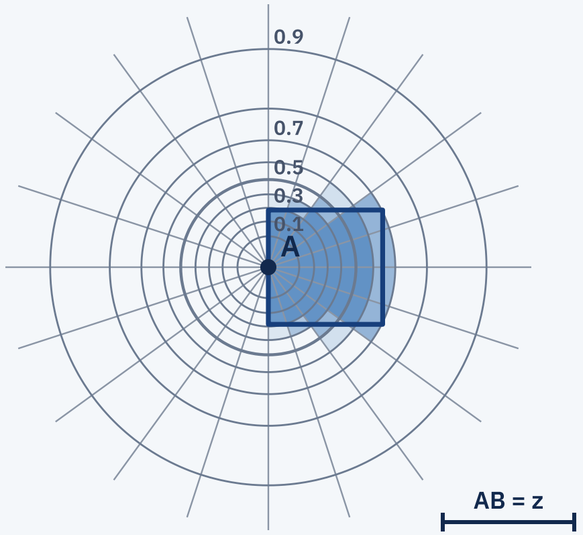
Покрытые элементы на каждое кольцо (из 20 элементов) и сумма; влияние ошибки в **один элемент** при подсчёте.

Решение

РЕШЕНИЕ

Кольцо	Диапазон R/z	Охватываемый элемент	Элемент в кольце
1	0.000 – 0.270	**10.00**	20
2	0.270 – 0.400	**10.00**	20
3	0.400 – 0.518	**9.82**	20
4	0.518 – 0.637	**6.78**	20
5	0.637 – 0.766	**5.09**	20
6	0.766 – 0.918	**4.08**	20
7	0.918 – 1.110	**2.29**	20
8	1.110 – 1.387	**0.00**	20
9	1.387 – 1.908	**0.00**	20
10	1.908 – ∞	**0.00**	20
Итого		**48.07**	200

Первые два кольца — полукруги (**10 + 10**): A лежит на краю. Итого **M = 48.07**. Один элемент = IV q = 0.37 kN/m²: разница в 1 элемент при подсчёте изменяет $\Delta\sigma_z$ на 0.37 kN/m² (2.1%).



Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

ПРИМЕР

Дано

Фундамент и точка	**Фундамент из примера 2 и точка A ($q = 73.33$ kN/m²)**
Глубины	**$z = 1.2;\ 2.4;\ 3.6 \ldots 12$ m (таблица профиля в модуле)**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

Масштаб плана на каждой глубине, **M** и **$\Delta\sigma_z$**; для z = 6 m — вручную.

Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

z (m)	Сторона фундамента (в единицах AB)	M (элемент)	$\Delta\sigma_z$ = IV q M (kN/m²)
1.2	2.500	87.03	**31.91**
2.4	1.250	59.27	**21.73**
3.6	0.833	39.16	**14.36**
4.8	0.625	26.72	**9.80**
6.0	0.500	19.01	**6.97**
7.2	0.417	14.07	**5.16**
8.4	0.357	10.76	**3.95**
9.6	0.312	8.47	**3.11**
10.8	0.278	6.82	**2.50**
12.0	0.250	5.61	**2.06**

С увеличением глубины план сжимается к центру диаграммы (сторона фундамента 2.50 AB при z = 1.2 m, 0.25 AB при z = 12 m) и накрывает меньше элементов: **M = 87.03 → 5.61**. Для каждой строки план перерисован.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

1 Масштаб плана и m, n

$$AB = z = 6 \text{ m} \Rightarrow \text{край фундамента} = \frac{3}{6} = 0.5\,AB\,; \quad m = \frac{1.5}{6} = 0.25\,, \;\; n = \frac{3}{6} = 0.5$$

2 Число элементов и напряжение

$$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753 \;\Rightarrow\; M = \frac{2\,(0.04753)}{0.005} = \mathbf{19.01}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 73.33 \times 19.01 = \mathbf{6.97}\ \text{kN/m}^2$$

При z = 6 m фундамент очень мал относительно центра диаграммы и охватывает лишь **19.01 элемента**; $\Delta\sigma_z$ = **6.97 kN/m²** (17.63 kN/m² при z = 3 m).

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

ПРИМЕР

Дано

Площадь	**Г-образная (6 углов):** $(0;0),\ (4;0),\ (4;2),\ (2;2),\ (2;4),\ (0;4)$ **m;** $q = 100$ **kN/m²**
Точка A	**под входящим углом,** $(2;\ 2)$**;** $z = 2$ **m**
Подсказка	**Из четырёх четвертей 2 m × 2 m вокруг точки A нагружены три**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

M и **$\Delta\sigma_z$**; подсчёт по кольцам.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Масштаб плана и четверти

$$AB = z = 2\ \text{m} \Rightarrow \text{ширина плеча} = 1\,AB\ ; \quad \text{каждая четверть: } m = n = \frac{2}{2} = 1$$

2 Число элементов в одной четверти и итог

$$I_3(1;1) = 0.17522 \ \Rightarrow \ M_{\text{четверть}} = \frac{0.17522}{0.005} = 35.04$$

$$M = 3\,M_{\text{четверть}} = 3\,(35.04) = \mathbf{105.13}$$

3 Напряжение

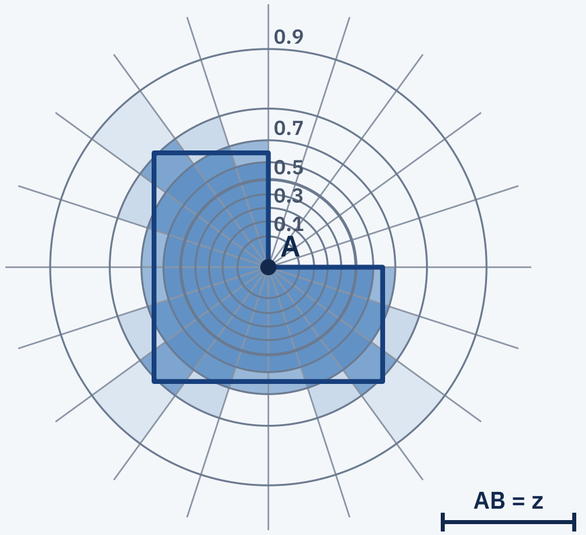
$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 100 \times 105.13 = \mathbf{52.57}\ \text{kN/m}^2 \qquad \left(= 3\,q\,I_3 = 3\,(100)(0.17522)\right)$$

Под входящим углом L-образная нагрузка охватывает **105.13 элемента**: три из четырёх четвертей. Если бы были нагружены все четыре четверти, M было бы 140.18.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

Кольцо	Охватываемый элемент	Элемент в кольце
1	**15.00**	20
2	**15.00**	20
3	**15.00**	20
4	**15.00**	20
5	**15.00**	20
6	**15.00**	20
7	**11.94**	20
8	**3.18**	20
9	**0.01**	20
10	**0.00**	20
Итого	**105.13**	200



В кольцах 1–6 охватывается **15 элементов** каждого кольца (три четверти от 20); во внешних кольцах влияют только углы плана (7-е кольцо — 11.94, 8-е кольцо — 3.18 элемента). Итого **M = 105.13**.

Проверить решение в GeoTerva ↗

Условие

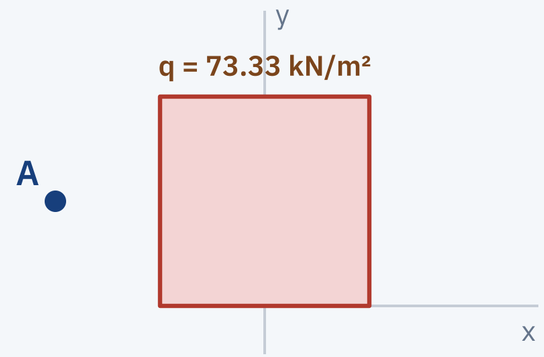
ПРИМЕР

Дано

План и нагрузка	**Фундамент 3×3 m из примера 2 ($q = 73.33$ kN/m²)**
Точка A	**за пределами фундамента: $x = -3$ m, $y = 1.5$ m (на расстоянии 1.5 m от левого края); $z = 3$ m**

ТРЕБУЕТСЯ ОПРЕДЕЛИТЬ

M и **$\Delta\sigma_z$**; смысл подсчёта для внешней точки.



Решение (1/2)

РЕШЕНИЕ

1 Расстояния от A до фундамента (z = 3 m)

$$x:\ 1.5 \text{ c m } 4.5 \text{ m};\quad y:\ \pm 1.5 \text{ m} \Rightarrow m = \frac{1.5}{3} = 0.5 \text{ и } \frac{4.5}{3} = 1.5,\ n = 0.5$$

2 Два заштрихованных прямоугольника (4.5 × 3 m минус 1.5 × 3 m), симметрично: удвоенное значение

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 2\left[I_3(1.5;0.5) - I_3(0.5;0.5)\right] = 2\left[0.13136 - 0.08403\right] = 0.09466$$

$$M = \frac{0.09466}{0.005} = \mathbf{18.93}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 73.33 \times 18.93 = \mathbf{6.94} \text{ kN/m}^2$$

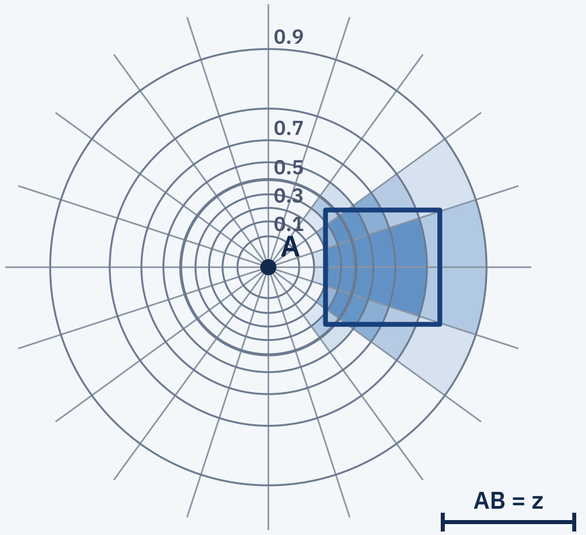
Точка вне площади также получает напряжение: **M = 18.93 элемента**, **$\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²**; план не покрывает центр диаграммы.

Решение (2/2)

РЕШЕНИЕ

Кольцо	Охватываемый элемент	Элемент в кольце
1	**0.00**	20
2	**0.00**	20
3	**0.18**	20
4	**3.22**	20
5	**4.69**	20
6	**4.08**	20
7	**3.31**	20
8	**2.66**	20
9	**0.80**	20
10	**0.00**	20
Итого	**18.93**	200

План фундамента заходит на диаграмму начиная с 3-го кольца и сильнее всего влияет на 5-м кольце (4.69 элемента). Суммарно **M = 18.93**; для того же фундамента под центром было бы M = 67.22.



Проверить решение в GeoTerva ↗

Резюме

Главное

Диаграмма: девять окружностей радиуса $R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}$ и 20 радиальных прямых; **200 элементов**, влияние каждого элемента **IV = 1/N = 0.005**

Применение: план строится в масштабе AB = z, точка A в центре; число покрытых элементов M; **$\Delta\sigma_z$ = (IV) q M**; для каждой глубины — отдельный план

Пример (3 m × 3 m, 660 kN, z = 3 m, середина стороны): q = 73.33 kN/m²; M = 48.07; $\Delta\sigma_z$ = **17.63 kN/m²**; при z = 6 m M = 19.01, $\Delta\sigma_z$ = 6.97 kN/m²

Любая форма: план в форме L, входящий угол (M = 105.13, $\Delta\sigma_z$ = 52.57 kN/m²); точка вне площади (M = 18.93, $\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²)

Точность: вклад одного элемента составляет IV q = 0.37 kN/m²; модуль даёт M точным интегрированием (безошибочный подсчёт)

Список литературы

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Newmark, N.M. (1942). Influence charts for computation of stresses in elastic foundations. University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin No. 338.

ПРИМЕЧАНИЕ

Все числовые примеры получены с помощью собственного расчётного ядра модуля; модуль даёт те же значения. Начальный пример модуля: фундамент 3 m × 3 m, 660 kN, на 3 m ниже середины стороны A.

GeoTerva

Геотехнические расчёты онлайн

От теории к практике

Введите в GeoTerva собственный план (многоугольник не более чем с шестью вершинами), нагрузку и точку A; модуль строит диаграмму для заданной глубины, затеняет охваченные элементы и одновременно выдаёт M, значение $\Delta\sigma_z$, профиль по глубине, пошаговое решение и отчёт.

Открыть модуль → **Страница теории →**

Открыть на телефоне
Для пробных модулей регистрация не требуется.