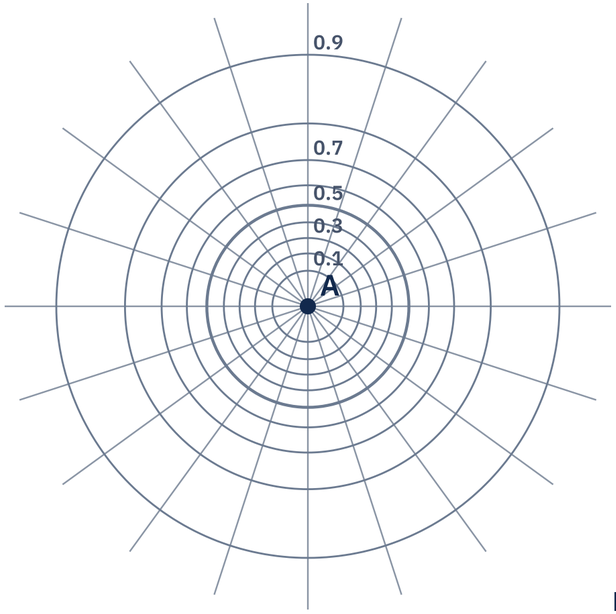
地盤工学の講義スライド・地盤内の応力

ニューマークの影響円

講義：ニューマークの影響円。載荷領域の平面図を影響円上に置き、覆われる要素数を数え、Δ σ_z = (IV) q M を求める。

- 等応力増分円
- 影響値 IV = 0.005
- 要素数
- 任意の平面形状
- 手計算可能



この講義で学ぶこと

図の作成方法：円形荷重の解から、半径**$R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}$**の円

10リング × 20セクター = 200要素：各要素の影響は同じであり、**IV = 1/N = 0.005**

使用方法：平面図を**AB = z**の縮尺で描き、点Aを影響円の中心に置き、**M**個の要素数を数える。**$\Delta\sigma_z = (IV)\,q\,M$**

リングごとに数え、手計算で**長方形の角点解**により検証すること。深さ、L字形の平面、領域外の点

各深さごとに平面図の**別個の作図**が必要であること

講義の流れ

各項目は**3つの手順**で扱う：

1 · **理論**：式とその根拠

2 · **問題**：与条件と求めるもの

3 · **解答**：数値を用いて手順ごとに

例題：3 m × 3 mの柱基礎、660 kN（q = 73.33 kN/m²）。点Aは基礎の3 m下、一辺の中点の下方にある。

等応力増分円

理論

等分布荷重を受ける円形載荷面の中心直下では$\Delta\sigma_z/q = 1 - 1/[(R/z)^2 + 1]^{3/2}$である。この関係を逆に解くと、選定した応力比を生じる円形載荷面の**半径**が求まる（両辺とも無次元である）。

$\Delta\sigma_z/q$ = 0.1、0.2 … 0.9に対してこれらの半径で描いた円は平面を**環**に分割する。各環を単独に載荷すると、中心直下の深さzで**0.1 q**の応力増分が生じる。最後の環（0.9と1.0の間）は無限遠まで広がる。

$$\frac{R}{z} = \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q}\right)^{-2/3} - 1}$$

$\Delta\sigma_z/q$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
R/z	0.0000	0.1865	0.2698	0.3383	0.4005	0.4598	0.5181	0.5768	0.6370	0.6998
$\Delta\sigma_z/q$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
R/z	0.7664	0.8384	0.9176	1.0067	1.1097	1.2328	1.3871	1.5944	1.9083	2.5235

200要素、影響値0.005

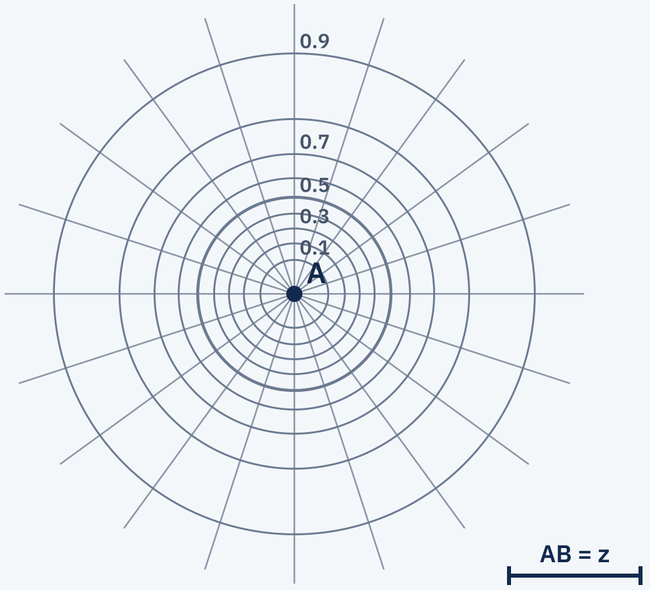
理論

Newmark (1942)は環を等間隔の**放射状の直線**で分割した。対称性により、同じ環内の各要素の影響は等しい。

要素の総数を**N**とすると、各載荷要素がその中心直下の応力に寄与する割合はqの**IV = 1/N**倍である：**影響値**。10本のリングと20のセクターではN = 200、IV = 0.005

各要素の影響は図中の位置に依存しないため、任意の形状の載荷面積は**要素を数えることにより**求められる

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = 0.005$$



$\Delta\,\sigma_z = (\mathrm{IV})\,q\,M$

理論

1. 応力を求める、載荷領域下の**深さz**を選ぶ

2. 載荷領域の平面図を、深さzが図の**単位長さAB**に等しくなる縮尺で描く。

3. 応力を求める点が図の**中心**に来るように、平面図を図上に配置する

4. 平面内に残る**M**要素の数を決定する；部分的に内部にある要素は推定によって考慮する

各深さごとに平面の**別個の図**が必要である

$$\Delta\sigma_z = (IV)\,q\,M$$

対象要素数 M

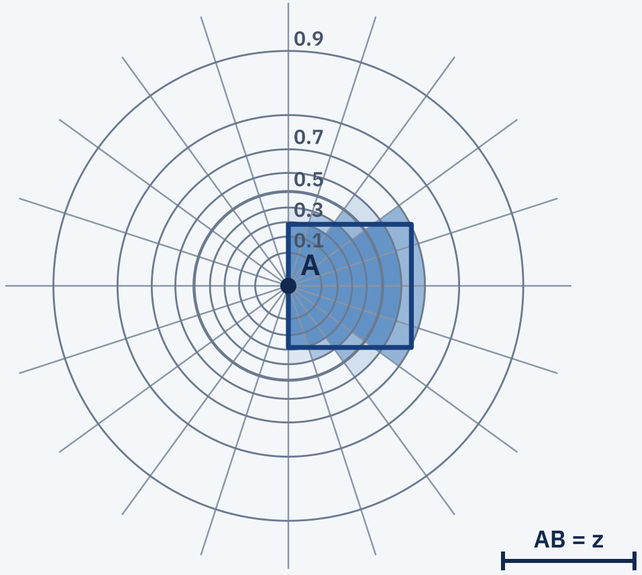
理論

モジュールは入力された深さについて作図する。覆われる要素は、平面内に残る**部分に応じて**網掛けされる

計数には**厳密値**を用いる：Boussinesq解は円形の場合と同様に、着目点に関する極座標で**多角形上で積分**され、**M = (Δ σ$_z$/q)/IV**が得られる。この値は、完全な計数が与える値である。

平面形状は最大6頂点の任意の多角形でよい

$$M = \frac{\Delta\sigma_z / q}{IV}$$



問題

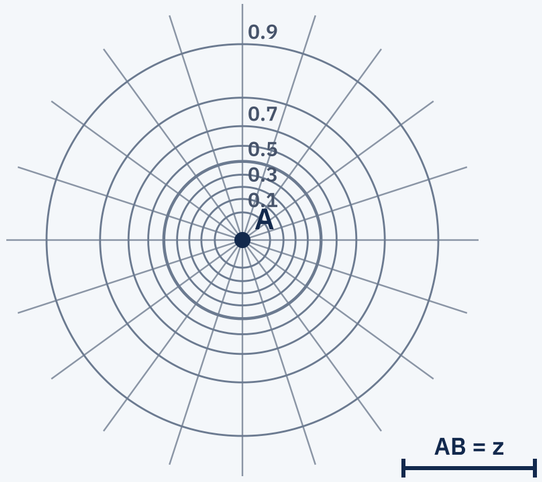
例題

求めるもの

円の**R/z**比。要素数**N**、影響値**IV**。各円が含む要素数。

与条件

応力比	$\Delta\sigma_z/q = 0.1;\ 0.2 \ldots 0.9$（**9個の円。10番目の環は無限遠に広がる**）
セクター	**20等分の放射状分割片**



解答 (1/2)

解答

1 $\Delta\sigma_z/q = 0.3$に対して

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.3)^{-2/3}-1} = \sqrt{1.2684-1} = \sqrt{0.2684} = \mathbf{0.5181}$$

2 $\Delta\sigma_z/q = 0.9$に対して

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.9)^{-2/3}-1} = \sqrt{4.6416-1} = \sqrt{3.6416} = \mathbf{1.9083}$$

第3の円はzの**0.5181**倍、第9の円は**1.9083**倍の半径をもつ；半径は応力比が増すと急激に大きくなり、比が1に近づくと無限大に発散する。

解答 (2/2)

解答

1 N = 10リング × 20セクター = 200要素

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = \mathbf{0.005} \qquad k.\text{円}:\ 20\,k\ \text{要素}\ \Rightarrow\ IV\,(20\,k) = 0.1\,k = \frac{\Delta\sigma_z}{q}$$

円形	Δ σz/q	R/z	対象となる要素	合計影響 = IV × 要素
1	0.1	0.2698	20 (= 20 × 1)	0.10
2	0.2	0.4005	40 (= 20 × 2)	0.20
3	0.3	0.5181	60 (= 20 × 3)	0.30
4	0.4	0.6370	80 (= 20 × 4)	0.40
5	0.5	0.7664	100 (= 20 × 5)	0.50
6	0.6	0.9176	120 (= 20 × 6)	0.60
7	0.7	1.1097	140 (= 20 × 7)	0.70
8	0.8	1.3871	160 (= 20 × 8)	0.80
9	0.9	1.9083	180 (= 20 × 9)	0.90
第10リング	1.0	∞	200	1.00

各リングは20要素からなり、単独で**0.1 q**の影響を与える：k番目の円内にある20k個の要素の影響は、円形荷重の解が与えるΔ σz/q = 0.1 kと同一である。

GeoTervaで解答を確認する ↗

例題2・柱基礎：3 m × 3 m、660 kN、辺Aの中点の3 m下方

問題

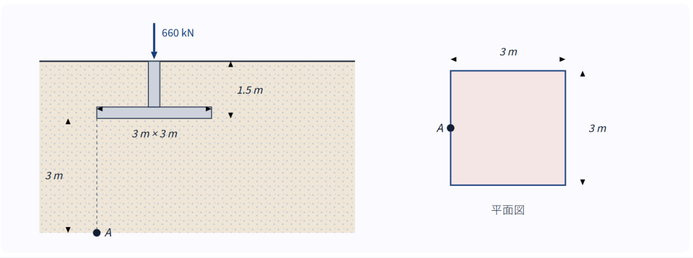
例題

与条件

基礎	**3×3 m、柱荷重 660 kN（$q = 660/(3 \times 3)$）**
点A	**基礎の下$z = 3$ m、一辺の中央の下**
図	**$IV = 0.005$（10リング、20セクター）**

求めるもの

q、平面スケール、**M**、**Δ σ_z**；矩形解によるMの照査。



解答 (1/3)

解答

1 基礎底面圧力

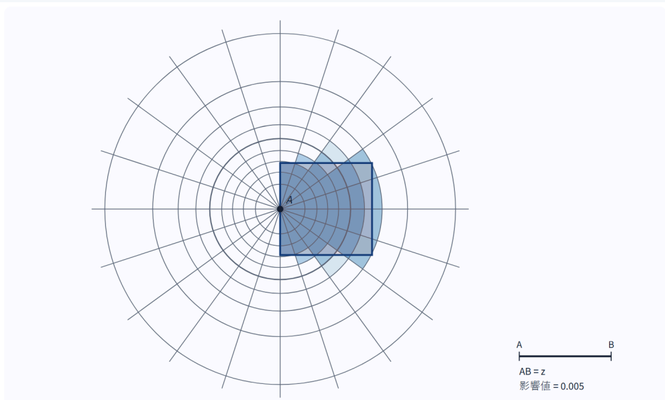
$$q = \frac{660}{3 \times 3} = \mathbf{73.33}\ \text{kN/m}^2$$

2 平面の縮尺：AB = z = 3 m

$$\text{基礎の縁} = \frac{3\ \text{m}}{AB} = \frac{3}{3} = 1\ AB$$

3 配置：点Aを図の中心に置き、基礎の左端が中心を通るようにする

基礎は辺の長さが**AB**の正方形として描かれ、その左辺の中点(A)が図の中心に置かれる（右図）。



解答 (2/3)

解答

4 Aは辺の中点にある：基礎をAに角を持つ2つの長方形に分割する（1.5 m × 3 m）

$$m = \frac{1.5}{3} = 0.5\,,\quad n = \frac{3}{3} = 1\,,\quad m^2 = 0.25\,,\quad n^2 = 1\,,\quad \sqrt{m^2+n^2+1} = 1.50$$

5 Boussinesqの長方形角点解 $I_3(0.5;\,1)$

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1} + \tan^{-1}\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+1-m^2n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1.5}{2.5}\cdot\frac{3.25}{2.25} + \tan^{-1}\frac{1.5}{2.0}\right] = \frac{0.8667 + 0.6435}{4\pi} = \mathbf{0.12018}$$

A に角を持つ 1.5 m × 3 m の長方形の影響値は**I_3 = 0.12018**；2 つの長方形は A の両側に対称であるため、合計は 2 I_3 となる。

解答 (3/3)

解答

6 要素数

$$M = \frac{\Delta\sigma_z/q}{IV} = \frac{2\,I_3}{IV} = \frac{2\,(0.12018)}{0.005} = \mathbf{48.07}$$

7 応力増分

$$\Delta\sigma_z = (IV)\,q\,M = (0.005)\left(\frac{660}{3\times 3}\right)(48.07) = 0.005 \times \mathbf{73.33} \times 48.07 = \mathbf{17.63}\ \text{kN/m}^2$$

8 Boussinesqの矩形解を直接用いて

$$\Delta\sigma_z = 2\,q\,I_3 = 2\,(73.33)(0.12018) = \mathbf{17.63}\ \text{kN/m}^2$$

点Aにおいて図は**M = 48.07要素**を覆う（200要素の平面の24.0%を占める）：**Δ σ_z = 17.63 kN/m²**（qの24.0%）。モジュールも同じ値を与える。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

例題

与条件

平面	**例題2：3×3 m基礎、Aは左辺の中点、$z = 3$ m（$AB = 3$ m）**
問題	**各リングで覆われる要素数；合計M；一要素の応力への寄与**

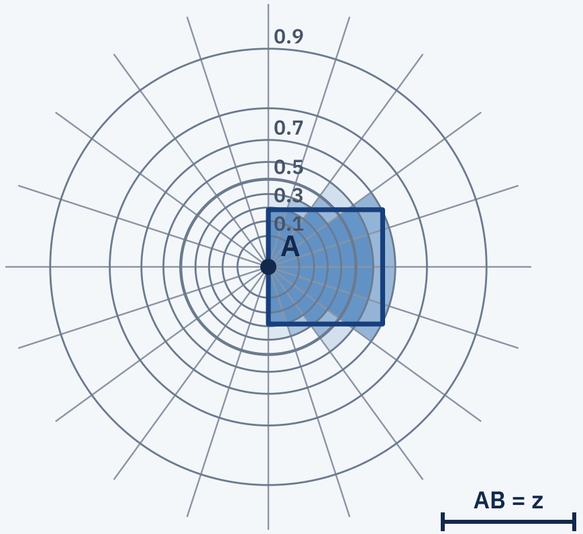
求めるもの

リングごとの**対象要素数**（20要素中）と合計；計数における**1要素**の誤差の影響。

解答

解答

円環	R/z の範囲	対象要素	リング内の要素
1	0.000 – 0.270	**10.00**	20
2	0.270 – 0.400	**10.00**	20
3	0.400 – 0.518	**9.82**	20
4	0.518 – 0.637	**6.78**	20
5	0.637 – 0.766	**5.09**	20
6	0.766 – 0.918	**4.08**	20
7	0.918 – 1.110	**2.29**	20
8	1.110 – 1.387	**0.00**	20
9	1.387 – 1.908	**0.00**	20
10	1.908 – ∞	**0.00**	20
合計		**48.07**	200



最初の2つのリングは半円である（**10 + 10**）：辺Aは境界上にある。合計**M = 48.07**。1要素 = IV q = 0.37 kN/m²：数え上げで1要素違えば、Δ σ_zは0.37 kN/m²（2.1%）変化する。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

例題

与条件

基礎と点	**例題2の基礎と点A（$q = 73.33$ kN/m²）**
深さ	**$z = 1.2;\ 2.4;\ 3.6 \ldots 12$ m（モジュールの土層表）**

求めるもの

各深さにおける平面の縮尺、**M**および **Δ σ z**；z = 6 mについては手計算による。

解答 (1/2)

解答

z (m)	基礎辺（AB単位）	M（要素）	Δ σ_z = IV q M (kN/m²)
1.2	2.500	87.03	**31.91**
2.4	1.250	59.27	**21.73**
3.6	0.833	39.16	**14.36**
4.8	0.625	26.72	**9.80**
6.0	0.500	19.01	**6.97**
7.2	0.417	14.07	**5.16**
8.4	0.357	10.76	**3.95**
9.6	0.312	8.47	**3.11**
10.8	0.278	6.82	**2.50**
12.0	0.250	5.61	**2.06**

深さが増すにつれ平面図は中心に向かって縮小し（z = 1.2 mで基礎辺2.50 AB、z = 12 mで0.25 AB）、覆う要素数も減少する：**M = 87.03 → 5.61**。各段について平面図を描き直した。

解答 (2/2)

解答

1 平面の縮尺とm、n

$$AB = z = 6\ \text{m} \Rightarrow \text{基礎の縁} = \frac{3}{6} = 0.5\,AB\,; \quad m = \frac{1.5}{6} = 0.25\,,\ n = \frac{3}{6} = 0.5$$

2 要素数と応力

$$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753 \ \Rightarrow\ M = \frac{2\,(0.04753)}{0.005} = \mathbf{19.01}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 73.33 \times 19.01 = \mathbf{6.97}\ \text{kN/m}^2$$

z = 6 mでは基礎の図の中心に対して非常に小さく、わずか**19.01要素**しか含まない；Δ σ_z = **6.97 kN/m²**（z = 3 mでは17.63 kN/m²）。

GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

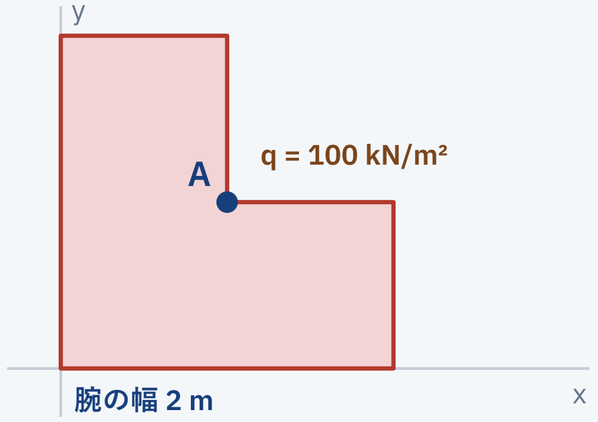
例題

与条件

面積	**L形（6隅角）：** $(0;0),\ (4;0),\ (4;2),\ (2;2),\ (2;4),\ (0;4)$ **m、$q = 100$ kN/m²**
点A	**凹角の下、$(2;\ 2)$；$z = 2$ m**
ヒント	**Aの周囲の2 m × 2 mの四つの四分の一のうち三つが載荷されている**

求めるもの

Mと $\Delta\sigma_z$；リングごとの重ね合わせ。



解答 (1/2)

解答

1 平面の縮尺と象限

$$AB = z = 2\ \text{m} \Rightarrow \text{腕の幅} = 1\,AB\,; \quad \text{各四分円：}\ m = n = \frac{2}{2} = 1$$

2 1象限の要素数と合計

$$I_3(1;1) = 0.17522 \ \Rightarrow\ M_{\text{象限}} = \frac{0.17522}{0.005} = 35.04$$

$$M = 3\,M_{\text{象限}} = 3\,(35.04) = \mathbf{105.13}$$

3 応力

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 100 \times 105.13 = \mathbf{52.57}\ \text{kN/m}^2 \qquad \big(= 3\,q\,I_3 = 3\,(100)(0.17522)\big)$$

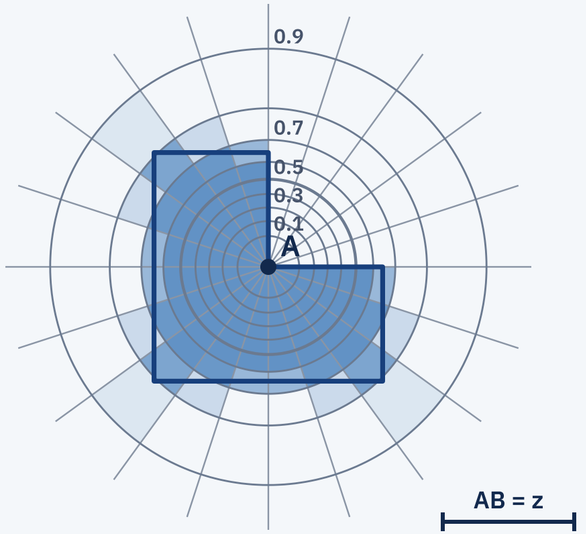
入隅の下方でL字形の荷重は**105.13要素**を覆う。すなわち4つの象限のうち3つである。4つの象限すべてが載荷されていれば、Mは140.18となる。

解答 (2/2)

解答

円環	対象要素	リング内の要素
1	**15.00**	20
2	**15.00**	20
3	**15.00**	20
4	**15.00**	20
5	**15.00**	20
6	**15.00**	20
7	**11.94**	20
8	**3.18**	20
9	**0.01**	20
10	**0.00**	20
合計	**105.13**	200

リング1〜6では各リングの**15要素**（20の4分の3）が対象となる。外側のリングでは平面の角のみが有効である（7番目のリングは11.94要素、8番目のリングは3.18要素）。合計**M = 105.13**。



GeoTervaで解答を確認する ↗

問題

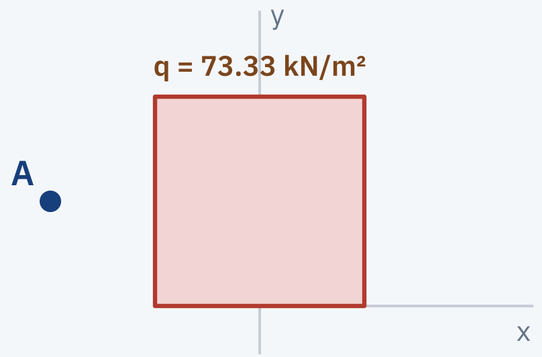
例題

与条件

平面と荷重	**例題2の3×3 m基礎（$q = 73.33$ kN/m²）**
点A	**基礎の外側：$x = -3$ m, $y = 1.5$ m（左端から1.5 mの位置）；$z = 3$ m**

求めるもの

Mおよび**Δ σ_z**、外側点における計数の意味。



解答 (1/2)

解答

1 Aから基礎までの距離（z = 3 m）

$$x:\ 1.5\ \text{m}\text{で}\ 4.5\ \text{m}\ ;\quad y:\ \pm 1.5\ \text{m}\ \Rightarrow\ m = \frac{1.5}{3} = 0.5\ \text{および}\ \frac{4.5}{3} = 1.5\ ,\ \ n = 0.5$$

2 斜線を施した二つの長方形（4.5 × 3 m から 1.5 × 3 m を除く）、対称：その2倍

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 2\left[I_3(1.5;0.5) - I_3(0.5;0.5)\right] = 2\left[0.13136 - 0.08403\right] = 0.09466$$

$$M = \frac{0.09466}{0.005} = \mathbf{18.93}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 73.33 \times 18.93 = \mathbf{6.94}\ \text{kN/m}^2$$

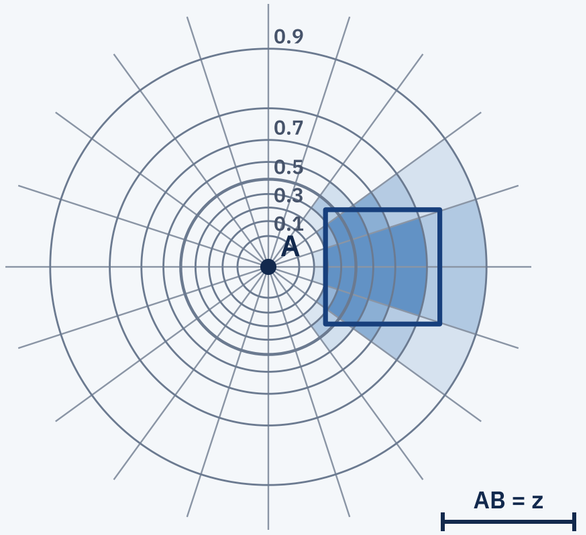
外力点も応力を受ける：**要素M = 18.93**、**Δ σ z = 6.94 kN/m²**。平面図は影響円の中心を覆わない。

解答 (2/2)

解答

円環	対象要素	リング内の要素
1	**0.00**	20
2	**0.00**	20
3	**0.18**	20
4	**3.22**	20
5	**4.69**	20
6	**4.08**	20
7	**3.31**	20
8	**2.66**	20
9	**0.80**	20
10	**0.00**	20
合計	**18.93**	200

平面形状は第3リングから図に入り、第5リング（4.69要素）で最も効果的となる。合計**M = 18.93**；同じ基礎の中心直下ではM = 67.22となる。



GeoTervaで解答を確認する ↗

まとめ

ポイントのまとめ

影響円：$R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}$の半径をもつ9個の円と20本の放射線；**200要素**、各要素の影響は**IV = 1/N = 0.005**

用法：平面AB = zを縮尺どおりに描き、点Aを中央に置く。含まれる要素数M、**$\Delta\sigma_z$ = (IV) q M**。深さごとに別の平面図を用いる

例題（3 m × 3 m、660 kN、z = 3 m、辺中央）：q = 73.33 kN/m²；M = 48.07；$\Delta\sigma_z$ = **17.63 kN/m²**；z = 6 mではM = 19.01、$\Delta\sigma_z$ = 6.97 kN/m²

すべての形状：L字型平面、入り隅の角（M = 105.13、$\Delta\sigma_z$ = 52.57 kN/m²）；領域外の点（M = 18.93、$\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²）

精度：1要素の寄与はIV q = 0.37 kN/m²。モジュールはMを厳密積分で与える（誤差のない数え上げ）。

参考文献

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Newmark, N.M. (1942). Influence charts for computation of stresses in elastic foundations. University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin No. 338.

注記

数値例はすべてモジュール自身の計算エンジンで生成しており、モジュールも同じ値を与える。モジュールの冒頭例：3 m × 3 m 基礎、660 kN、辺Aの中点の3 m下方。

GeoTerva

オンライン地盤工学計算

理論から実務へ

GeoTervaに独自の平面形状（最大6頂点の多角形）、荷重、点Aを入力する。モジュールは入力した深さに対する図を描画し、覆われる要素を網掛け表示し、M、$\Delta\sigma_z$の値、深さ方向の分布、手順ごとの解答、レポートをまとめて出力する。

スマートフォンで開く
お試しモジュールは登録不要です。

モジュールを開く →

理論ページ →

講義で使用したい場合：info@geoterva.com