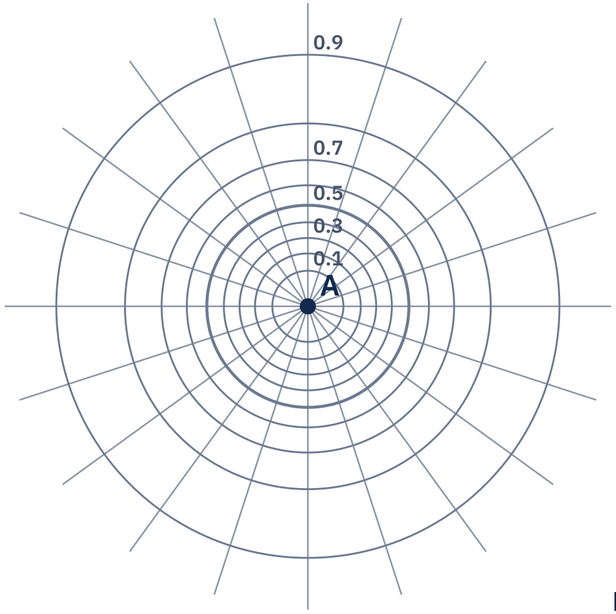
Geotechnisch college · Spanningen in de ondergrond

Invloedsdiagram van Newmark

College: invloedsdiagram van Newmark; de plattegrond van het belaste gebied wordt op het diagram gelegd, de bedekte elementen worden geteld en $\Delta\sigma_z$ = (IV) q M wordt verkregen.

- Ringen met gelijke spanningstoename
- Invloedsfactor IV = 0.005
- Aantal elementen
- Elk bovenaanzicht
- Handmatig oplosbaar



Inleiding

Wat leren we in dit college?

Hoe het diagram wordt opgebouwd: uit de oplossing voor een cirkelvormige belasting cirkels met straal $\mathbf{R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}}$

10 ringen × 20 sectoren = 200 elementen: elk element heeft hetzelfde effect, **IV = 1/N = 0.005**

Gebruik: de plattegrond wordt op schaal **AB = z** getekend, punt A wordt in het midden van het diagram geplaatst, **M** elementen worden geteld; $\mathbf{\Delta\sigma_z}$ **= (IV) q M**

Het ring voor ring verifiëren met de hand met de **rechthoekige hoekoplossing**; diepte, L-vormige plattegrond en een punt buiten het gebied

Dat voor elke diepte **een afzonderlijke tekening** van het bovenaanzicht nodig is

COLLEGESTRUCTUUR

Elk onderwerp wordt in **drie stappen** behandeld:

1 · **Theorie**: formule en onderbouwing

2 · **Opgave**: gegeven en gevraagd

3 · **Oplossing**: stap voor stap, met getallen

Voorbeeld: kolomfundering van 3 m × 3 m, 660 kN (q = 73.33 kN/m²); punt A ligt 3 m onder de fundering, onder het midden van een rand.

Cirkels van gelijke spanningstoename

THEORIE

Onder het centrum van een gelijkmatig belast cirkelvormig vlak geldt $\Delta\sigma_z/q = 1 - 1/[(R/z)^2 + 1]^{3/2}$. Door de betrekking om te keren, vindt men de **straal** van het cirkelvormige vlak dat een gekozen spanningsverhouding veroorzaakt (beide zijden zijn dimensieloos).

Voor $\Delta\sigma_z/q$ = 0.1, 0.2 … 0.9 verdelen de cirkels die met deze stralen worden getekend het vlak in **ringen**. Elke ring afzonderlijk belast geeft op diepte z onder het middelpunt een spanningsverhoging van **0.1 q**; de laatste ring (tussen 0.9 en 1.0) loopt tot in het oneindige

$$\frac{R}{z} = \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q}\right)^{-2/3} - 1}$$

$\Delta\sigma_z/q$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
R/z	0.0000	0.1865	0.2698	0.3383	0.4005	0.4598	0.5181	0.5768	0.6370	0.6998
$\Delta\sigma_z/q$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
R/z	0.7664	0.8384	0.9176	1.0067	1.1097	1.2328	1.3871	1.5944	1.9083	2.5235

200 elementen, invloedsfactor 0.005

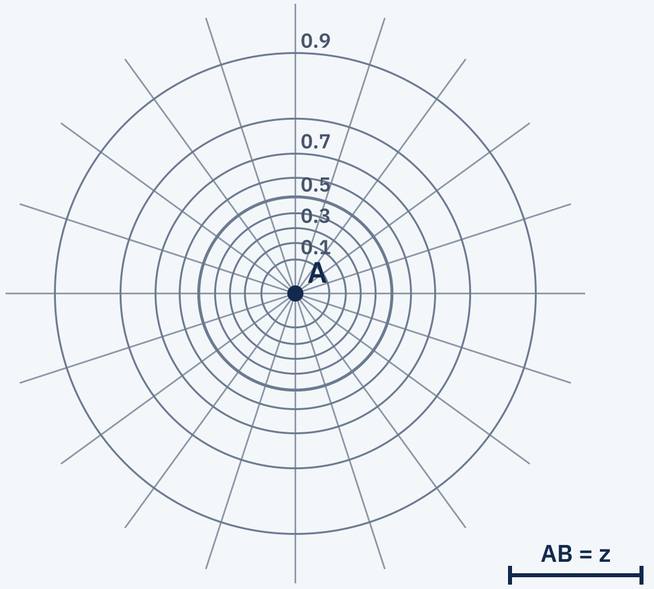
THEORIE

Newmark (1942) verdeelde de ringen in sectoren met gelijkmatig verdeelde **radiale lijnen**. Door symmetrie heeft elk element in dezelfde ring dezelfde invloed

Als het totale aantal elementen **N** is, dan bedraagt de bijdrage van elk belast element aan de spanning onder het midden **IV = 1/N** maal q: de **invloedsfactor**. Voor 10 ringen en 20 sectoren geldt N = 200, IV = 0.005

Omdat de invloed van elk element onafhankelijk is van zijn positie in het diagram, kan een belast oppervlak van elke vorm worden bepaald **door de elementen te tellen**

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = 0.005$$



$\Delta\sigma_z = (IV)\ q\ M$

THEORIE

1. De **diepte z** onder het belaste gebied wordt gekozen waar de spanning gevraagd is

2. Het bovenaanzicht van het belaste gebied wordt getekend op een schaal waarbij de diepte z gelijk is aan de **eenheidslengte AB** van het diagram

3. Het bovenaanzicht wordt op het diagram geplaatst zodanig dat het punt waarvoor de spanning wordt gevraagd samenvalt met het **middelpunt** van het diagram

4. Het aantal **M**-elementen dat binnen de plattegrond valt wordt bepaald; elementen die gedeeltelijk binnen vallen worden door schatting meegerekend

Voor elke diepte is een **afzonderlijke tekening van het bovenaanzicht** nodig

$$\Delta\sigma_z = (IV)\, q\, M$$

Aantal beschouwde elementen M

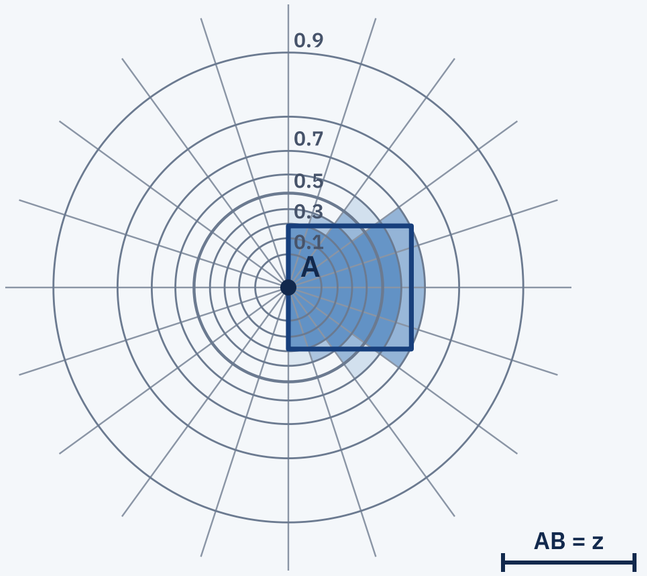
THEORIE

De module tekent voor de ingevoerde diepte: de bedekte elementen worden gearceerd naar **de delen die in bovenaanzicht overblijven**

Voor de telling wordt een **exacte waarde** gebruikt: de oplossing van Boussinesq wordt, zoals bij de cirkel, in poolcoördinaten ten opzichte van het punt **over de veelhoek geïntegreerd**, wat **M = (Δσ$_z$/q)/IV** oplevert. Dit is de waarde die een exacte telling zou geven

Het bovenaanzicht mag een willekeurige veelhoek met ten hoogste zes hoekpunten zijn

$$M = \frac{\Delta\sigma_z / q}{IV}$$



Opgave

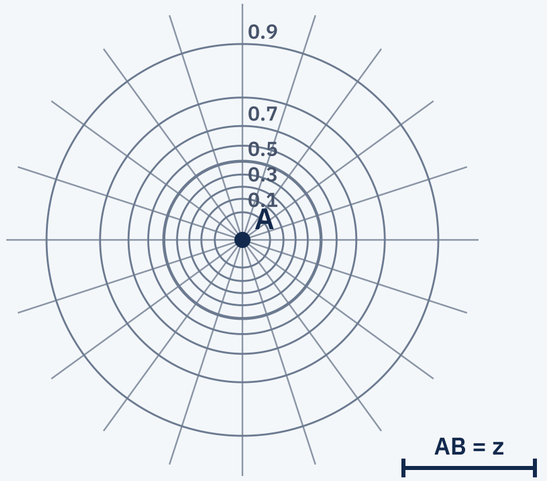
VOORBEELD

Gegeven

Spanningsverhoudingen	$\Delta\sigma_z/q = 0.1;\ 0.2 \ldots 0.9$ **(negen cirkels; de tiende ring loopt door tot oneindig)**
Sector	**20 gelijke radiale lamellen**

GEVRAAGD

De **R/z**-verhoudingen van de cirkels; het aantal elementen **N**, de invloedsfactor **IV**; het aantal elementen dat elke cirkel omvat.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Voor $\Delta\sigma_z/q = 0.3$

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.3)^{-2/3} - 1} = \sqrt{1.2684 - 1} = \sqrt{0.2684} = \mathbf{0.5181}$$

2 Voor $\Delta\sigma_z/q = 0.9$

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.9)^{-2/3} - 1} = \sqrt{4.6416 - 1} = \sqrt{3.6416} = \mathbf{1.9083}$$

De derde cirkel heeft een straal van **0.5181** maal z, de negende cirkel **1.9083** maal; de stralen groeien snel naarmate de spanningsverhouding toeneemt en gaan naar oneindig wanneer de verhouding 1 nadert.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

1 N = 10 ringen × 20 sectoren = 200 elementen

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = \mathbf{0.005} \qquad k.\ \text{cirkel}: \ 20\,k\ \text{element} \ \Rightarrow \ IV\,(20\,k) = 0.1\,k = \frac{\Delta\sigma_z}{q}$$

Cirkel	$\Delta\sigma_z/q$	R/z	Element dat het omvat	Totale invloed = IV × element
1	0.1	0.2698	20 (= 20 × 1)	0.10
2	0.2	0.4005	40 (= 20 × 2)	0.20
3	0.3	0.5181	60 (= 20 × 3)	0.30
4	0.4	0.6370	80 (= 20 × 4)	0.40
5	0.5	0.7664	100 (= 20 × 5)	0.50
6	0.6	0.9176	120 (= 20 × 6)	0.60
7	0.7	1.1097	140 (= 20 × 7)	0.70
8	0.8	1.3871	160 (= 20 × 8)	0.80
9	0.9	1.9083	180 (= 20 × 9)	0.90
10e ring	1.0	∞	200	1.00

Elke ring bestaat uit 20 elementen en draagt alleen **0.1 q** bij: het effect van de 20 k elementen binnen de k-de cirkel is gelijk aan $\Delta\sigma_z/q = 0.1\ k$ volgens de oplossing voor een cirkelvormige belasting.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

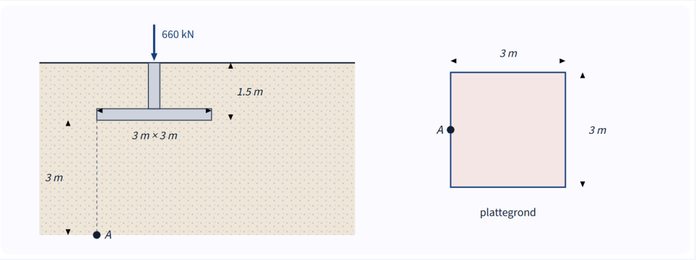
VOORBEELD

Gegeven

Fundering	3×3 **m, kolombelasting** 660 **kN** ($q = 660/(3 \times 3)$)
Punt A	$z = 3$ **m onder de fundering, onder het midden van één rand**
Diagram	$IV = 0.005$ **(10 ringen, 20 sectoren)**

GEVRAAGD

q, schaal in bovenaanzicht, **M**, **$\Delta\sigma_z$**; toetsing van M met de rechthoekige oplossing.



Oplossing (1/3)

OPLOSSING

1 Funderingsdruk

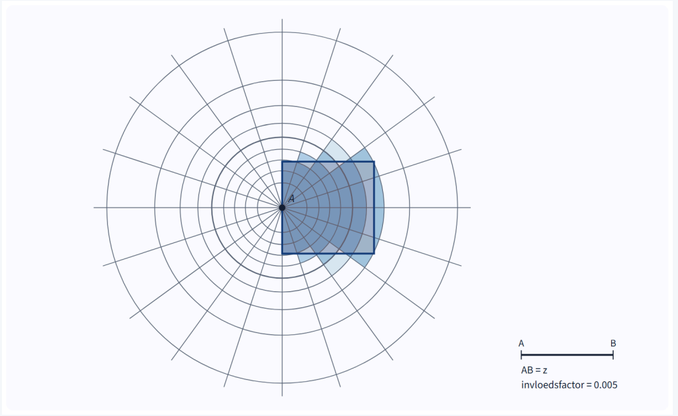
$$q = \frac{660}{3 \times 3} = \mathbf{73.33}\ \mathrm{kN/m^2}$$

2 Planschaal: AB = z = 3 m

$$\text{rand van de fundering} = \frac{3\ \mathrm{m}}{AB} = \frac{3}{3} = 1\ AB$$

3 Plaatsing: punt A wordt in het midden van het diagram geplaatst, zodanig dat de linkerrand van de fundering door het midden gaat

De fundering wordt getekend als een vierkant met zijde **AB**, waarbij het midden van de linkerzijde (A) in het middelpunt van het diagram wordt geplaatst (figuur rechts).



Oplossing (2/3)

OPLOSSING

4 A ligt in het midden van de rand: de fundering wordt verdeeld in twee rechthoeken met een hoek in A (1.5 m × 3 m)

$$m = \frac{1.5}{3} = 0.5\,, \quad n = \frac{3}{3} = 1\,, \quad m^2 = 0.25\,, \quad n^2 = 1\,, \quad \sqrt{m^2+n^2+1} = 1.50$$

5 Boussinesq-oplossing voor de hoek van een rechthoek $I_3(0.5; 1)$

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1} + \tan^{-1}\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+1-m^2n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1.5}{2.5}\cdot\frac{3.25}{2.25} + \tan^{-1}\frac{1.5}{2.0}\right] = \frac{0.8667+0.6435}{4\pi} = \mathbf{0.12018}$$

De invloedsfactor van de rechthoek van 1.5 m × 3 m met een hoek in A is **I_3 = 0.12018**; omdat de twee rechthoeken symmetrisch aan weerszijden van A liggen, is het totaal 2 I_3.

Oplossing (3/3)

OPLOSSING

6 Aantal elementen

$$M = \frac{\Delta\sigma_z/q}{IV} = \frac{2\,I_3}{IV} = \frac{2\,(0.12018)}{0.005} = \mathbf{48.07}$$

7 Spanningstoename

$$\Delta\sigma_z = (IV)\,q\,M = (0.005)\left(\frac{660}{3\times 3}\right)(48.07) = 0.005 \times 73.33 \times 48.07 = \mathbf{17.63}\ \mathrm{kN/m^2}$$

8 Rechtstreeks met de rechthoekige oplossing van Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = 2\,q\,I_3 = 2\,(73.33)(0.12018) = \mathbf{17.63}\ \mathrm{kN/m^2}$$

In punt A omvat het diagram **M = 48.07 elementen** (24.0% van het plan van 200 elementen): **$\Delta\sigma_z$ = 17.63 kN/m²** (24.0% van q); de module geeft dezelfde waarde.

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Bovenaanzicht	**Voorbeeld 2: fundering 3×3 m, A middelpunt van de linkerrand, $z = 3$ m ($AB = 3$ m)**
Opgaven	**aantal elementen per ring; totaal M; bijdrage van één element aan de spanning**

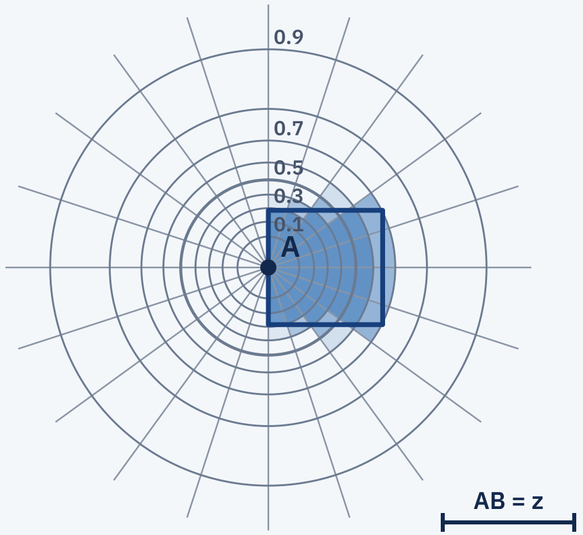
GEVRAAGD

Bedekte elementen per ring (van de 20 elementen) en het totaal; het effect van een fout in **één element** bij de telling.

Oplossing

OPLOSSING

Ring	bereik R/z	Afgedekt element	Element in de ring
1	0.000 – 0.270	**10.00**	20
2	0.270 – 0.400	**10.00**	20
3	0.400 – 0.518	**9.82**	20
4	0.518 – 0.637	**6.78**	20
5	0.637 – 0.766	**5.09**	20
6	0.766 – 0.918	**4.08**	20
7	0.918 – 1.110	**2.29**	20
8	1.110 – 1.387	**0.00**	20
9	1.387 – 1.908	**0.00**	20
10	1.908 – ∞	**0.00**	20
Totaal		**48.07**	200



De eerste twee ringen zijn halve cirkels (**10 + 10**): zijde A ligt op de rand. Totaal **M = 48.07**. Eén element = IV q = 0.37 kN/m²: een verschil van 1 element in de telling verandert $\Delta\sigma_z$ met 0.37 kN/m² (2.1%).

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

VOORBEELD

Gegeven

Fundering en punt	**De fundering uit Voorbeeld 2 en punt A ($q = 73.33$ kN/m²)**
Diepten	$z = 1.2;\ 2.4;\ 3.6 \ldots 12$ **m (profieltabel van de module)**

GEVRAAGD

De schaal van het bovenaanzicht op elke diepte, **M** en **$\Delta\sigma_z$**; met de hand voor z = 6 m.

Oplossing (1/2)

OPLOSSING

z (m)	Rand van de fundering (eenheid AB)	M (element)	$\Delta\sigma_z$ = IV q M (kN/m²)
1.2	2.500	87.03	**31.91**
2.4	1.250	59.27	**21.73**
3.6	0.833	39.16	**14.36**
4.8	0.625	26.72	**9.80**
6.0	0.500	19.01	**6.97**
7.2	0.417	14.07	**5.16**
8.4	0.357	10.76	**3.95**
9.6	0.312	8.47	**3.11**
10.8	0.278	6.82	**2.50**
12.0	0.250	5.61	**2.06**

Naarmate de diepte toeneemt, krimpt het plan naar het midden van het diagram (funderingrand 2.50 AB bij z = 1.2 m, 0.25 AB bij z = 12 m) en worden minder elementen bedekt: **M = 87.03 → 5.61**. Voor elke rij is het plan opnieuw getekend.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

1 Planschaal en m, n

$$AB = z = 6\ \text{m} \Rightarrow \text{rand van de fundering} = \frac{3}{6} = 0.5\,AB\ ; \quad m = \frac{1.5}{6} = 0.25\ , \quad n = \frac{3}{6} = 0.5$$

2 Aantal elementen en spanning

$$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753 \ \Rightarrow \ M = \frac{2\,(0.04753)}{0.005} = \mathbf{19.01}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 73.33 \times 19.01 = \mathbf{6.97}\ \text{kN/m}^2$$

Op z = 6 m is deze zeer klein ten opzichte van het midden van het funderingsdiagram en omvat slechts **19.01 elementen**; $\Delta\sigma_z$ = **6.97 kN/m²** (17.63 kN/m² op z = 3 m).

Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

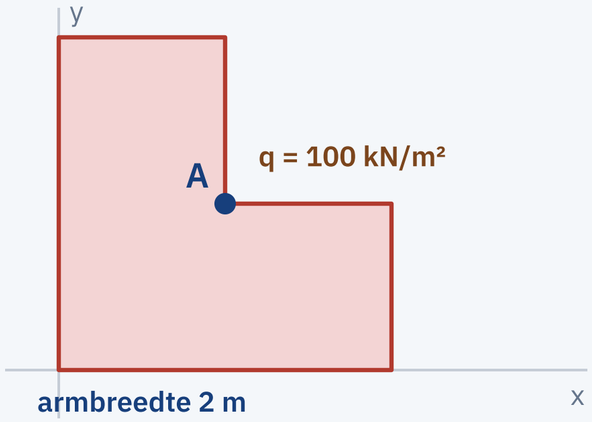
VOORBEELD

Gegeven

Oppervlak	**L-vormig (6 hoeken):** $(0;0),\ (4;0),\ (4;2),\ (2;2),\ (2;4),\ (0;4)$ **m;** $q = 100$ **kN/m²**
Punt A	**onder de inspringende hoek,** $(2;\ 2)$**;** $z = 2$ **m**
Tip	**Drie van de vier kwarten van 2 m × 2 m rond A zijn belast**

GEVRAAGD

M en $\Delta\sigma_z$; ringsgewijze sommatie.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Schaal van het bovenaanzicht en kwadranten

$$AB = z = 2\ \text{m} \Rightarrow \text{armbreedte} = 1\,AB\ ; \quad \text{elk kwart: } m = n = \frac{2}{2} = 1$$

2 Aantal elementen in één kwadrant en het totaal

$$I_3(1;1) = 0.17522 \ \Rightarrow\ M_{\text{kwadrant}} = \frac{0.17522}{0.005} = 35.04$$

$$M = 3\,M_{\text{kwadrant}} = 3\,(35.04) = \mathbf{105.13}$$

3 Spanning

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 100 \times 105.13 = \mathbf{52.57}\ \text{kN/m}^2 \qquad \big(= 3\,q\,I_3 = 3\,(100)(0.17522)\big)$$

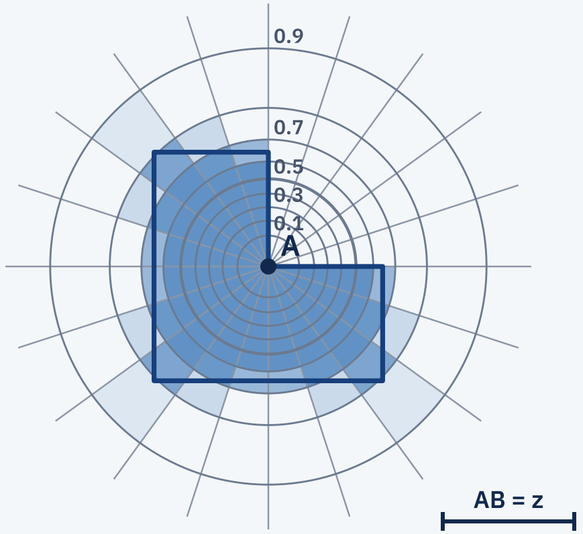
Onder de inspringende hoek omvat de L-vormige belasting **105.13 elementen**: drie van de vier kwadranten. Als alle vier kwadranten belast waren, zou M = 140.18 zijn.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

Ring	Afgedekt element	Element in de ring
1	**15.00**	20
2	**15.00**	20
3	**15.00**	20
4	**15.00**	20
5	**15.00**	20
6	**15.00**	20
7	**11.94**	20
8	**3.18**	20
9	**0.01**	20
10	**0.00**	20
Totaal	**105.13**	200

In ringen 1–6 worden **15 elementen** van elke ring (drie kwart van 20) meegerekend; in de buitenste ringen zijn alleen de hoeken van het plattegrondvlak effectief (ring 7: 11.94 elementen, ring 8: 3.18 elementen). Totaal **M = 105.13**.



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Opgave

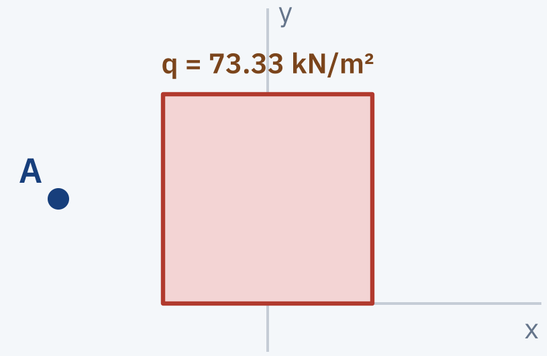
VOORBEELD

Gegeven

Bovenaanzicht en belasting	**De fundering van 3×3 m uit voorbeeld 2 ($q = 73.33$ kN/m²)**
Punt A	**buiten de fundering: $x = -3$ m, $y = 1.5$ m (1.5 m vanaf de linkerrand); $z = 3$ m**

GEVRAAGD

M en **$\Delta\sigma_z$**; de betekenis van het meetellen in een uitwendig punt.



Oplossing (1/2)

OPLOSSING

1 Afstanden van A tot de fundering (z = 3 m)

$$x:\ 1.5\ \text{met m}\ 4.5\ \text{m}\ ; \quad y:\ \pm 1.5\ \text{m}\ \Rightarrow\ m = \frac{1.5}{3} = 0.5\ \text{en}\ \frac{4.5}{3} = 1.5\ ,\ \ n = 0.5$$

2 Twee gearceerde rechthoeken (4.5 × 3 m minus 1.5 × 3 m), symmetrisch: tweemaal dat

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 2\left[I_3(1.5;0.5) - I_3(0.5;0.5)\right] = 2\left[0.13136 - 0.08403\right] = 0.09466$$

$$M = \frac{0.09466}{0.005} = \mathbf{18.93}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 73.33 \times 18.93 = \mathbf{6.94}\ \text{kN/m}^2$$

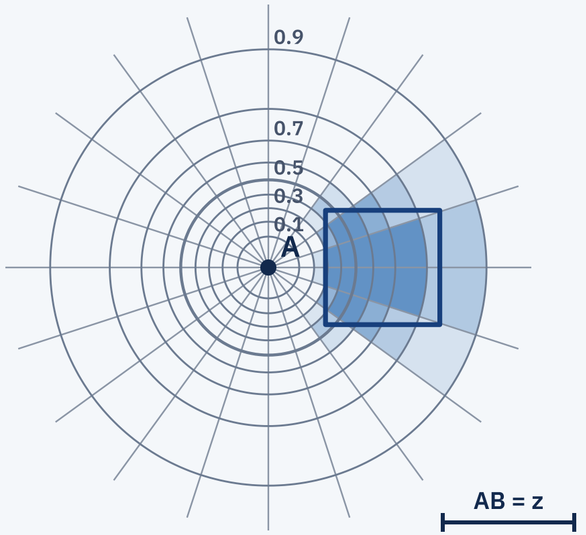
Ook een uitwendig punt ondervindt spanning: **element M = 18.93**, **$\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²**; het bovenaanzicht bedekt het middelpunt van het diagram niet.

Oplossing (2/2)

OPLOSSING

Ring	Afgedekt element	Element in de ring
1	**0.00**	20
2	**0.00**	20
3	**0.18**	20
4	**3.22**	20
5	**4.69**	20
6	**4.08**	20
7	**3.31**	20
8	**2.66**	20
9	**0.80**	20
10	**0.00**	20
Totaal	**18.93**	200

Het bovenaanzicht komt vanaf de 3e ring in het diagram en is het meest effectief bij de 5e ring (4.69 elementen). Totaal **M = 18.93**; voor dezelfde fundering onder het midden zou M = 67.22 zijn.



Controleer de oplossing in GeoTerva ↗

Samenvatting

Belangrijkste punten

Diagram: negen cirkels met straal $R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}$ en 20 radiale lijnen; **200 elementen**, de invloed van elk element is **IV = 1/N = 0.005**

Gebruik: plan AB = z op schaal, met punt A in het midden; aantal bedekte elementen M; **$\Delta\sigma_z$ = (IV) q M**; een afzonderlijk plan voor elke diepte

Voorbeeld (3 m × 3 m, 660 kN, z = 3 m, midden van de rand): q = 73.33 kN/m²; M = 48.07; $\Delta\sigma_z$ = **17.63 kN/m²**; bij z = 6 m is M = 19.01, $\Delta\sigma_z$ = 6.97 kN/m²

Elke vorm: L-vormige plattegrond, inspringende hoek (M = 105.13, $\Delta\sigma_z$ = 52.57 kN/m²); punt buiten het gebied (M = 18.93, $\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²)

Nauwkeurigheid: de invloed van één element is IV q = 0.37 kN/m²; de module geeft M met de exacte integraal (foutloze sommatie)

Literatuur

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Newmark, N.M. (1942). Influence charts for computation of stresses in elastic foundations. University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin No. 338.

OPMERKING

Alle rekenvoorbeelden zijn gegenereerd met de eigen berekeningsmotor van de module; de module geeft dezelfde waarden. Het openingsvoorbeeld van de module: fundering van 3 m × 3 m, 660 kN, 3 m onder het midden van rand A.

GeoTerva

Online geotechnische berekeningen

Van theorie naar praktijk

Voer uw eigen plattegrond (een veelhoek met ten hoogste zes hoekpunten), de belasting en punt A in GeoTerva in; de module tekent het diagram voor de ingevoerde diepte, arceert de afgedekte elementen en levert tegelijk M, de waarde $\Delta\sigma_z$, het diepteprofiel, de stapsgewijze oplossing en het rapport.

Module openen → **Theoriepagina →**

Openen op de smartphone
Proefmodules vereisen geen registratie.

Wilt u ze in uw colleges gebruiken: info@geoterva.com