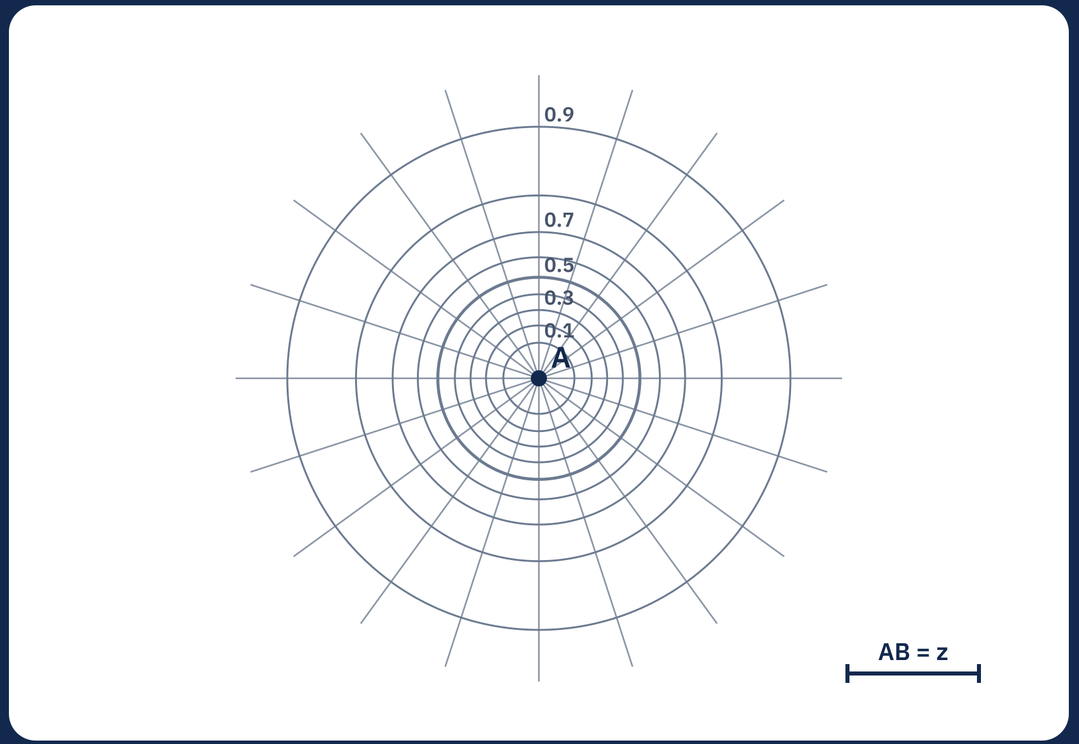
Cours de géotechnique · Contraintes dans le massif de sol

Abaque d'influence de Newmark

Cours : abaque d'influence de Newmark ; le plan de la zone chargée est placé sur l'abaque, les éléments recouverts sont comptés, et $\Delta\sigma_z$ = (IV) q M est obtenu.

- Anneaux à accroissement de contrainte égal
- Valeur d'influence IV = 0.005
- Comptage des éléments
- Plan quelconque
- Résolution à la main possible



Que verrons-nous dans ce cours ?

La construction du diagramme : à partir de la solution de la charge circulaire, cercles de rayon $\mathbf{R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}}$

10 anneaux × 20 secteurs = 200 éléments : chaque élément a la même influence, **IV = 1/N = 0.005**

Utilisation : le plan est dessiné à l'échelle **AB = z**, le point A est placé au centre de l'abaque, le nombre **M** d'éléments est compté ; $\mathbf{\Delta\sigma_z = (IV)\ q\ M}$

Vérifier le comptage anneau par anneau, à la main, avec la **solution du rectangle d'angle** ; profondeur, plan en L et point extérieur à l'aire

La nécessité d'un **tracé distinct** du plan pour chaque profondeur

DÉROULÉ DU COURS

Chaque thème est traité en **trois étapes** :

1 · **Théorie** : formule et justification

2 · **Énoncé** : données et à déterminer

3 · **Solution** : étape par étape, avec les valeurs numériques

Exemple : semelle de poteau de 3 m × 3 m, 660 kN (q = 73.33 kN/m²) ; le point A est à 3 m sous la semelle, à l'aplomb du milieu d'un côté.

Cercles d'égal accroissement de contrainte

THÉORIE

Sous le centre d'une aire circulaire uniformément chargée, $\Delta\sigma_z/q = 1 - 1/[(R/z)^2 + 1]^{3/2}$. En inversant la relation, on obtient le **rayon** de l'aire circulaire qui produit un rapport de contraintes choisi (les deux membres sont sans dimension)

Pour $\Delta\sigma_z/q$ = 0.1 ; 0.2 … 0.9, les cercles tracés avec ces rayons divisent le plan en **anneaux**. Chaque anneau chargé seul produit, à la profondeur z sous le centre, un accroissement de contrainte de **0.1 q** ; le dernier anneau (entre 0.9 et 1.0) s'étend à l'infini

$$\frac{R}{z} = \sqrt{\left(1 - \frac{\Delta\sigma_z}{q}\right)^{-2/3} - 1}$$

$\Delta\sigma_z/q$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
R/z	0.0000	0.1865	0.2698	0.3383	0.4005	0.4598	0.5181	0.5768	0.6370	0.6998
$\Delta\sigma_z/q$	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
R/z	0.7664	0.8384	0.9176	1.0067	1.1097	1.2328	1.3871	1.5944	1.9083	2.5235

200 éléments, valeur d'influence 0.005

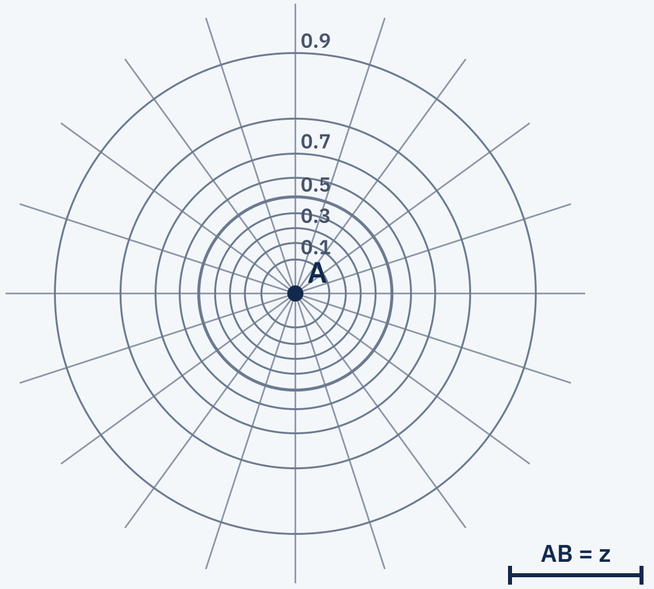
THÉORIE

Newmark (1942) a divisé les anneaux par des **droites radiales** équidistantes. Par symétrie, l'influence de chaque élément d'un même anneau est identique

Si le nombre total d'éléments est **N**, la contribution de chaque élément chargé à la contrainte sous le centre est égale à **IV = 1/N** fois q : la **valeur d'influence**. Pour 10 anneaux et 20 secteurs, N = 200, IV = 0.005

L'effet de chaque élément étant indépendant de sa position dans le diagramme, une aire chargée de forme quelconque peut être mesurée **en comptant les éléments**

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = 0.005$$



$\Delta\sigma_z = (IV)\, q\, M$

THÉORIE

1. On choisit, sous l'aire chargée, la **profondeur z** à laquelle la contrainte est demandée

2. Le plan de la zone chargée est tracé à une échelle telle que la profondeur z soit égale à la **longueur unité AB** du diagramme

3. Le plan est placé sur le diagramme de façon que le point dont la contrainte est recherchée coïncide avec le **centre** du diagramme

4. On détermine le nombre d'éléments **M** situés à l'intérieur du plan ; les éléments partiellement inclus sont pris en compte par estimation

Pour chaque profondeur, un **dessin distinct de la vue en plan** est nécessaire

$$\Delta\sigma_z = (IV)\, q\, M$$

Nombre d'éléments couverts M

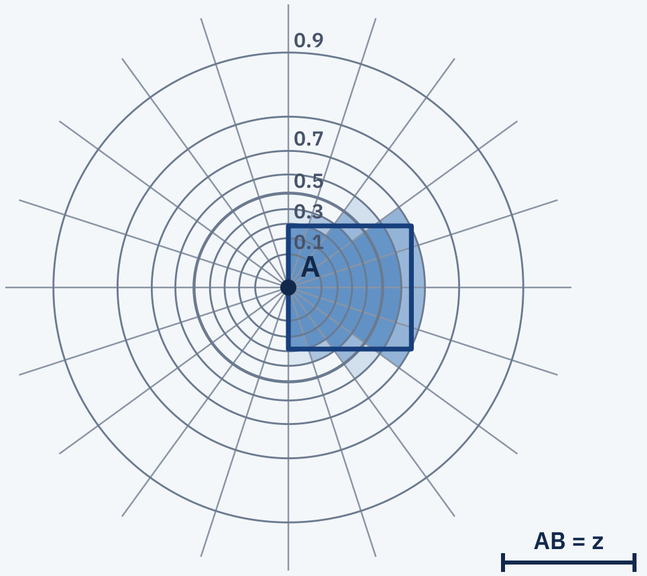
THÉORIE

Le module effectue le tracé pour la profondeur saisie : les éléments couverts sont ombrés **selon la part restant dans l'emprise**

Pour le comptage, on utilise la **valeur exacte** : la solution de Boussinesq, comme pour le cercle, est **intégrée sur le polygone** en coordonnées polaires par rapport au point, ce qui donne **M = (Δσ$_z$/q)/IV**. C'est la valeur que donnerait un comptage parfait

La vue en plan peut être n'importe quel polygone comportant au plus six sommets

$$M = \frac{\Delta\sigma_z / q}{IV}$$



Énoncé

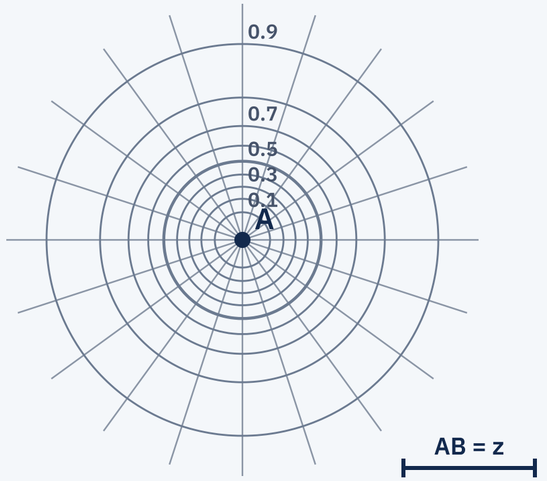
EXEMPLE

À DÉTERMINER

Les rapports **R/z** des cercles ; le nombre d'éléments **N**, la valeur d'influence **IV** ; le nombre d'éléments couverts par chaque cercle.

Données

Rapports de contraintes	$\Delta\sigma_z/q = 0.1;\ 0.2 \ldots 0.9$ **(neuf cercles ; le dixième anneau s'étend à l'infini)**
Secteur	**20 secteurs radiaux égaux**



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Pour $\Delta\sigma_z/q = 0.3$

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.3)^{-2/3} - 1} = \sqrt{1.2684 - 1} = \sqrt{0.2684} = \mathbf{0.5181}$$

2 Pour $\Delta\sigma_z/q = 0.9$

$$\frac{R}{z} = \sqrt{(1-0.9)^{-2/3} - 1} = \sqrt{4.6416 - 1} = \sqrt{3.6416} = \mathbf{1.9083}$$

Le troisième cercle a un rayon égal à **0.5181** fois z, le neuvième à **1.9083** fois z ; les rayons croissent rapidement lorsque le rapport de contraintes augmente et tendent vers l'infini lorsque ce rapport tend vers 1.

Solution (2/2)

SOLUTION

1 N = 10 anneaux × 20 secteurs = 200 éléments

$$IV = \frac{1}{N} = \frac{1}{200} = \mathbf{0.005} \qquad k.\ \text{cercle :}\ \ 20\,k\ \text{élément} \ \Rightarrow\ IV\,(20\,k) = 0.1\,k = \frac{\Delta\sigma_z}{q}$$

Cercle	$\Delta\sigma_z/q$	R/z	Élément couvert	Influence totale = IV × élément
1	0.1	0.2698	20 (= 20 × 1)	0.10
2	0.2	0.4005	40 (= 20 × 2)	0.20
3	0.3	0.5181	60 (= 20 × 3)	0.30
4	0.4	0.6370	80 (= 20 × 4)	0.40
5	0.5	0.7664	100 (= 20 × 5)	0.50
6	0.6	0.9176	120 (= 20 × 6)	0.60
7	0.7	1.1097	140 (= 20 × 7)	0.70
8	0.8	1.3871	160 (= 20 × 8)	0.80
9	0.9	1.9083	180 (= 20 × 9)	0.90
10^e anneau	1.0	∞	200	1.00

Chaque anneau est composé de 20 éléments et contribue à lui seul à hauteur de **0.1 q** : l'effet des 20 k éléments situés à l'intérieur du k-ième cercle est le même que $\Delta\sigma_z/q = 0.1\ k$ donné par la solution de la charge circulaire.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

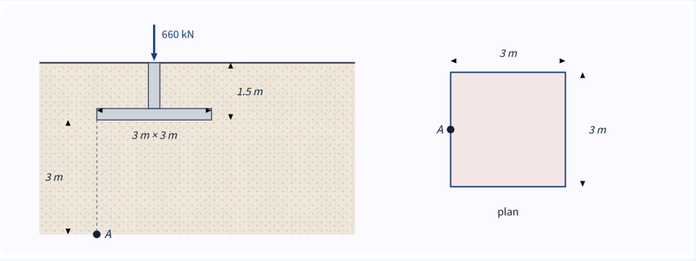
EXEMPLE

Données

Fondation	3×3 **m, charge du poteau** 660 **kN** ($q = 660/(3 \times 3)$)
Point A	$z = 3$ **m sous la semelle, sous le milieu d'un bord**
Diagramme	$IV = 0.005$ **(10 anneaux, 20 secteurs)**

À DÉTERMINER

q, échelle du plan, **M**, **$\Delta\sigma_z$** ; vérification de M par la solution rectangulaire.



Solution (1/3)

SOLUTION

1 Pression sous la semelle

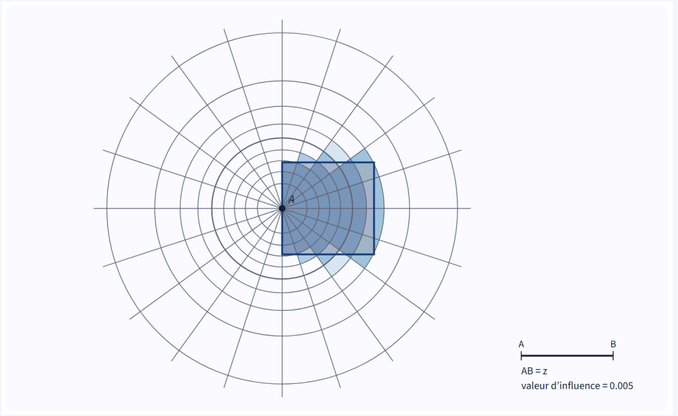
$$q = \frac{660}{3 \times 3} = \mathbf{73.33}\ \mathrm{kN/m^2}$$

2 Échelle en plan : AB = z = 3 m

$$\text{bord de semelle} = \frac{3\ \mathrm{m}}{AB} = \frac{3}{3} = 1\ AB$$

3 Positionnement : le point A est placé au centre du diagramme, de façon que le bord gauche de la semelle passe par le centre

La semelle est dessinée comme un carré de côté **AB**, et le milieu de son côté gauche (A) est placé au centre du diagramme (figure de droite).



Solution (2/3)

SOLUTION

4 A est au milieu du côté : la fondation est divisée en deux rectangles ayant un angle en A (1.5 m × 3 m)

$$m = \frac{1.5}{3} = 0.5\,, \quad n = \frac{3}{3} = 1\,, \quad m^2 = 0.25\,, \quad n^2 = 1\,, \quad \sqrt{m^2+n^2+1} = 1.50$$

5 Solution de Boussinesq pour le coin d'un rectangle $I_3(0.5\,;\,1)$

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1}\cdot\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1} + \tan^{-1}\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+1-m^2n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1.5}{2.5}\cdot\frac{3.25}{2.25} + \tan^{-1}\frac{1.5}{2.0}\right] = \frac{0.8667+0.6435}{4\pi} = \mathbf{0.12018}$$

La valeur d'influence du rectangle de 1.5 m × 3 m dont un coin est en A est **I_3 = 0.12018** ; les deux rectangles étant symétriques de part et d'autre de A, le total est 2 I_3.

Solution (3/3)

SOLUTION

6 Nombre d'éléments

$$M = \frac{\Delta\sigma_z/q}{IV} = \frac{2\,I_3}{IV} = \frac{2\,(0.12018)}{0.005} = \mathbf{48.07}$$

7 Accroissement de contrainte

$$\Delta\sigma_z = (IV)\,q\,M = (0.005)\left(\frac{660}{3\times 3}\right)(48.07) = 0.005 \times 73.33 \times 48.07 = \mathbf{17.63}\ \mathrm{kN/m^2}$$

8 Directement par la solution rectangulaire de Boussinesq

$$\Delta\sigma_z = 2\,q\,I_3 = 2\,(73.33)(0.12018) = \mathbf{17.63}\ \mathrm{kN/m^2}$$

Au point A, le diagramme couvre **M = 48.07 éléments** (le plan recouvre 24.0 % des 200 éléments) : **$\Delta\sigma_z$ = 17.63 kN/m²** (24.0 % de q) ; le module donne la même valeur.

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

EXEMPLE

Données

Vue en plan	**Exemple 2 : semelle de 3×3 m, A milieu du bord gauche, $z = 3$ m ($AB = 3$ m)**
Énoncés	**nombre d'éléments couverts dans chaque anneau ; total M ; contribution d'un élément à la contrainte**

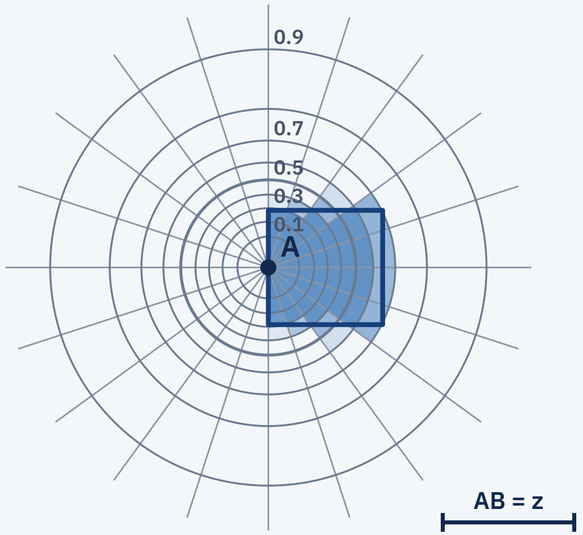
À DÉTERMINER

Nombre d'**éléments couverts** par anneau (sur 20 éléments) et total ; effet d'une erreur d'**un seul élément** dans le comptage.

Solution

SOLUTION

Anneau	Plage R/z	Élément couvert	Élément de l'anneau
1	0.000 – 0.270	**10.00**	20
2	0.270 – 0.400	**10.00**	20
3	0.400 – 0.518	**9.82**	20
4	0.518 – 0.637	**6.78**	20
5	0.637 – 0.766	**5.09**	20
6	0.766 – 0.918	**4.08**	20
7	0.918 – 1.110	**2.29**	20
8	1.110 – 1.387	**0.00**	20
9	1.387 – 1.908	**0.00**	20
10	1.908 – ∞	**0.00**	20
Total		**48.07**	200



Les deux premiers anneaux sont des demi-cercles (**10 + 10**) : le point A se trouve sur le bord. Total **M = 48.07**. Un élément = IV q = 0.37 kN/m² : une différence d'un élément dans le comptage modifie $\Delta\sigma_z$ de 0.37 kN/m² (2.1 %).

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

EXEMPLE

Données

Semelle et point	**La semelle de l'exemple 2 et le point A ($q = 73.33$ kN/m²)**
Profondeurs	**$z = 1.2;\ 2.4;\ 3.6 \ldots 12$ m (tableau des profils du module)**

À DÉTERMINER

Échelle du plan à chaque profondeur, **M** et **$\Delta\sigma_z$** ; à la main pour z = 6 m.

Solution (1/2)

SOLUTION

z (m)	Bord de la semelle (unité AB)	M (élément)	$\Delta\sigma_z$ = IV q M (kN/m²)
1.2	2.500	87.03	**31.91**
2.4	1.250	59.27	**21.73**
3.6	0.833	39.16	**14.36**
4.8	0.625	26.72	**9.80**
6.0	0.500	19.01	**6.97**
7.2	0.417	14.07	**5.16**
8.4	0.357	10.76	**3.95**
9.6	0.312	8.47	**3.11**
10.8	0.278	6.82	**2.50**
12.0	0.250	5.61	**2.06**

À mesure que la profondeur augmente, le diagramme en plan se contracte vers son centre (bord de la fondation à 2.50 AB pour z = 1.2 m, à 0.25 AB pour z = 12 m) et recouvre moins d'éléments : **M = 87.03 → 5.61**. Le plan est redessiné pour chaque ligne.

Solution (2/2)

SOLUTION

1 Échelle du plan et m, n

$$AB = z = 6\ \text{m} \Rightarrow \text{bord de semelle} = \frac{3}{6} = 0.5\,AB\ ; \quad m = \frac{1.5}{6} = 0.25\ , \quad n = \frac{3}{6} = 0.5$$

2 Nombre d'éléments et contrainte

$$I_3(0.25; 0.5) = 0.04753 \ \Rightarrow \ M = \frac{2\,(0.04753)}{0.005} = \mathbf{19.01}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 73.33 \times 19.01 = \mathbf{6.97}\ \text{kN/m}^2$$

À z = 6 m, la fondation est très petite par rapport au centre du diagramme et ne recouvre que **19.01 éléments** ; $\Delta\sigma_z$ = **6.97 kN/m²** (17.63 kN/m² à z = 3 m).

Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

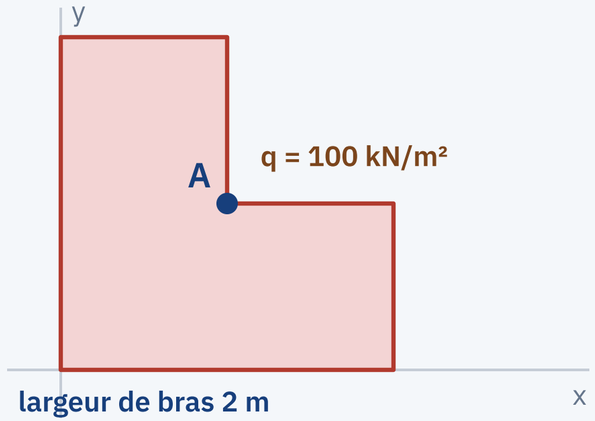
EXEMPLE

Données

Surface	**En forme de L (6 angles) :** $(0;0),\ (4;0),\ (4;2),\ (2;2),\ (2;4),\ (0;4)$ **m ;** $q = 100$ **kN/m²**
Point A	**sous l'angle rentrant,** $(2;\ 2)$ **;** $z = 2$ **m**
Indication	**Trois des quatre quarts de 2 m × 2 m autour de A sont chargés**

À DÉTERMINER

M et **$\Delta\sigma_z$** ; sommation anneau par anneau.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Échelle du plan et quadrants

$$AB = z = 2\ \text{m} \Rightarrow \text{largeur du bras} = 1\,AB\ ; \quad \text{chaque quart} : m = n = \frac{2}{2} = 1$$

2 Nombre d'éléments d'un quadrant et total

$$I_3(1;1) = 0.17522 \ \Rightarrow \ M_{\text{quadrant}} = \frac{0.17522}{0.005} = 35.04$$

$$M = 3\,M_{\text{quadrant}} = 3\,(35.04) = \mathbf{105.13}$$

3 Contrainte

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 100 \times 105.13 = \mathbf{52.57}\ \text{kN/m}^2 \qquad \big(= 3\,q\,I_3 = 3\,(100)(0.17522)\big)$$

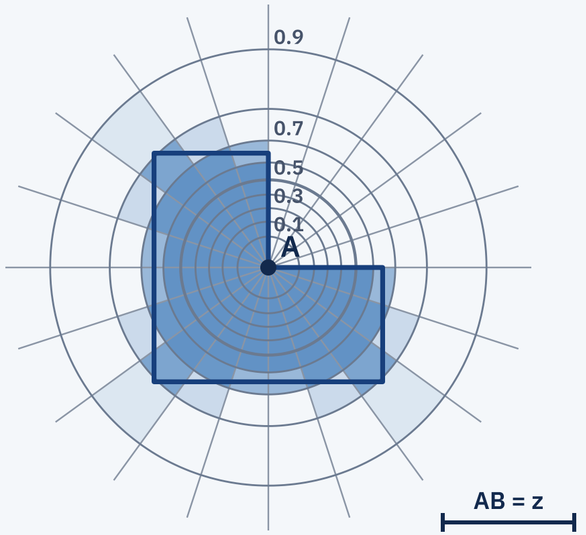
Sous l'angle rentrant, la charge en L couvre **105.13 éléments** : trois des quatre quadrants. Si les quatre quadrants étaient chargés, on aurait M = 140.18.

Solution (2/2)

SOLUTION

Anneau	Élément couvert	Élément de l'anneau
1	**15.00**	20
2	**15.00**	20
3	**15.00**	20
4	**15.00**	20
5	**15.00**	20
6	**15.00**	20
7	**11.94**	20
8	**3.18**	20
9	**0.01**	20
10	**0.00**	20
Total	**105.13**	200

Dans les anneaux 1–6, **15 éléments** de chaque anneau (les trois quarts de 20) sont couverts ; dans les anneaux extérieurs, seuls les angles du plan sont actifs (anneau 7 : 11.94 éléments, anneau 8 : 3.18 éléments). Total **M = 105.13**.



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Énoncé

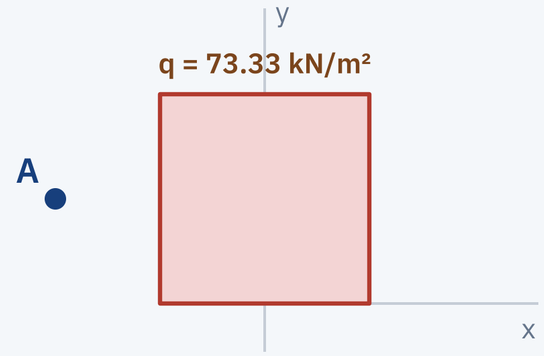
EXEMPLE

Données

Vue en plan et charge	**La semelle de 3×3 m de l'exemple 2 ($q = 73.33$ kN/m²)**
Point A	**à l'extérieur de la fondation : $x = -3$ m, $y = 1.5$ m (à 1.5 m du bord gauche) ; $z = 3$ m**

À DÉTERMINER

M et **$\Delta\sigma_z$** ; signification du comptage en un point extérieur.



Solution (1/2)

SOLUTION

1 Distances de A à la semelle (z = 3 m)

$$x : \ 1.5 \text{ avec m } 4.5 \text{ m} ; \quad y : \ \pm 1.5 \text{ m} \ \Rightarrow \ m = \frac{1.5}{3} = 0.5 \text{ et } \frac{4.5}{3} = 1.5 , \ \ n = 0.5$$

2 Deux rectangles hachurés (4.5 × 3 m moins 1.5 × 3 m), symétriques : deux fois cette valeur

$$\frac{\Delta\sigma_z}{q} = 2\left[I_3(1.5;0.5) - I_3(0.5;0.5)\right] = 2\left[0.13136 - 0.08403\right] = 0.09466$$

$$M = \frac{0.09466}{0.005} = \mathbf{18.93}$$

$$\Delta\sigma_z = 0.005 \times 73.33 \times 18.93 = \mathbf{6.94} \ \mathrm{kN/m^2}$$

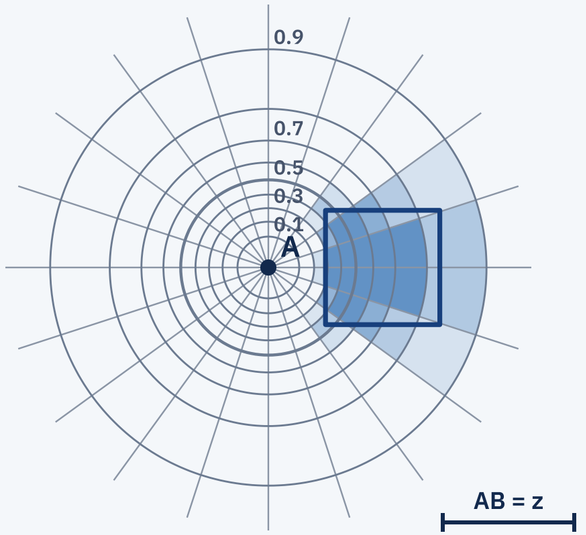
Un point extérieur reçoit lui aussi une contrainte : **M = 18.93 éléments**, **$\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²** ; le plan ne recouvre pas le centre du diagramme.

Solution (2/2)

SOLUTION

Anneau	Élément couvert	Élément de l'anneau
1	**0.00**	20
2	**0.00**	20
3	**0.18**	20
4	**3.22**	20
5	**4.69**	20
6	**4.08**	20
7	**3.31**	20
8	**2.66**	20
9	**0.80**	20
10	**0.00**	20
Total	**18.93**	200

Le plan entre dans le diagramme à partir de la 3e couronne et est le plus influent à la 5e couronne (4.69 éléments). Total **M = 18.93** ; pour la même fondation sous le centre, on aurait M = 67.22.



Vérifier la solution dans GeoTerva ↗

Synthèse

Points à retenir

Diagramme : neuf cercles de rayon $R/z = \sqrt{[(1 - \Delta\sigma_z/q)^{-2/3} - 1]}$ et 20 droites radiales ; **200 éléments**, l'influence de chaque élément étant **IV = 1/N = 0.005**

Utilisation : plan à l'échelle AB = z, point A au centre ; nombre d'éléments recouverts M ; **$\Delta\sigma_z$ = (IV) q M** ; un plan distinct pour chaque profondeur

Exemple (3 m × 3 m, 660 kN, z = 3 m, milieu du côté) : q = 73.33 kN/m² ; M = 48.07 ; **$\Delta\sigma_z$ = 17.63 kN/m²** ; à z = 6 m, M = 19.01, $\Delta\sigma_z$ = 6.97 kN/m²

Toute forme : plan en L, angle rentrant (M = 105.13, $\Delta\sigma_z$ = 52.57 kN/m²) ; point extérieur à l'aire (M = 18.93, $\Delta\sigma_z$ = 6.94 kN/m²)

Précision : l'effet d'un élément est IV q = 0.37 kN/m² ; le module donne M par intégrale exacte (comptage parfait)

Références bibliographiques

Das, B.M. (2018). Principles of Geotechnical Engineering, 9th ed. Cengage Learning.

Newmark, N.M. (1942). Influence charts for computation of stresses in elastic foundations. University of Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin No. 338.

REMARQUE

Tous les exemples numériques ont été produits avec le moteur de calcul propre du module ; le module donne les mêmes valeurs. L'exemple initial du module : fondation de 3 m × 3 m, 660 kN, à 3 m sous le milieu du côté A.

GeoTerva

Calculs géotechniques en ligne

De la théorie à la pratique

Renseigner dans GeoTerva le plan étudié (polygone de six sommets au plus), la charge et le point A ; le module trace le diagramme pour la profondeur saisie, grise les éléments couverts et fournit ensemble M, la valeur de $\Delta\sigma_z$, le profil en profondeur, la solution étape par étape et le rapport.

Ouvrir sur smartphone
Les modules d'essai ne nécessitent pas d'inscription.

Ouvrir le module →

Page de théorie →

Si vous souhaitez les utiliser dans vos cours : info@geoterva.com