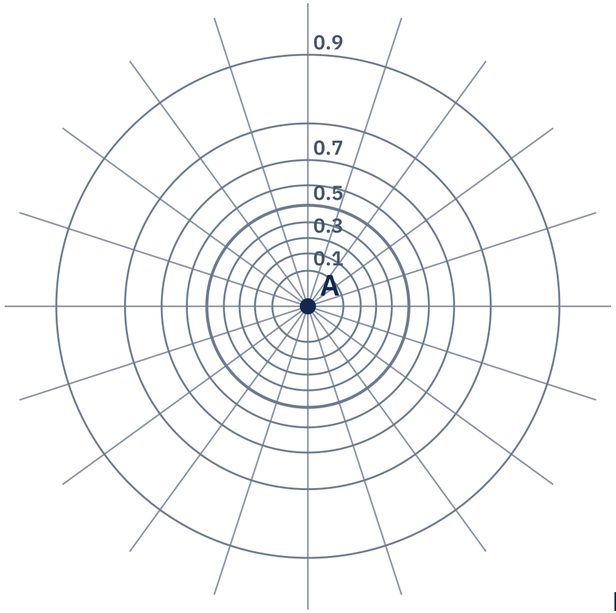
Apresentação de aula de geotecnia · Tensões no solo

Ábaco de Newmark

Aula: ábaco de influência de Newmark; a planta da área carregada é colocada sobre o ábaco, contam-se os elementos abrangidos e obtém-se $\Delta\sigma_z$ = (IV) q M.

- Anéis de igual acréscimo de tensão
- Valor de influência IV = 0.005
- Contagem de elementos
- Qualquer planta
- Resolúvel à mão



Introdução

O que veremos nesta aula?

Como o diagrama é construído: a partir da solução da carga circular, círculos de raio $\mathbf{R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}}$

10 anéis × 20 setores = 200 elementos: cada elemento tem o mesmo efeito, **IV = 1/N = 0.005**

Uso: a planta é desenhada na escala **AB = z**, o ponto A é colocado no centro do ábaco, contam-se os **M** elementos; $\mathbf{\Delta\sigma_z = (IV)\ q\ M}$

Verificar à mão, pela **solução do retângulo de canto**, a contagem anel por anel; profundidade, planta em L e ponto fora da área

A necessidade de **um desenho separado** da planta para cada profundidade

ROTEIRO DA AULA

Cada tópico é tratado em **três etapas**:

1 · **Teoria**: fórmula e justificativa

2 · **Enunciado**: dados e o que se pede

3 · **Solução**: passo a passo, com números

Exemplo: sapata de pilar de 3 m × 3 m, 660 kN (q = 73.33 kN/m²); o ponto A está 3 m abaixo da sapata, sob o ponto médio de uma borda.

Círculos de igual acréscimo de tensão

TEORIA

Sob o centro de um círculo com carga uniforme, $\Delta\sigma_z/q = 1 - 1/[(R/z)^2 + 1]^{3/2}$. Invertendo-se a relação, obtém-se o **raio** do círculo que produz uma razão de tensões escolhida (os dois lados são adimensionais)

Para $\Delta\sigma_z/q$ = 0.1, 0.2 ... 0.9, os círculos traçados com esses raios dividem o plano em **anéis**. Cada anel, carregado isoladamente, produz sob o centro, à profundidade z, um acréscimo de tensão de **0.1 q**; o último anel (entre 0.9 e 1.0) estende-se ao infinito

$$\frac{R}{z} = \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q}\right)^{-2/3} - 1}$$

$\Delta\sigma_z/q$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
R/z	0.0000	0.1865	0.2698	0.3383	0.4005	0.4598	0.5181	0.5768	0.6370	0.6998
$\Delta\sigma_z/q$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
R/z	0.7664	0.8384	0.9176	1.0067	1.1097	1.2328	1.3871	1.5944	1.9083	2.5235

200 elementos, valor de influência 0.005

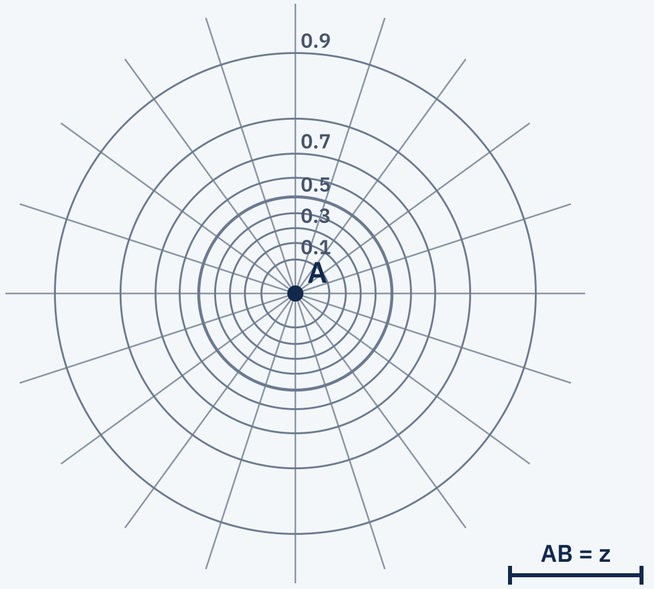
TEORIA

Newmark (1942) dividiu os anéis em setores por **retas radiais** igualmente espaçadas. Por simetria, o efeito de cada elemento do mesmo anel é igual

Sendo **N** o número total de elementos, a contribuição de cada elemento carregado para a tensão sob o centro é **IV = 1/N** vezes q: o **valor de influência**. Para 10 anéis e 20 setores, N = 200, IV = 0.005

Como o efeito de cada elemento independe de sua posição no diagrama, uma área carregada de qualquer forma pode ser medida **contando-se os elementos**

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = 0.005$$



$\Delta\sigma_z = (IV)\, q\, M$

TEORIA

1. Seleciona-se a **profundidade z** abaixo da área carregada na qual se deseja a tensão

2. A planta da área carregada é desenhada em escala tal que a profundidade z seja igual ao **comprimento unitário AB** do diagrama

3. A planta é colocada sobre o diagrama de modo que o ponto cuja tensão se deseja coincida com o **centro** do diagrama

4. Determina-se o número de elementos **M** que ficam dentro da planta; os elementos parcialmente dentro são considerados por estimativa

Para cada profundidade, é necessário **um desenho separado** da planta

$$\Delta\sigma_z = (IV)\, q\, M$$

Número de elementos cobertos M

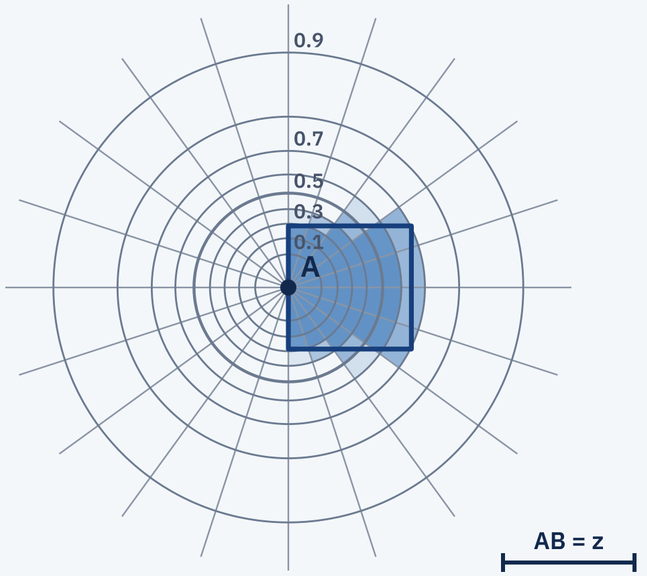
TEORIA

O módulo faz o desenho para a profundidade informada: os elementos abrangidos são sombreados **conforme as partes que permanecem dentro da planta**

Para a contagem, utiliza-se o **valor exato**: a solução de Boussinesq, como no caso do círculo, é **integrada sobre o polígono** em coordenadas polares em relação ao ponto, obtendo-se **M = ($\Delta\sigma_z$/q)/IV**. Este é o valor que uma contagem perfeita forneceria

A planta pode ser qualquer polígono com no máximo seis vértices

$$M = \frac{\Delta\sigma_z / q}{IV}$$



Enunciado

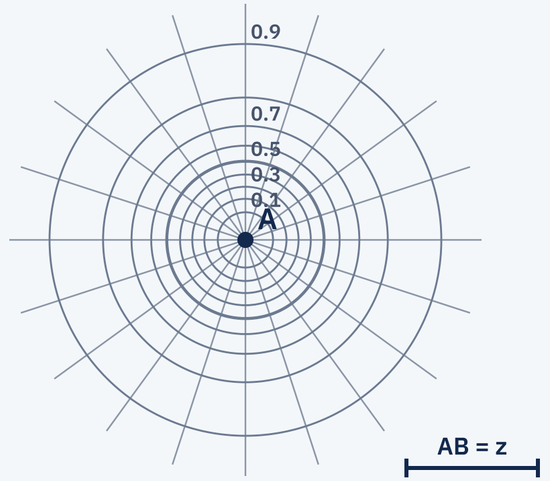
EXEMPLO

PEDE-SE

As razões **R/z** dos círculos; o número de elementos **N**, o valor de influência **IV**; o número de elementos abrangidos por cada círculo.

Dados

Razões de tensões	$\Delta\sigma_z/q = 0.1;\ 0.2 \ldots 0.9$ **(nove círculos; o décimo anel se estende ao infinito)**
Setor	**20 setores radiais iguais**



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Para $\Delta\sigma_z/q = 0.3$

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.3)^{-2/3} - 1} = \sqrt{1.2684 - 1} = \sqrt{0.2684} = \mathbf{0.5181}$$

2 Para $\Delta\sigma_z/q = 0.9$

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.9)^{-2/3} - 1} = \sqrt{4.6416 - 1} = \sqrt{3.6416} = \mathbf{1.9083}$$

O terceiro círculo tem raio de **0.5181** vezes z, e o nono, de **1.9083** vezes; os raios crescem rapidamente à medida que a razão de tensões aumenta e tendem ao infinito quando a razão tende a 1.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

1 N = 10 anéis × 20 setores = 200 elementos

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = \mathbf{0.005} \qquad k.\ \text{círculo}: \ 20\,k \text{ elementos} \ \Rightarrow \ IV\,(20\,k) = 0.1\,k = \frac{\Delta\sigma_z}{q}$$

Círculo	$\Delta\sigma_z/q$	R/z	Elemento que ele abrange	Influência total = IV × elemento
1	0.1	0.2698	20 (= 20 × 1)	0.10
2	0.2	0.4005	40 (= 20 × 2)	0.20
3	0.3	0.5181	60 (= 20 × 3)	0.30
4	0.4	0.6370	80 (= 20 × 4)	0.40
5	0.5	0.7664	100 (= 20 × 5)	0.50
6	0.6	0.9176	120 (= 20 × 6)	0.60
7	0.7	1.1097	140 (= 20 × 7)	0.70
8	0.8	1.3871	160 (= 20 × 8)	0.80
9	0.9	1.9083	180 (= 20 × 9)	0.90
10º anel	1.0	∞	200	1.00

Cada anel é composto de 20 elementos e contribui sozinho com **0.1 q**: o efeito dos 20 k elementos dentro do k-ésimo círculo é igual ao $\Delta\sigma_z/q = 0.1\ k$ dado pela solução da carga circular.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

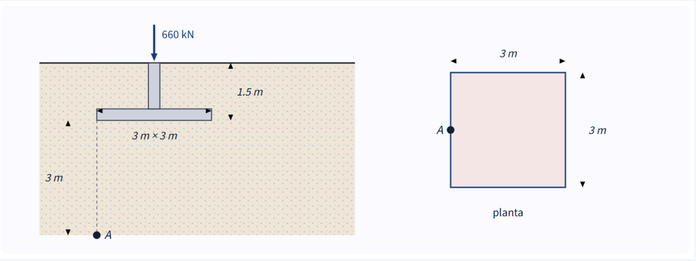
EXEMPLO

Dados

Fundação	3×3 **m, carga do pilar** 660 **kN (**$q = 660/(3 \times 3)$**)**
Ponto A	**a** $z = 3$ **m abaixo da sapata, sob o ponto médio de um lado**
Diagrama	$IV = 0.005$ **(10 anéis, 20 setores)**

PEDE-SE

q, escala da planta, **M**, **$\Delta\sigma_z$**; verificação de M com a solução do retângulo.



Solução (1/3)

SOLUÇÃO

1 Pressão na fundação

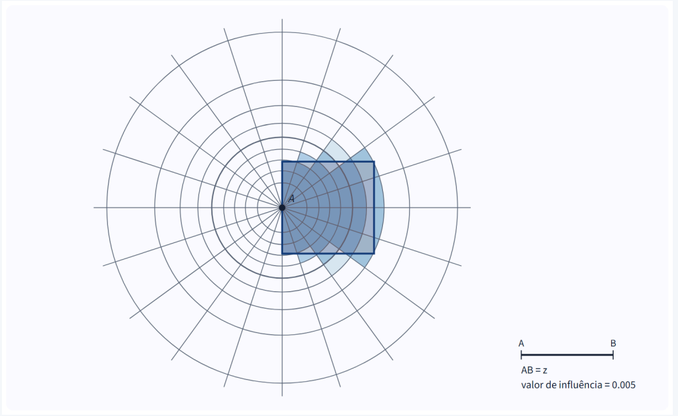
$$q = \frac{660}{3 \times 3} = \mathbf{73.33}\ \mathrm{kN/m^2}$$

2 Escala da planta: AB = z = 3 m

$$\text{borda da sapata} = \frac{3\ \mathrm{m}}{AB} = \frac{3}{3} = 1\ AB$$

3 Posicionamento: o ponto A é colocado no centro do diagrama, de modo que a borda esquerda da sapata passe pelo centro

A sapata é desenhada como um quadrado de lado de comprimento **AB**, e o ponto médio de seu lado esquerdo (A) é colocado no centro do diagrama (figura à direita).



Solução (2/3)

SOLUÇÃO

4 A está no meio da borda: a fundação é dividida em dois retângulos com canto em A (1.5 m × 3 m)

$$m = \frac{1.5}{3} = 0.5\,, \quad n = \frac{3}{3} = 1\,, \quad m^2 = 0.25\,, \quad n^2 = 1\,, \quad \sqrt{m^2+n^2+1} = 1.50$$

5 Solução de Boussinesq para o canto de um retângulo $I_3(0.5;\,1)$

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1} + \tan^{-1}\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+1-m^2n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1.5}{2.5}\cdot\frac{3.25}{2.25} + \tan^{-1}\frac{1.5}{2.0}\right] = \frac{0.8667+0.6435}{4\pi} = \mathbf{0.12018}$$

O valor de influência do retângulo de 1.5 m × 3 m com um canto em A é **I_3 = 0.12018**; como os dois retângulos são simétricos em relação a A, o total é 2 I_3.

Solução (3/3)

SOLUÇÃO

6 Número de elementos

$$M = \frac{\Delta\sigma_z/q}{IV} = \frac{2\,I_3}{IV} = \frac{2\,(0.12018)}{0.005} = \mathbf{48.07}$$

7 Acréscimo de tensão

$$\Delta\sigma_z = (IV)\,q\,M = (0.005)\left(\frac{660}{3\times 3}\right)(48.07) = 0.005 \times 73.33 \times 48.07 = \mathbf{17.63}\ \mathrm{kN/m^2}$$

8 Diretamente pela solução retangular de Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = 2\,q\,I_3 = 2\,(73.33)(0.12018) = \mathbf{17.63}\ \mathrm{kN/m^2}$$

No ponto A o diagrama abrange **M = 48.07 elementos** (a planta cobre 24.0% dos 200 elementos): **$\Delta\sigma_z$ = 17.63 kN/m²** (24.0% de q); o módulo fornece o mesmo valor.

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Planta	**Exemplo 2: sapata de 3×3 m, A no ponto médio da borda esquerda, $z = 3$ m ($AB = 3$ m)**
Enunciados	**número de elementos abrangidos em cada anel; total M; contribuição de um elemento para a tensão**

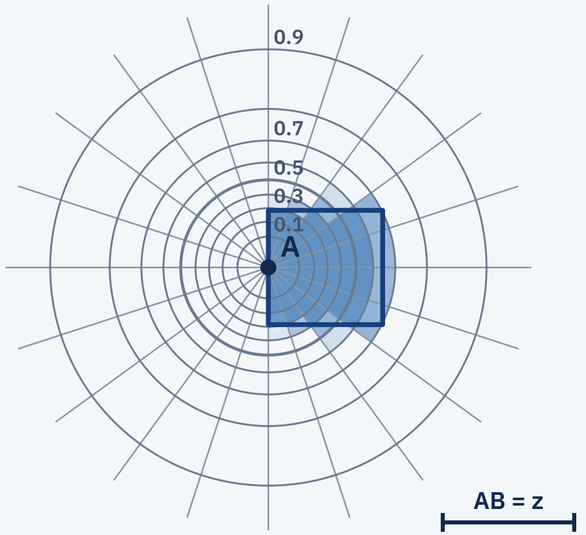
PEDE-SE

Elementos cobertos por anel (de 20 elementos) e o total; efeito de um erro de **um elemento** na contagem.

Solução

SOLUÇÃO

Anel	Intervalo de R/z	Elemento abrangido	Elemento no anel
1	0.000 – 0.270	**10.00**	20
2	0.270 – 0.400	**10.00**	20
3	0.400 – 0.518	**9.82**	20
4	0.518 – 0.637	**6.78**	20
5	0.637 – 0.766	**5.09**	20
6	0.766 – 0.918	**4.08**	20
7	0.918 – 1.110	**2.29**	20
8	1.110 – 1.387	**0.00**	20
9	1.387 – 1.908	**0.00**	20
10	1.908 – ∞	**0.00**	20
Total		**48.07**	200



Os dois primeiros anéis são semicírculos (**10 + 10**): o ponto A está sobre a borda. Total **M = 48.07**. Um elemento = IV q = 0.37 kN/m²: na contagem, a diferença de 1 elemento altera $\Delta\sigma_z$ em 0.37 kN/m² (2.1%).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

EXEMPLO

Dados

Sapata e ponto	**A sapata do Exemplo 2 e o ponto A ($q = 73.33$ kN/m²)**
Profundidades	**$z = 1.2;\ 2.4;\ 3.6 \ldots 12$ m (tabela de perfil do módulo)**

PEDE-SE

Escala da planta em cada profundidade, **M** e **$\Delta\sigma_z$**; à mão para z = 6 m.

Solução (1/2)

SOLUÇÃO

z (m)	Lado da sapata (unidade AB)	M (elemento)	$\Delta\sigma_z$ = IV q M (kN/m²)
1.2	2.500	87.03	**31.91**
2.4	1.250	59.27	**21.73**
3.6	0.833	39.16	**14.36**
4.8	0.625	26.72	**9.80**
6.0	0.500	19.01	**6.97**
7.2	0.417	14.07	**5.16**
8.4	0.357	10.76	**3.95**
9.6	0.312	8.47	**3.11**
10.8	0.278	6.82	**2.50**
12.0	0.250	5.61	**2.06**

À medida que a profundidade aumenta, o desenho em planta encolhe em direção ao centro (borda da sapata em 2.50 AB para z = 1.2 m e em 0.25 AB para z = 12 m) e cobre menos elementos: **M = 87.03 → 5.61**. A planta foi redesenhada para cada linha.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

1 Escala da planta e m, n

$$AB = z = 6\ \text{m} \Rightarrow \text{borda da sapata} = \frac{3}{6} = 0.5\,AB\ ; \quad m = \frac{1.5}{6} = 0.25\ , \quad n = \frac{3}{6} = 0.5$$

2 Número de elementos e tensão

$$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753 \ \Rightarrow \ M = \frac{2\,(0.04753)}{0.005} = \mathbf{19.01}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 73.33 \times 19.01 = \mathbf{6.97}\ \text{kN/m}^2$$

Em z = 6 m, a sapata é muito pequena em relação ao centro do diagrama e abrange apenas **19.01 elementos**; $\Delta\sigma_z$ = **6.97 kN/m²** (17.63 kN/m² em z = 3 m).

Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

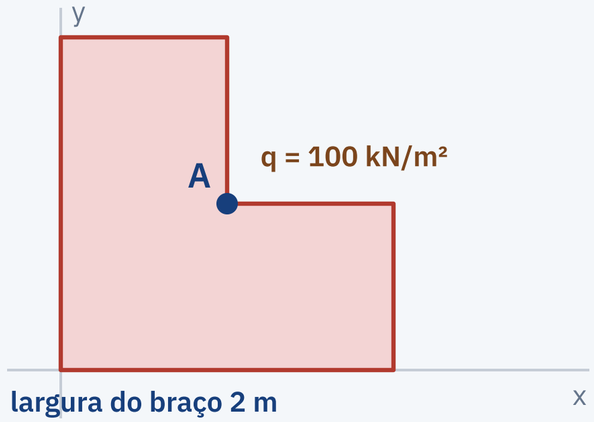
EXEMPLO

Dados

Área	**em forma de L (6 cantos):** $(0;0),\ (4;0),\ (4;2),\ (2;2),\ (2;4),\ (0;4)$ **m;** $q = 100$ **kN/m²**
Ponto A	**abaixo do canto reentrante,** $(2;\ 2)$**;** $z = 2$ **m**
Dica	**Três dos quatro quadrantes de 2 m × 2 m em torno de A estão carregados**

PEDE-SE

M e **$\Delta\sigma_z$**; soma anel a anel.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Escala da planta e quadrantes

$$AB = z = 2\ \text{m} \Rightarrow \text{largura do braço} = 1\,AB\ ; \quad \text{cada quadrante: } m = n = \frac{2}{2} = 1$$

2 Número de elementos de um quadrante e o total

$$I_3(1;1) = 0.17522 \ \Rightarrow \ M_{\text{quadrant}} = \frac{0.17522}{0.005} = 35.04$$

$$M = 3\,M_{\text{quadrant}} = 3\,(35.04) = \mathbf{105.13}$$

3 Tensão

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 100 \times 105.13 = \mathbf{52.57}\ \text{kN/m}^2 \qquad \left(= 3\,q\,I_3 = 3\,(100)(0.17522)\right)$$

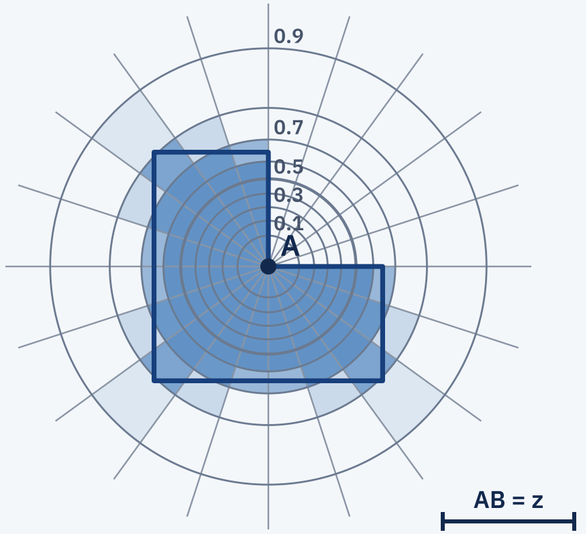
Sob o canto reentrante, a carga em forma de L abrange **105.13 elementos**: três dos quatro quadrantes. Se os quatro quadrantes estivessem carregados, M seria 140.18.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

Anel	Elemento abrangido	Elemento no anel
1	**15.00**	20
2	**15.00**	20
3	**15.00**	20
4	**15.00**	20
5	**15.00**	20
6	**15.00**	20
7	**11.94**	20
8	**3.18**	20
9	**0.01**	20
10	**0.00**	20
Total	**105.13**	200

Nos anéis 1–6, são abrangidos **15 elementos** de cada anel (três quartos de 20); nos anéis externos, apenas os cantos da planta são efetivos (anel 7: 11.94 elementos, anel 8: 3.18 elementos). Total **M = 105.13**.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Enunciado

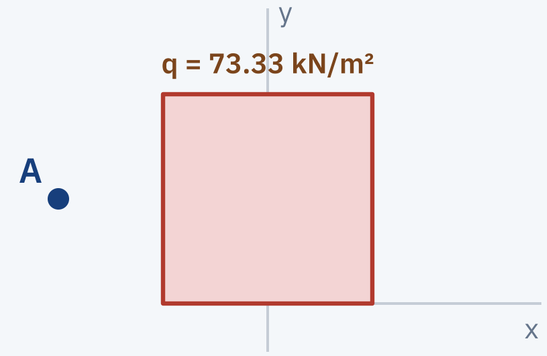
EXEMPLO

Dados

Planta e carga	**A sapata de 3×3 m do Exemplo 2 ($q = 73.33$ kN/m²)**
Ponto A	**fora da fundação: $x = -3$ m, $y = 1.5$ m (a 1.5 m da borda esquerda); $z = 3$ m**

PEDE-SE

M e **$\Delta\sigma_z$**; o significado da contagem em um ponto externo.



Solução (1/2)

SOLUÇÃO

1 Distâncias de A à sapata (z = 3 m)

$$x:\ 1.5\ \text{com m}\ 4.5\ \text{m};\quad y:\ \pm 1.5\ \text{m}\ \Rightarrow\ m=\frac{1.5}{3}=0.5\ \text{e}\ \frac{4.5}{3}=1.5,\ \ n=0.5$$

2 Dois retângulos hachurados (4.5 × 3 m menos 1.5 × 3 m), simétricos: o dobro

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q}=2\left[I_3(1.5;0.5)-I_3(0.5;0.5)\right]=2\left[0.13136-0.08403\right]=0.09466$$

$$M=\frac{0.09466}{0.005}=\mathbf{18.93}$$

$$\Delta\sigma_z=0.005\times 73.33\times 18.93=\mathbf{6.94}\ \text{kN/m}^2$$

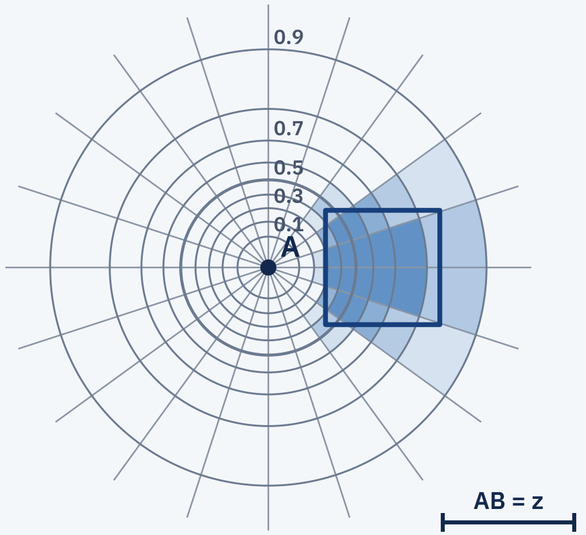
Um ponto externo também recebe tensão: **M = 18.93 elementos**, **$\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²**; a planta não cobre o centro do diagrama.

Solução (2/2)

SOLUÇÃO

Anel	Elemento abrangido	Elemento no anel
1	**0.00**	20
2	**0.00**	20
3	**0.18**	20
4	**3.22**	20
5	**4.69**	20
6	**4.08**	20
7	**3.31**	20
8	**2.66**	20
9	**0.80**	20
10	**0.00**	20
Total	**18.93**	200

A planta entra no diagrama a partir do terceiro anel e tem maior efeito no quinto anel (4.69 elementos). Total **M = 18.93**; para a mesma fundação sob o centro, seria M = 67.22.



Verificar a solução no GeoTerva ↗

Resumo

Pontos-chave

Diagrama: nove círculos de raio $R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}$ e 20 retas radiais; **200 elementos**, com a influência de cada elemento **IV = 1/N = 0.005**

Uso: planta na escala AB = z, com o ponto A no centro; número de elementos abrangidos M; **$\Delta\sigma_z$ = (IV) q M**; uma planta distinta para cada profundidade

Exemplo (3 m × 3 m, 660 kN, z = 3 m, meio do lado): q = 73.33 kN/m²; M = 48.07; $\Delta\sigma_z$ = **17.63 kN/m²**; em z = 6 m, M = 19.01, $\Delta\sigma_z$ = 6.97 kN/m²

Qualquer forma: planta em L, canto reentrante (M = 105.13, $\Delta\sigma_z$ = 52.57 kN/m²); ponto fora da área (M = 18.93, $\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²)

Precisão: a contribuição de um elemento é IV q = 0.37 kN/m²; o módulo fornece M pela integral exata (contagem perfeita)

Referências bibliográficas

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Newmark, N.M. (1942). Influence charts for computation of stresses in elastic foundations. University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin No. 338.

NOTA

Todos os exemplos numéricos foram gerados com o mecanismo de cálculo do próprio módulo; o módulo fornece os mesmos valores. O exemplo inicial do módulo: sapata de 3 m × 3 m, 660 kN, 3 m abaixo do meio do lado A.

GeoTerva

Cálculos geotécnicos on-line

Da teoria à prática

Inserir no GeoTerva a própria planta (polígono de até seis vértices), a carga e o ponto A; o módulo traça o diagrama para a profundidade informada, sombreia os elementos abrangidos e fornece em conjunto M, o valor de $\Delta\sigma_z$, o perfil em profundidade, a solução passo a passo e o relatório.

Abrir o módulo →

Página de teoria →

Abrir no celular
Os módulos de teste não exigem cadastro.