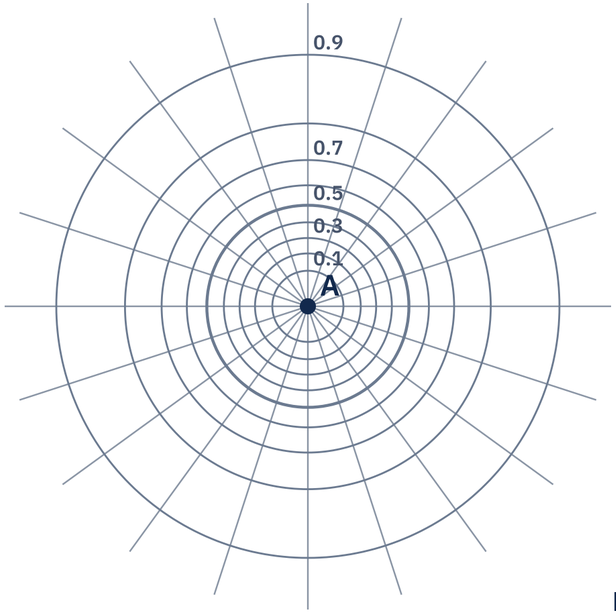
Presentazione della lezione di geotecnica · Tensioni nel mezzo terreno

Abaco di Newmark

Lezione: abaco di influenza di Newmark; si sovrappone la pianta dell'area caricata all'abaco, si contano gli elementi coperti e si ottiene $\Delta\sigma_z$ = (IV) q M.

- Anelli di uguale incremento di tensione
- Valore di influenza IV = 0.005
- Conteggio degli elementi
- Qualsiasi pianta
- Risolvibile a mano



Introduzione

Che cosa si impara in questa lezione?

Come è costruito il diagramma: dalla soluzione del carico circolare, cerchi di raggio $\mathbf{R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}}$

10 anelli × 20 settori = 200 elementi: ogni elemento ha lo stesso effetto, **IV = 1/N = 0.005**

Uso: la pianta si disegna in scala **AB = z**, il punto A si pone al centro dell'abaco, si contano gli elementi **M**; $\mathbf{\Delta\sigma_z = (IV)\ q\ M}$

La verifica del conteggio anello per anello a mano con la **soluzione d'angolo rettangolare**; profondità, pianta a L e punto esterno all'area

Che per ogni profondità è necessario **un disegno separato** della pianta

SVOLGIMENTO DELLA LEZIONE

Ogni argomento è trattato in **tre passaggi**:

1 · **Teoria**: formula e relativa motivazione

2 · **Traccia**: dati e richiesto

3 · **Soluzione**: passo per passo, con i numeri

Esempio: fondazione di colonna 3 m × 3 m, 660 kN (q = 73.33 kN/m²); il punto A si trova 3 m sotto la fondazione, in corrispondenza del punto medio di un lato.

Cerchi di uguale incremento di tensione

TEORIA

Sotto il centro di un'area circolare uniformemente caricata, $\Delta\sigma_z/q = 1 - 1/[(R/z)^2 + 1]^{3/2}$. Invertendo la relazione si ottiene il **raggio** dell'area circolare che produce un rapporto di tensione prefissato (entrambi i membri sono adimensionali).

Per $\Delta\sigma_z/q$ = 0.1, 0.2 … 0.9 i cerchi tracciati con questi raggi dividono il piano in **anelli**. Ciascun anello, caricato da solo, produce un incremento di tensione pari a **0.1 q** alla profondità z sotto il centro; l'ultimo anello (tra 0.9 e 1.0) si estende all'infinito

$$\frac{R}{z} = \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q}\right)^{-2/3} - 1}$$

$\Delta\sigma_z/q$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
R/z	0.0000	0.1865	0.2698	0.3383	0.4005	0.4598	0.5181	0.5768	0.6370	0.6998
$\Delta\sigma_z/q$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
R/z	0.7664	0.8384	0.9176	1.0067	1.1097	1.2328	1.3871	1.5944	1.9083	2.5235

200 elementi, valore di influenza 0.005

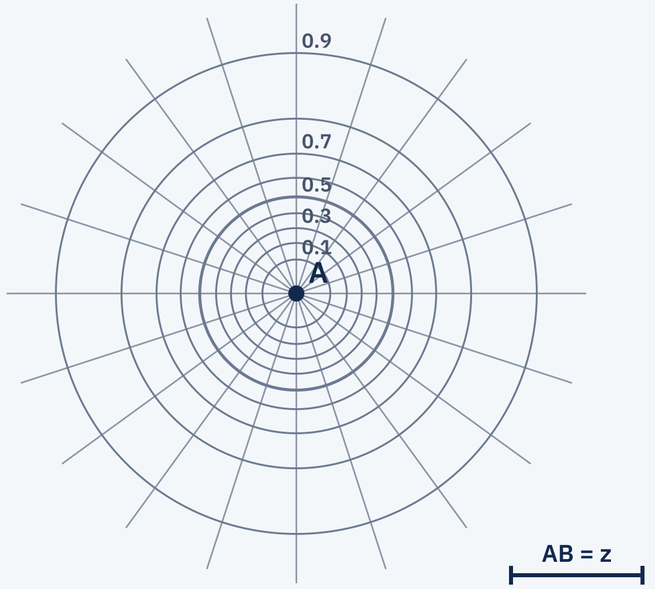
TEORIA

Newmark (1942) suddivise gli anelli con **rette radiali** equidistanti. Per simmetria, ogni elemento dello stesso anello ha lo stesso effetto

Se il numero totale di elementi è **N**, il contributo di ciascun elemento caricato alla tensione sotto il suo centro è **IV = 1/N** volte q: il **valore di influenza**. Per 10 anelli e 20 settori, N = 200, IV = 0.005

Poiché l'effetto di ogni elemento è indipendente dalla sua posizione nell'abaco, un'area caricata di qualsiasi forma può essere misurata **contando gli elementi**

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = 0.005$$



$\Delta\sigma_z = (IV)\, q\, M$

TEORIA

1. Si sceglie la **profondità z** al di sotto dell'area caricata alla quale si richiede la tensione

2. La pianta dell'area caricata è disegnata in una scala tale che la profondità z sia pari alla **lunghezza unitaria AB** del diagramma

3. La pianta è sovrapposta all'abaco in modo che il punto di cui si richiede la tensione coincida con il **centro** dell'abaco

4. Si determina il numero di elementi **M** che ricadono nella pianta; gli elementi parzialmente interni sono considerati per stima

Per ogni profondità è necessario un **disegno separato della pianta**

$$\Delta\sigma_z = (IV)\, q\, M$$

Numero di elementi coperti M

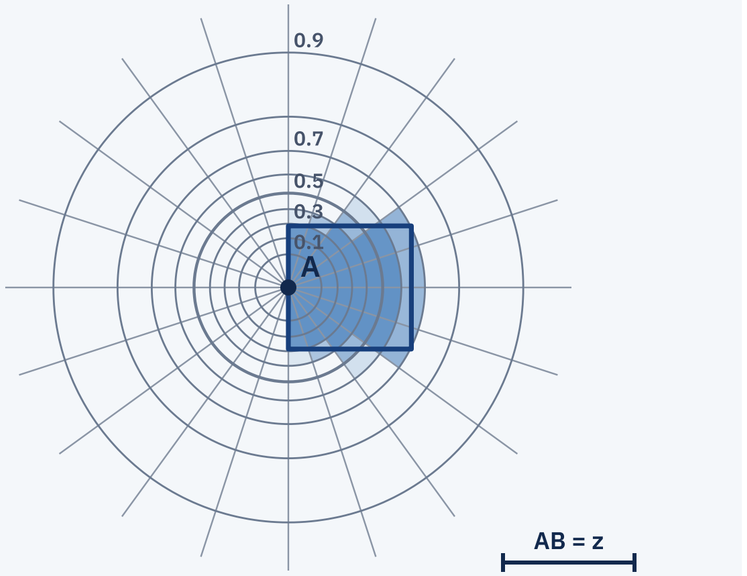
TEORIA

Il modulo esegue il disegno per la profondità inserita: gli elementi coperti sono ombreggiati in base alle **parti che rimangono in pianta**

Per il conteggio si utilizza un **valore esatto**: la soluzione di Boussinesq, come per il cerchio, viene **integrata sul poligono** in coordinate polari rispetto al punto, ottenendo **M = (Δσ$_z$/q)/IV**. Questo è il valore che fornirebbe un conteggio esatto

In pianta la forma può essere un qualsiasi poligono con al massimo sei vertici

$$M = \frac{\Delta\sigma_z / q}{IV}$$



Traccia

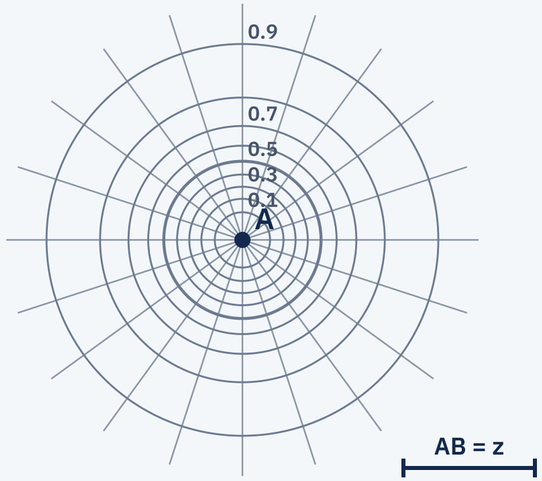
ESEMPIO

Dati

Rapporti di tensione	$\Delta\sigma_z/q = 0.1;\ 0.2 \ldots 0.9$ **(nove cerchi; il decimo anello si estende all'infinito)**
Settore	**20 spicchi radiali uguali**

RICHIESTO

I rapporti **R/z** dei cerchi; il numero di elementi **N**, il valore di influenza **IV**; il numero di elementi coperti da ciascun cerchio.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Per $\Delta\sigma_z/q = 0.3$

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.3)^{-2/3} - 1} = \sqrt{1.2684 - 1} = \sqrt{0.2684} = \mathbf{0.5181}$$

2 Per $\Delta\sigma_z/q = 0.9$

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.9)^{-2/3} - 1} = \sqrt{4.6416 - 1} = \sqrt{3.6416} = \mathbf{1.9083}$$

Il terzo cerchio ha raggio pari a **0.5181** volte z, il nono cerchio a **1.9083** volte; i raggi crescono rapidamente al crescere del rapporto di tensione e tendono all'infinito quando il rapporto tende a 1.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

1 N = 10 anelli × 20 settori = 200 elementi

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = \mathbf{0.005} \qquad k.\ \text{cerchio}: \ 20\,k\ \text{elemento} \ \Rightarrow \ IV\,(20\,k) = 0.1\,k = \frac{\Delta\sigma_z}{q}$$

Cerchio	$\Delta\sigma_z/q$	R/z	Elemento che ricopre	Influenza totale = IV × elemento
1	0.1	0.2698	20 (= 20 × 1)	0.10
2	0.2	0.4005	40 (= 20 × 2)	0.20
3	0.3	0.5181	60 (= 20 × 3)	0.30
4	0.4	0.6370	80 (= 20 × 4)	0.40
5	0.5	0.7664	100 (= 20 × 5)	0.50
6	0.6	0.9176	120 (= 20 × 6)	0.60
7	0.7	1.1097	140 (= 20 × 7)	0.70
8	0.8	1.3871	160 (= 20 × 8)	0.80
9	0.9	1.9083	180 (= 20 × 9)	0.90
10ª corona	1.0	∞	200	1.00

Ogni anello è costituito da 20 elementi e da solo produce un effetto pari a **0.1 q**: l'effetto dei 20 k elementi all'interno del k-esimo cerchio è lo stesso di $\Delta\sigma_z/q = 0.1\ k$ fornito dalla soluzione del carico circolare.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

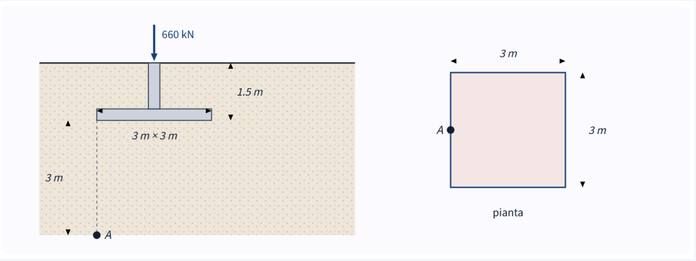
ESEMPIO

Dati

Fondazione	3×3 **m, carico di colonna** 660 **kN** ($q = 660/(3 \times 3)$)
Punto A	$z = 3$ **m sotto la fondazione, sotto il punto medio di un bordo**
Diagramma	$IV = 0.005$ **(10 anelli, 20 settori)**

RICHIESTO

q, scala in pianta, **M**, **$\Delta\sigma_z$**; verifica di M con la soluzione per area rettangolare.



Soluzione (1/3)

SOLUZIONE

1 Pressione della fondazione

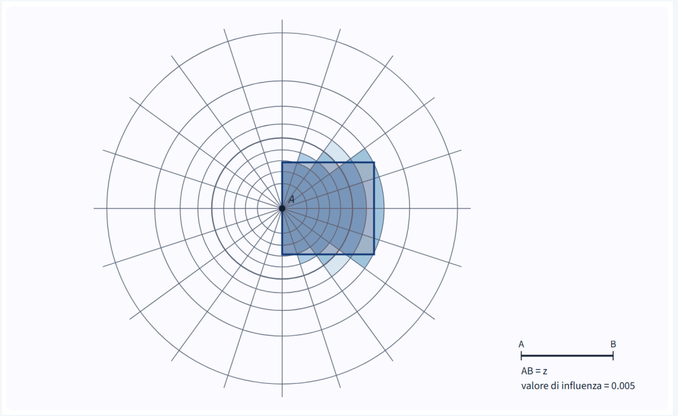
$$q = \frac{660}{3 \times 3} = \mathbf{73.33}\ \mathrm{kN/m^2}$$

2 Scala in pianta: AB = z = 3 m

$$\text{bordo della fondazione} = \frac{3\ \mathrm{m}}{AB} = \frac{3}{3} = 1\ AB$$

3 Posizionamento: il punto A è posto al centro del diagramma in modo che il bordo sinistro della fondazione passi per il centro

La fondazione è disegnata come un quadrato di lato pari alla lunghezza **AB** e il punto medio del suo lato sinistro (A) è posto al centro del diagramma (figura a destra).



Soluzione (2/3)

SOLUZIONE

4 A si trova al centro del lato: la fondazione è suddivisa in due rettangoli con un vertice in A (1.5 m × 3 m)

$$m = \frac{1.5}{3} = 0.5\,, \quad n = \frac{3}{3} = 1\,, \quad m^2 = 0.25\,, \quad n^2 = 1\,, \quad \sqrt{m^2+n^2+1} = 1.50$$

5 Soluzione di Boussinesq per lo spigolo del rettangolo $I_3(0.5;\,1)$

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1} + \tan^{-1}\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+1-m^2n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1.5}{2.5}\cdot\frac{3.25}{2.25} + \tan^{-1}\frac{1.5}{2.0}\right] = \frac{0.8667+0.6435}{4\pi} = \mathbf{0.12018}$$

Il valore di influenza del rettangolo 1.5 m × 3 m con un vertice in A è **I_3 = 0.12018**; poiché i due rettangoli sono simmetrici ai due lati di A, il totale è 2 I_3.

Soluzione (3/3)

SOLUZIONE

6 Numero di elementi

$$M = \frac{\Delta\sigma_z/q}{IV} = \frac{2\,I_3}{IV} = \frac{2\,(0.12018)}{0.005} = \mathbf{48.07}$$

7 Incremento di tensione

$$\Delta\sigma_z = (IV)\,q\,M = (0.005)\left(\frac{660}{3\times 3}\right)(48.07) = 0.005 \times 73.33 \times 48.07 = \mathbf{17.63}\ \mathrm{kN/m^2}$$

8 Direttamente con la soluzione rettangolare di Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = 2\,q\,I_3 = 2\,(73.33)(0.12018) = \mathbf{17.63}\ \mathrm{kN/m^2}$$

Nel punto A il diagramma copre **M = 48.07 elementi** (il 24.0% della pianta di 200 elementi): **$\Delta\sigma_z$ = 17.63 kN/m²** (il 24.0% di q); il modulo restituisce lo stesso valore.

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

ESEMPIO

Dati

Pianta	**Esempio 2: fondazione 3×3 m, A punto medio del bordo sinistro, $z = 3$ m ($AB = 3$ m)**
Tracce	**numero di elementi compresi in ciascun anello; totale M; contributo di un elemento alla tensione**

RICHIESTO

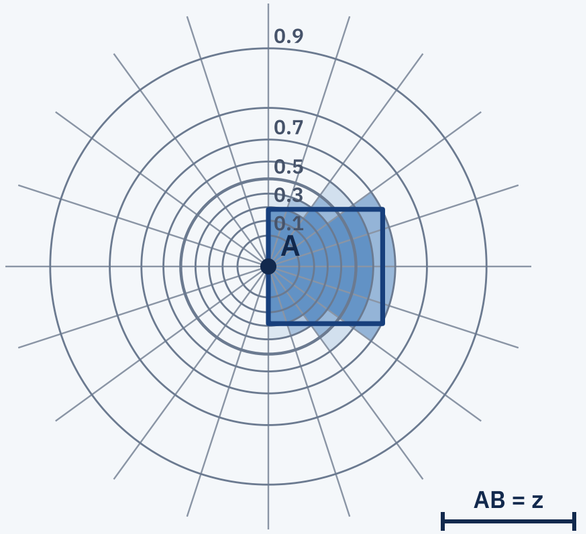
Elementi coperti per anello (su 20 elementi) e totale; l'effetto di un errore su **un singolo elemento** nel conteggio.

Soluzione

SOLUZIONE

Anello	Intervallo R/z	Elemento coperto	Elemento nell'anello
1	0.000 – 0.270	**10.00**	20
2	0.270 – 0.400	**10.00**	20
3	0.400 – 0.518	**9.82**	20
4	0.518 – 0.637	**6.78**	20
5	0.637 – 0.766	**5.09**	20
6	0.766 – 0.918	**4.08**	20
7	0.918 – 1.110	**2.29**	20
8	1.110 – 1.387	**0.00**	20
9	1.387 – 1.908	**0.00**	20
10	1.908 – ∞	**0.00**	20
Totale		**48.07**	200

I primi due anelli sono semicerchi (**10 + 10**): il lato A giace sul bordo. Totale **M = 48.07**. Un elemento = IV q = 0.37 kN/m²: una differenza di 1 elemento nel conteggio modifica $\Delta\sigma_z$ di 0.37 kN/m² (2.1%).



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

ESEMPIO

Dati

Fondazione e punto	**La fondazione dell'Esempio 2 e il punto A ($q = 73.33$ kN/m²)**
Profondità	$z = 1.2;\ 2.4;\ 3.6 \ldots 12$ **m (tabella del profilo del modulo)**

RICHIESTO

La scala della pianta a ciascuna profondità, **M** e **$\Delta\sigma_z$**; a mano per z = 6 m.

Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

z (m)	Bordo della fondazione (unità AB)	M (elemento)	$\Delta\sigma_z$ = IV q M (kN/m²)
1.2	2.500	87.03	**31.91**
2.4	1.250	59.27	**21.73**
3.6	0.833	39.16	**14.36**
4.8	0.625	26.72	**9.80**
6.0	0.500	19.01	**6.97**
7.2	0.417	14.07	**5.16**
8.4	0.357	10.76	**3.95**
9.6	0.312	8.47	**3.11**
10.8	0.278	6.82	**2.50**
12.0	0.250	5.61	**2.06**

All'aumentare della profondità il diagramma in pianta si riduce verso il centro (bordo della fondazione 2.50 AB a z = 1.2 m, 0.25 AB a z = 12 m) e copre meno elementi: **M = 87.03 → 5.61**. La pianta è stata ridisegnata per ogni riga.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

1 Scala in pianta e m, n

$$AB = z = 6\ \text{m} \Rightarrow \text{bordo della fondazione} = \frac{3}{6} = 0.5\,AB\ ; \quad m = \frac{1.5}{6} = 0.25\ , \quad n = \frac{3}{6} = 0.5$$

2 Numero di elementi e tensione

$$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753 \ \Rightarrow \ M = \frac{2\,(0.04753)}{0.005} = \mathbf{19.01}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 73.33 \times 19.01 = \mathbf{6.97}\ \text{kN/m}^2$$

A z = 6 m è molto piccola rispetto al centro del diagramma della fondazione e copre solo **19.01 elementi**; $\Delta\sigma_z$ = **6.97 kN/m²** (17.63 kN/m² per z = 3 m).

Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

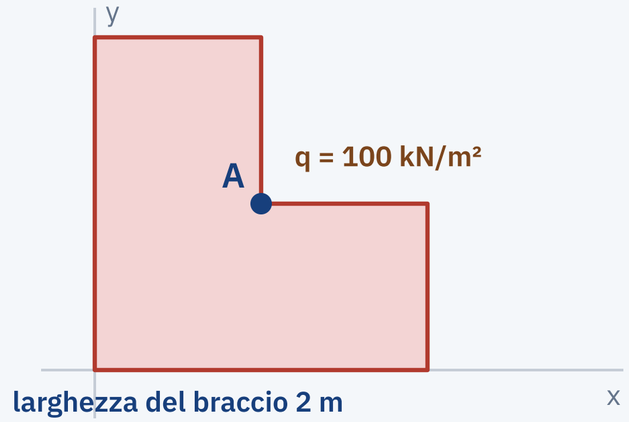
ESEMPIO

Dati

Area	**A forma di L (6 spigoli):** $(0;0),\ (4;0),\ (4;2),\ (2;2),\ (2;4),\ (0;4)$ **m;** $q = 100$ **kN/m²**
Punto A	**sotto lo spigolo rientrante,** $(2;\ 2)$**;** $z = 2$ **m**
Suggerimento	**Tre dei quattro quarti di 2 m × 2 m attorno ad A sono caricati**

RICHIESTO

M e **$\Delta\sigma_z$**; somma per anelli successivi.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Scala della pianta e quadranti

$$AB = z = 2\ \text{m} \Rightarrow \text{larghezza del braccio} = 1\,AB\ ; \quad \text{ogni quarto: } m = n = \frac{2}{2} = 1$$

2 Numero di elementi di un quadrante e totale

$$I_3(1;1) = 0.17522 \ \Rightarrow\ M_{\text{quarto}} = \frac{0.17522}{0.005} = 35.04$$

$$M = 3\,M_{\text{quarto}} = 3\,(35.04) = \mathbf{105.13}$$

3 Tensione

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 100 \times 105.13 = \mathbf{52.57}\ \text{kN/m}^2 \qquad \big(= 3\,q\,I_3 = 3\,(100)(0.17522)\big)$$

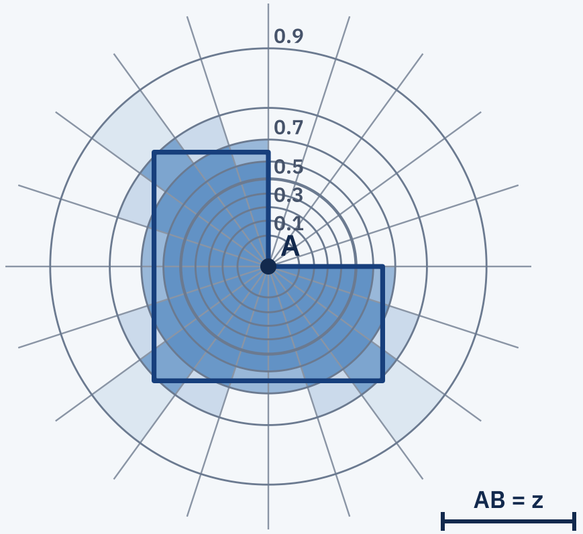
Sotto lo spigolo rientrante il carico a L comprende **105.13 elementi**: tre dei quattro quadranti. Se tutti e quattro i quadranti fossero caricati, M sarebbe 140.18.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

Anello	Elemento coperto	Elemento nell'anello
1	**15.00**	20
2	**15.00**	20
3	**15.00**	20
4	**15.00**	20
5	**15.00**	20
6	**15.00**	20
7	**11.94**	20
8	**3.18**	20
9	**0.01**	20
10	**0.00**	20
Totale	**105.13**	200

Negli anelli 1–6 sono coperti **15 elementi** per ciascun anello (tre quarti di 20); negli anelli esterni risultano efficaci solo gli spigoli della pianta (anello 7: 11.94 elementi, anello 8: 3.18 elementi). Totale **M = 105.13**.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Traccia

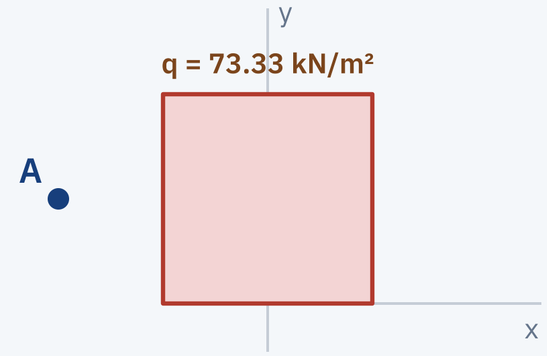
ESEMPIO

Dati

Pianta e carico	**La fondazione di 3×3 m dell'Esempio 2 ($q = 73.33$ kN/m²)**
Punto A	**all'esterno della fondazione: $x = -3$ m, $y = 1.5$ m (a 1.5 m dal bordo sinistro); $z = 3$ m**

RICHIESTO

M e **$\Delta\sigma_z$**; il significato del conteggio in un punto esterno.



Soluzione (1/2)

SOLUZIONE

1 Distanze da A alla fondazione (z = 3 m)

$$x:\ 1.5 \text{ con m } 4.5 \text{ m};\quad y:\ \pm 1.5 \text{ m} \ \Rightarrow\ m = \frac{1.5}{3} = 0.5 \text{ e } \frac{4.5}{3} = 1.5\,,\ \ n = 0.5$$

2 Due rettangoli tratteggiati (4.5 × 3 m meno 1.5 × 3 m), simmetrici: il doppio

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 2\left[I_3(1.5;0.5) - I_3(0.5;0.5)\right] = 2\left[0.13136 - 0.08403\right] = 0.09466$$

$$M = \frac{0.09466}{0.005} = \mathbf{18.93}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 73.33 \times 18.93 = \mathbf{6.94}\ \text{kN/m}^2$$

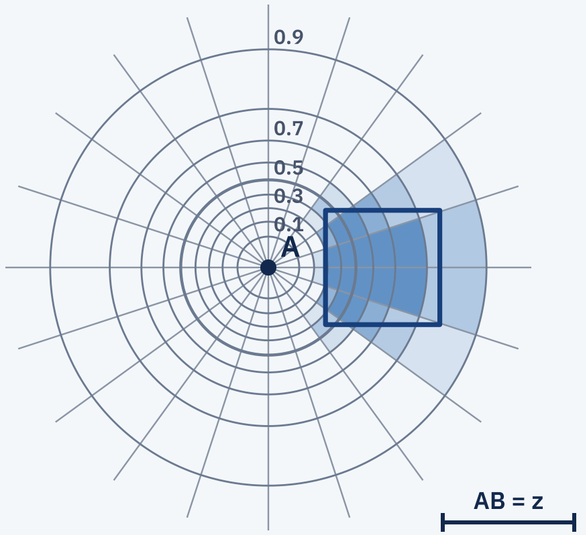
Anche un punto esterno riceve tensione: **elemento M = 18.93**, **$\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²**; il diagramma in pianta non copre il centro del diagramma.

Soluzione (2/2)

SOLUZIONE

Anello	Elemento coperto	Elemento nell'anello
1	**0.00**	20
2	**0.00**	20
3	**0.18**	20
4	**3.22**	20
5	**4.69**	20
6	**4.08**	20
7	**3.31**	20
8	**2.66**	20
9	**0.80**	20
10	**0.00**	20
Totale	**18.93**	200

La pianta entra nel diagramma a partire dal 3° anello ed è più efficace al 5° anello (4.69 elementi). Totale **M = 18.93**; per la stessa fondazione sotto il centro si avrebbe M = 67.22.



Verificare la soluzione in GeoTerva ↗

Sintesi

Punti chiave

Abaco: nove cerchi di raggio $R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}$ e 20 linee radiali; **200 elementi**, con influenza di ciascun elemento **IV = 1/N = 0.005**

Uso: pianta AB = z in scala, con il punto A al centro; numero di elementi coperti M; **$\Delta\sigma_z$ = (IV) q M**; una pianta distinta per ogni profondità

Esempio (3 m × 3 m, 660 kN, z = 3 m, punto medio del lato): q = 73.33 kN/m²; M = 48.07; $\Delta\sigma_z$ = **17.63 kN/m²**; per z = 6 m, M = 19.01, $\Delta\sigma_z$ = 6.97 kN/m²

Ogni forma: pianta a L, angolo rientrante (M = 105.13, $\Delta\sigma_z$ = 52.57 kN/m²); punto esterno all'area (M = 18.93, $\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²)

Accuratezza: il contributo di un elemento è IV q = 0.37 kN/m²; fornisce il modulo M mediante integrale esatto (conteggio privo di errori)

Bibliografia

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Newmark, N.M. (1942). Influence charts for computation of stresses in elastic foundations. University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin No. 338.

NOTA

Tutti gli esempi numerici sono stati prodotti con il motore di calcolo del modulo stesso; il modulo restituisce gli stessi valori. Esempio iniziale del modulo: fondazione 3 m × 3 m, 660 kN, 3 m sotto il punto medio del lato A.

GeoTerva

Calcoli geotecnici online

Dalla teoria alla pratica

In GeoTerva si inseriscono il proprio plan (un poligono con al massimo sei vertici), il carico e il punto A; il modulo disegna il diagramma per la profondità inserita, ombreggia gli elementi coperti e fornisce insieme M, il valore di $\Delta\sigma_z$, il profilo con la profondità, la soluzione passo per passo e la relazione.

Aprire il modulo → **Pagina di teoria →**

Aprire dallo smartphone
I moduli di prova non richiedono registrazione.

Se si desidera utilizzarli nelle proprie lezioni: info@geoterva.com